ANALES
de la Universidad Metropolitana

Modelo matemático de programación entera aplicado a un problema de topografía

NÉSTOR LÓPEZ
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Metropolitana

Resumen

La geodesia es la ciencia de hacer mediciones precisas de grandes porciones de la Tierra, incluyendo el problema del tamaño y la forma de la Tierra como un todo. Los estudios geodésicos son el fundamento de todo conocimiento preciso de la posición de la tierra.

La necesidad de precisión es real. Los ingenieros deben saber con toda exactitud cuánto terreno será bañado por la construcción de una represa; los cartógrafos necesitan tales mediciones como marco para sus mapas; los ingenieros de autopistas, para confirmar sus propias observaciones, y la lista crece cada día con el crecimiento de la ciencia y la tecnología.

La topografía es la técnica de ubicar puntos en la superficie de la tierra. Cuando las áreas implicadas son limitadas en extensión, se considera que la tierra es plana y el trabajo recibe el nombre de planimetría. Una medición geodésica cubre grandes áreas cuya forma y tamaño verdaderos debe tomarse en consideración.

Para elaborar mapas precisos, es necesario hacer mediciones utilizando instrumentos llamados teodolitos, que tienen que ser ubicados en puntos de observación del terreno para formar polígonos irregulares cerrados de un número indeterminado de lados. La precisión del trazado aumenta a medida que decrece el número de lados del polígono a partir del cual se hacen las mediciones. Las restricciones de este problema se deben a observaciones deficientes del teodolito ocasionadas por la presencia de árboles, colinas, monumentos y otros obstáculos.

Este problema, la manera en que se le visualiza, cuya función objetiva consiste en minimizar el número de estaciones de teodolitos y está sujeta a las restricciones de la observación que se han mencionado antes, conduce a un modelo matemático de programación entera. Este trabajo presenta, de una manera comprensible, la función objetiva y las restricciones del problema, así como la solución mediante la utilización de programas de computación adecuados, un algoritmo que haga uso de técnicas ramificadas.

Palabras claves: geodesia, topografía, planimetría, teodolitos, modelo matemático de programación entera

Vol. 1, Nº 2, 2001: 33-44

Abstract

Geodesy is the science of making accurate surveys of large parts of the earth, including the problem of the size and shape of the earth as a whole. Geodetic surveys are the foundation of all precise knowledge of position on earth.

The requirement for precision is real. Valley planners must know exactly how much land will be flooded by the building of a new dam; cartographers need such surveys for the framework of their maps, highway engineers as a check on their own surveys; and the list of needs grows from day to day with the growth of science and technology.

Surveying is a technique of locating points on the earth surface. When the areas implied are limited in extent, the earth is considered to be a plane and the work is called plane surveying. A geodetic survey covers large areas that the true shape and size of the earth must be taken into consideration.

It is a need, for determining accurate maps to make surveys using instruments called theodolites, which have to be placed on points of observation of the terrain in order to form a closed irregular polygon of undetermined number of sides. Precision in making draws , grows as the number of sides of polygons diminish., as this polygon has to be plotted and the measures obtained from it as well. The restrictions of this problem are due to deficients observations made by the thedolite because of the presence of trees, hills, monuments and other obstacles.

This problem, the way it is visualized, which objective function consists in the minimization of the number of theodolite stations and subjected to the restrictions of observation mentioned above, yields to a matemathical model of 0-1 Linear Integer Programming

The objective function and the restrictions of the problem, as well as the solution by using and appropriate software, an algorithm that uses branch and bound techniques, are shown in an understandable manner.

Keywords: Geodesy, planimetry, theodolite, matemathical model, topography.

Antecedentes

La palabra geodesia literalmente expresa “ división de la tierra”. Sin embargo, esta definición no es suficientemente clara y podemos decir que la Geodesia es la ciencia que determina la forma y dimensiones de la Tierra por medio de la Geometría. Esta geometría significa la representación analítica y gráfica de su superficie, pero este aspecto se ve modificado, según sea la mayor o menor profundidad que se quiera dar al problema. Si se estudia el lado eminentemente práctico de la Geodesia, es la representación de la superficie física de la Tierra, con todos sus accidentes, mayores y menores (alturas y depresiones), con el propósito de elaborar mapas nacionales e internacionales, así como cartas temáticas para aplicaciones específicas como las geológicas, hidrográficas, marítimas, etc.

En otras palabras, la Geodesia, gracias a sus triangulaciones, poligonaciones y nivelaciones, proporciona una base sólida para el levantamiento y la elaboración de mapas y cartas.

