Lógica Modal Hibrida: Nociones Básicas

Luis Germán Polanco Contreras[1]

[1]Estudiante de Matemáticas. Universidad de los Andes.

Email: lg.polanco75@uniandes.edu.co Tel: (571) 861 9092

1. CONTENIDO

Las lógicas modales en general nos hablan de "modelos relacionados", por ejemplo estudiamos lógicas modales básicas a partir de modelos de Kripke que constan de un conjunto *W* de puntos o nodos, una relación binaria $R \subseteq WxW$ (y usualmente llamamos un *marco* a la pareja *(W, R)*) y una valuación *V* que asigna a cada letra proposicional una conjunto de puntos del modelo donde son validas y a través del operador $\Diamond$ que nos permite verificar la validez de una formula en algún sucesor de un punto del modelo y análogamente el operador $\Box$ que nos permite verificar validez en todo los sucesores de un punto del modelo; luego de revisar estos puntos nos damos cuenta que la lógica modal básica es muy expresiva acerca de la relación misma entre sus puntos, podemos verificar propiedades sobre sucesores y en casos como la lógica temporal sobre los antecesores pero bajo ningún caso podemos hablamos sobre los puntos mismos del modelo y es la lógica modal hibrida la que busca solucionar este asunto, en otras palabras requiere hablar de un "aquí y ahora" dentro de los modelos de la lógica modal básica.

Este problema es solucionado de manera muy elegante, sencilla y sobretodo muy poderosa; como lo afirman Areces y Blackburn al decir "certainly any modal logics can be hybridized, and in our view many of them should be."[1], al introducir un conjunto de *nominales* que sería sencillamente un conjunto de nombres por asignar a cada punto del modelo, este conjunto se denota usualmente como $NOM = \{i, j, k, \dots\}$ y debe ser disjunto del conjunto de letras proposicionales$PROP = \{p, q, r, \dots\}$; con la introducción de este cambio a la lógica modal básica las formulas bien formadas serian entonces:

$$\varphi := \perp \mid i \mid p \mid \neg p \mid \varphi \wedge \gamma \mid \Diamond\, \varphi \mid @_i \varphi$$

Por ejemplo $\Diamond\,(i \wedge p) \rightarrow \Box(i \vee p)$ es una formula bien formada de la lógica modal hibrida. Más adelante explicaremos el significado del nuevo operador unario $@_i$.

Los modelos de estas lógicas modales hibridas son idénticos en el mundo *W* y en la relación *R* a los modelos de la lógica modal básica, pero el punto de inflexión importante se encuentra en la valuación *V*, que se convierte en una función con dominio $NOM \cup PROP$ y rango $P(W)$.

Ahora debemos remarcar dos propiedades importantes de los nominales; primero los nominales son el principal mecanismo de hibridación para las lógicas modales y estos juegan el un papel similar al que juegan los términos en la lógica de primer orden (son elementos básicos y que reciben nombres propios por su importancia en el modelo), sin embargo estos son formulas en sí mismos como lo acaramos anteriormente.

En segundo lugar debemos anotar que $V(i)$ debe ser un *singleton*, pues cada nominal se refiere a un único elemento del mundo del modelo y no debería haber dos puntos con el mismo nombre pues así no estaríamos dándole a cada punto la importancia local que estamos buscando para diferenciarlos y estudiarlos particularmente.

Para completar ahora los conceptos básicos sobre la lógica modal hibrida debemos añadir dos clausulas de validez puntual a las ya conocidas para la lógica modal básica obteniendo en total:

$M,w \vDash \perp$ *nunca sucede*

$M,w \vDash p \; si \; y \; solo \; si \; w \in V(p)$

$M,w \vDash \neg\varphi \; si \; y \; solo \; si \; M,w \nvDash \varphi$

$M,w \vDash \varphi \wedge \psi \; si \; y \; solo \; si M,w \vDash \varphi \;\; y \;\; M,w \vDash \psi$

$M,w \vDash \Diamond \varphi \; si \; y \; solo \; si \; existe \; v \in W \; tal \; que \; wRv \;\; y \;\; M,v \vDash \varphi$

$M,w \vDash i \;\; si \; y \; solo \; si \;\; w \; es \; denotado \; por \; i^*$

$M,w \vDash @_i\varphi \;\; si \; y \; solo \; si \;\; M,v \vDash \varphi, donde \; v \; es \; denotado \; por \; i^{**}$

Esto nos está indicando que los nominales son validos en un único punto de modelo (*) y el operador $@_i$, también conocido como el operador de satisfacibilidad, está dando un *salto* al punto nombrado por i, es decir, $@_i\varphi$ significaría "φ se satisface en el punto llamado i" (**) o como lo indican Areces y Blackburn "it moves the point of evaluation to the state named by i and checks whether φ is true there" [1].