Una vez definidos los vértices de las triangulaciones, y tomando esto como base se recurre a la Topografía para hacer el levantamiento detallado de la zona bajo estudio.

Aspectos generales del problema topográfico

El reconocimiento de una triangulación geodésica se basa en las siguientes consideraciones previas:

La extensión y forma del terreno.

La longitud media que deben tener los lados de la triangulación para que sirvan mejor como base de las operaciones subsecuentes de topografía, fotogrametría, etc.

Es necesario hacer un anteproyecto de triangulación, que se prepare en la oficina usando para ello el mejor mapa de la región y los catálogos de posiciones geográficas existentes. El criterio general que debe normar la formación de un anterproyecto es el de proyectar una red o cadena de triángulos, que se ajuste a los objetivos generales.

Este anteproyecto será confirmado o bien se modificará convenientemente de acuerdo con el trabajo de reconocimiento que se realice en el campo.

En cuanto a la elaboración del croquis y la descripción de los vértices, al ocupar uno de los lugares en donde se supone que podrá establecerse un vértice, se instalará el teodolito y se anotarán los datos en el registro de campo. Cuando se considera que el reconocimiento está terminado se hará un dibujo a escala adecuada, en el cual se situarán las estaciones ocupadas y los puntos visados, para obtener un croquis en el que puedan proyectarse las redes o cadenas de triangulación. Ver Figura N° 1.

Vol. 1, Nº 2, 2001: 33-44

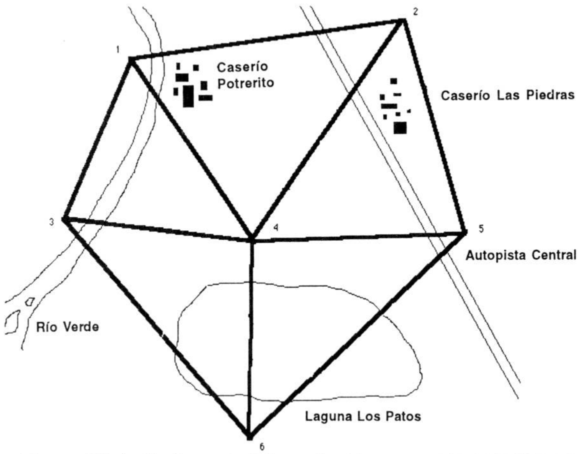

Figura N° 1. Cadena de triangulación con seis estaciones

El trazo de los triángulos se hará de acuerdo con las especificaciones básicas en lo que respecta a las longitudes medias de los lados y a la amplitud de los ángulos.

Refinamiento del trabajo topográfico. Una vez realizada la triangulación, es necesario realizar un levantamiento topográfico más detallado o refinado dividiendo las zonas en subzonas, tomando como base los puntos de la triangulación. Esto se indica en la Figura N° 2.

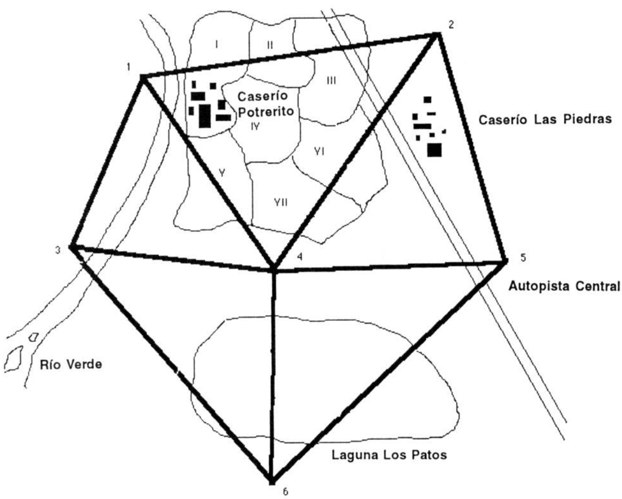

Figura N° 2. División de las zonas en subzonas para un levantamiento topográfico más refinado.

Observemos las subzonas en un gráfico más detallado. Ver Figura N° 3.

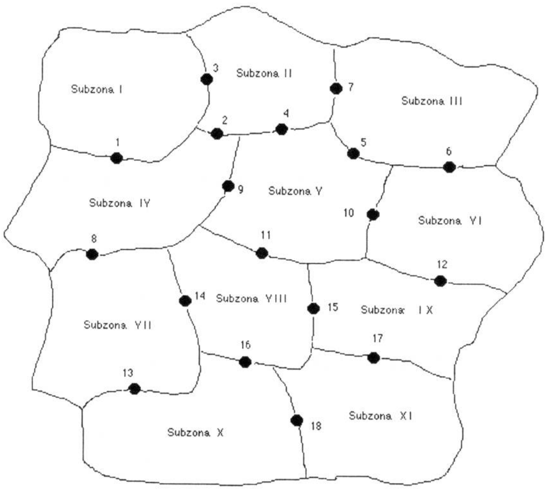

Figura N° 3. División del terreno en subzonas para el levantamiento topográfico.

La división del terreno en subzonas es necesaria para determinar el detalle de la topografía del terreno, haciendo mediciones, utilizando instrumentos de precisión llamados teodolitos. Estos deberán colocarse en puntos del terreno, que unidos mediante rectas formen un polígono irregular de un número indeterminado de lados. La posibilidad de hacer dibujos más exactos de la zona bajo estudio, ya que el trabajo topográfico se basa en el establecimiento de una poligonal base, aumenta en la medida en que disminuye el número de lados del polígono, ya que éste tendrá que ser graficado a escala para la elaboración de los mapas y es una realidad que las fracciones de metros y de grados son difíciles de precisar en escala y frecuentemente el polígono "no cierra".

Para que el polígono "cierre", en la práctica existen procedimientos para realizar estas correcciones, y es mucho mejor hacer menos correcciones, por una parte, y por la otra se gana tiempo, esfuerzo y dinero colocando los teodolitos en menores estaciones para hacer el levantamiento topográfico.

Las restricciones del problema son debidas a observaciones deficientes realizadas con el teodolito, por causa de la vegetación circundante, colinas o depresiones u otros accidentes del terreno que impiden una buena observación visual. Ver Figura N° 4.

Vol. 1, Nº 2, 2001: 33-44

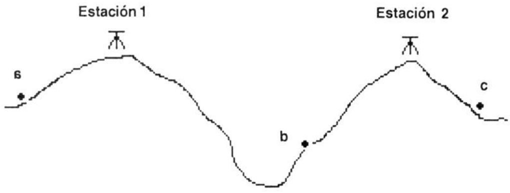

Figura N° 4. Restricciones visuales por accidentes del terreno.

En la Figura N° 4, se observa que desde la Estación 1 son visibles los puntos a y b, pero no el punto c.

Planteamiento del problema topográfico

Volviendo a la Fig. N° 3, los puntos i = 1, 2, 3..........18 representan estaciones de observación de teodolito, visibles entre sí. La subzonas j = I, II, III, ...XI son porciones del terreno bajo estudio, objeto de un levantamiento topográfico y son visibles en las adyacencias de los puntos i.

Es decir, por ejemplo, la subzona I puede ser observada completamente desde las estaciones 1 y 3. La subzona II puede ser observada desde las estaciones 2, 3 y 4. La subzona VII puede ser observada desde las estaciones 8,13 y 14. Y así sucesivamente.

Este problema, tal como está planteado, cuyo objetivo es el de minimizar el número de estaciones de teodolito y sujeto a las restricciones de observación de las subzonas del terreno, se ajusta perfectamente a un problema de Optimización o de Programación Matemática.

Modelo Matemático

Variables de decisión. Como se trata de minimizar el número de estaciones de teodolito, parece lógico definir las variables de decisión **Xj** como variables booleanas; es decir, que sólo pueden tomar los valores enteros 0 ó 1. El hecho de que Xj valga 0 significa que el teodolito no se coloca en la estación, mientras que cuando vale 1 significa que el teodolito sí se coloca en la estación.

Función Objetivo. De acuerdo con la definición de las variables de decisión booleanas, la función objetiva del problema es inmediata, ya que se trata de minimizar el número de estaciones de teodolito en concordancia con los razonamientos previos.