Entonces podemos preguntarnos por formulas de la forma $@_ij$ que nos está diciendo que el nominal j vale en el punto llamado i, es decir, que i y j denotan el mismo punto del modelo y de alguna manera esto nos da una caracterización de igualdad para los nominales o igualdad para estados o puntos del modelo (podemos decidir fácilmente por medio del operador @ cuando dos puntos son el mismo). Adicionalmente la formula $@_i \Diamond j$ nos indica que el punto nombrado por j es un sucesor del nominal i, así que podemos saber cuando un nominal es sucesor de otro gracias al operador @ y obtenemos una teoría modal para sucesión de estados (modal theory of state succession [1]).

Podría parecer que el operador @ no ha adicionado nada realmente nuevo al lenguaje modal, pero si o vemos aplicado a la lógica temporal por ejemplo, viendo *W* como un conjunto de tiempos y *R* la relación de futuro, la formula $@_i\varphi$ nos dice que la información φ es almacenada en el tiempo i; permitiéndonos encontrar esta información de manera fácil y rápida por medio del "salto" que el operador @ formaliza.

Con la adición de los nominales y la extensión de la noción de validez aparecen entonces formulas interesantes de analizar como por ejemplo $\Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ [2] pues si suponemos que $M,w \vDash \Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$, entonces tenemos que si $M,w \vDash \Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q)$ es por que $M,w \vDash \Diamond(i \wedge p)$ y $M,w \vDash \Diamond(i \wedge q)$; lo cual obliga que existan $v,u \in W$ tales que $M,v \vDash (i \wedge p)$ y $M,w \vDash (i \wedge q)$, pero como sabemos que i es un nominal tenemos necesariamente que $v = u$ y por tanto $M,w \vDash \Diamond(p \wedge q)$. Pero si en la fórmula original cambiáramos i por alguna letra proposicional la formula podría ser fácilmente invalidada, mientras que en la lógica modal hibrida es válida para todos sus modelos.

El operador de satisfacibilidad @ presenta algunas propiedades interesantes como la distributividad sobre la implicación:

Lema: En todos los modelos de la lógica modal hibrida vale $@_i(\varphi \to \psi) \to (@_i\varphi \to @_i\psi)$

Dem: Sea M un modelo y w un punto del modelo. Supongamos $M,w \vDash @_i(\varphi \to \psi)$, esto significa que si v es el punto denotado por i, entonces $M,v \vDash (\varphi \to \psi)$, si entonces tenemos que $M,v \vDash \varphi$, debemos tener entonces que $M,v \vDash \psi$, luego podemos deducir que $M,w \vDash @_i\varphi$ y $M,w \vDash @_i\psi$ y por tanto $M,w \vDash @_i\varphi \to @_i\psi$ y por tanto $M,w \vDash @_i(\varphi \to \psi) \to (@_i\varphi \to @_i\psi)$ ■

La autodualidad:

Lema: la formula $@_i\varphi \to \neg @_i \neg\varphi$ es cierta en los modelos de la lógica modal hibrida.

Dem: Sea M un modelo y w un punto del modelo. Supongamos por contradicción que $M,w \vDash (@_i\varphi) \wedge \neg(\neg @_i \neg\varphi)$, luego tenemos que $M,w \vDash (@_i\varphi)$ y $M,w \vDash \neg(\neg @_i \neg\varphi)$ y entonces podemos deducir que $M,w \vDash @_i \neg\varphi$; si i denota el nodo v tenemos que $M,v \vDash \varphi$ y $M,v \vDash \neg\varphi$, lo cual es una contradicción. ■

Y sobre todo puede actuar de puente entre la semántica y la sintáctica debido a que $M,w \vDash \varphi \; si\ y\ solo\ si\ M \vDash @_i\varphi, siempre\ que\ i\ sea\ un\ nominal\ que\ nombra\ a\ w$.

Ahora introduciremos el concepto de vinculación, la idea se sigue del hecho que aunque los nominales son formulas deben actuar cono contantes al estilo de las constantes en la lógica de primer orden, es decir, que deberíamos poder asignar ciertas "variables nominales" a los puntos para poder hablar de sus propiedades locales generales, esto se puede solucionar a través del vinculo local ↓, que explicado de manera burda ↓ vincula un nominal al punto de evaluación, más precisamente vincula al estado una variable de estado (o variable nominal), que es básicamente un nominal que puede vincularse a un estado mientras los nominales como tal son fijos; podemos realizar una analogía entre las constantes y variables de la lógica de primer orden con los nominales y las variables de estado, viendo los nominales como constantes y las variables como variables de estado; así pues las constantes (nominales) son fijas mientras que las variables las podemos usar (o vincular a estados determinados) para hablar del nodo en cuestión.

Por ejemplo la formula $\downarrow x \neg \Diamond x$ esta nombrando el estado actual como x y dice que no es posible alcanzar el estado x por medio de la relación R del modelo; esta fórmula distingue puntos reflexivos de puntos irreflexivos en los modelos.

Por medio de este vinculador local para los nominales podemos definir entonces varias propiedades de marcos que no eran definibles en la lógica modal básica, como la anti simetría, la asimetría, la irreflexibilidad o la no discreción de un modelo. Ya vimos como la formula $\downarrow x \neg \Diamond x$ define la propiedad de irreflexivilidad en marcos,

Por ejemplo la antisimetria se puede definir por medio de la formula $\left((\downarrow x \Diamond i) \wedge \left(@_i (\Diamond x) \right) \right) \to (@_i x)$; esta fórmula está diciendo literalmente que llamamos al estado actual x y existe un estado i que podemos alcanzar por medio de la relación R del modelo desde x ; adicionalmente en el estado i vale que este está relacionado por medio de R con el estado x, entonces sucede que en i vale x, luego estamos hablando del mismo nodo del modelo y por tanto la relación es antisimetrica.

De manera análoga podemos ver que la formula $(\downarrow x \lozenge i) \rightarrow @_i(\neg \lozenge x)$ define la asimetría, pues podemos leer en esta que si llamamos al esta actual x y en este existe algún sucesor nombrado i, entonces en i vale que ninguno de sus sucesores se llama x.

Con los ejemplos dados anteriormente podemos evidenciar como la inclusión de los nominales, el operador de satisfacibilidad y el vinculante local; hemos dotado a la lógica modal básica de mayor expresividad sobre propiedades de los puntos mismos, permitiéndonos en este mismo sentido definir propiedades de marcos que no eran definibles dotándonos de mayor expresividad.

Ahora que hemos introducido la noción de vinculador local, podemos extenderla a vinculadores globales que hacen uso de los cuantificadores universales $\forall$ y $\exists$, de donde obtenemos como resultado formulas del estilo: $\exists x @_x(\lozenge x)$, que se interpreta como "existe un punto del modelo llamado x desde el cual se puede alcanzar por medio de una R-transición el punto nombrado x". O por ejemplo $\forall x(\neg \exists y(@_x \lozenge y))$ que significaría que "para todos los puntos llamados x, no existe un punto llamado y que sea sucesor de x", o mejor dicho x sería un punto aislado del modelo.

Hemos comprobado que aun con el poder expresivo de la lógica modal básica hemos podido extenderla de manera que enriquezcamos enormemente su expresividad sobre todo a nivel local y de marcos, permitiendo de esta manera el estudio detallado de muchas propiedades interesantes sobre los modelos y dándonos herramientas para el fortalecimiento de la teoría de modelos en la lógica modal.

2. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Areces, C. y Blackburn, P. Hybrid Logic: Bringing them all Together. ILLC University of Amsterdam y INRIA Lorraine. 2001

[2] Areces, Carlos. Logic Engineering. The case of Description and Hybrid Logics. ILLC Dissertation Series DS-2000-5. PhD thesis, ILLC, University of Amsterdam. 2000

[3] Blackburn, P. y Seligman, J. Hybrid languages. Journal of Logic, Language and Information, 4:251–272, 1995.