Expresado este objetivo en forma matemática simbólica, tendremos:

$$\text{Mín } Z = \sum_{J=1}^{18} Xj$$

Restricciones

Entre las restricciones debidas a la posibilidad de observación de las subzonas, debemos partir del principio que todas y cada una de las subzonas deben ser observadas o cubiertas por al menos un teodolito. Por ejemplo, la subzona I debe ser observada por al menos un teodolito. Matemáticamente esto se expresa así:

X1 + X3 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona I]

Esto es debido a que si X1 y X3 valen 0, la subzona I no sería observada. Por esta razón la suma de estas variables debe ser al menos 1. Igual razonamiento aplicamos al resto de las subzonas y tendremos el siguiente grupo de restricciones:

X2 + X3 + X4 + X7 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona II]

X5 + X6 + X7 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona III]

X1 + X2 + X8 + X9 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona IV]

X4 + X5 + X9 + X10 + X11 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona V]

X6 + X10 + X12 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona VI]

X8 + X13 + X14 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona VII]

X11 + X14 + X15 + X16 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona VIII]

X12 + X15 + X17 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona IX]

X13 + X16 + X18 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona X]

X17 + X18 = 1
[Debe haber al menos un teodolito para observar la subzona XI]

Finalmente, la última restricción es la debida al número tope de estaciones posibles, es decir, expresado matemáticamente:

$$\sum_{J=1}^{18} Xj = 18$$

Y, por supuesto Xj = 0,1.

Resumiendo, el modelo matemático de Programación Entera 0-1 o Booleana, quedará:

$$\text{Mín } Z = \sum_{J=1}^{18} Xj$$

Sujeto a las restricciones

X1 + X3 = 1
X2 + X3 + X4 + X7 = 1
X5 + X6 + X7 = 1
X1 + X2 + X8 + X9 = 1
X4 + X5 + X9 + X10 + X11 = 1
X6 + X10 + X12 = 1
X8 + X13 + X14 = 1
X11 + X14 + X15 + X16 = 1
X12 + X15 + X17 = 1
X13 + X16 + X18 = 1
X17 + X18 = 1

$$\sum_{J=1}^{18} Xj = 18$$

Xj = 0,1.

Resolución del modelo

Corrientemente, para resolver modelos de Programación Entera, se utiliza el algoritmo Simplex o de George Dantzig que conjuntamente con la inserción de restricciones de Ralph Gomory, se puede hallar la solución con una velocidad de convergencia más o menos aceptable. Se intentó resolver un modelo de 6 variables de decisión, por medio de esta vía y se encontró la solución de modo efectivo y confiable, pero cuando se aumenta el número de variables, la solución se hace impracticable. El modelo objeto de nuestro estudio consta de 18 variables de decisión, 12 variables de holgura normal y 11 variables de holgura artificial, para un total de 41 variables. Para aplicar el algoritmo Simplex se deberá trabajar con una matriz de 12 x 41, lo cual es prácticamente imposible.

Daba la impresión de que el problema de Programación Entera 0-1, necesitaba de otro tipo de algoritmo cuando crecía el número de variables.

Consultando la literatura de Métodos de Optimización, en las bibliotecas de la Universidad Metropolitana y del IVIC, se encontró, entre otros, el algoritmo de Branch and Bound, adecuado a problemas de Programación Entera pero no del tipo booleano 0-1. El hecho de no encontrar programas de computación o software sobre este algoritmo, condujo al desecho de esta posibilidad.

Se hicieron consultas en la Escuela de Ingeniería de Sistemas, particularmente con el Profesor José Hernández. Inicialmente no se consiguió ninguna información sobre software en Programación Entera 0-1. El Prof. Hernández propuso como tarea a un grupo de estudiantes de Ingeniería de Sistemas, la búsqueda del mencionado software, que al cabo de un par de meses fue encontrado.

Con respecto a este software, no sabemos qué algoritmo utiliza para la solución del problema de Programación Entera 0-1, puesto que la información está en un diskette de 3.5 pulg. Y constituye una caja negra, ya que es imposible enterarse de su contenido en cuanto al lenguaje de programación que utiliza ni tampoco su algoritmo.

Sin embargo, cuando se despliega el contenido del diskette en la pantalla, aparece el apellido Hillier, que puede corresponder al Prof. Frederick S. Hillier de Stanford University, y por asociación de ideas puede tratarse del algoritmo de Implicit Enumeration. Pero todo esto son sólo conjeturas.

Lo cierto es que resolviendo el modelo con este software, encontramos la solución de modo rápido, confiable y efectivo, puesto que hicimos la prueba con varios modelos con un número grande de variables y de restricciones.

Vol. 1, Nº 2, 2001: 33-44

La solución óptima encontrada es la siguiente:
$Z_{mínimo} = 6$

X3 = 1, X5 = 1, X8 = 1, X10 = 1, X16 = 1, X17 = 1.
Las variables restantes valen cero.

La Figura N° 5, nos indica el trazado de la poligonal óptima de 6 lados.

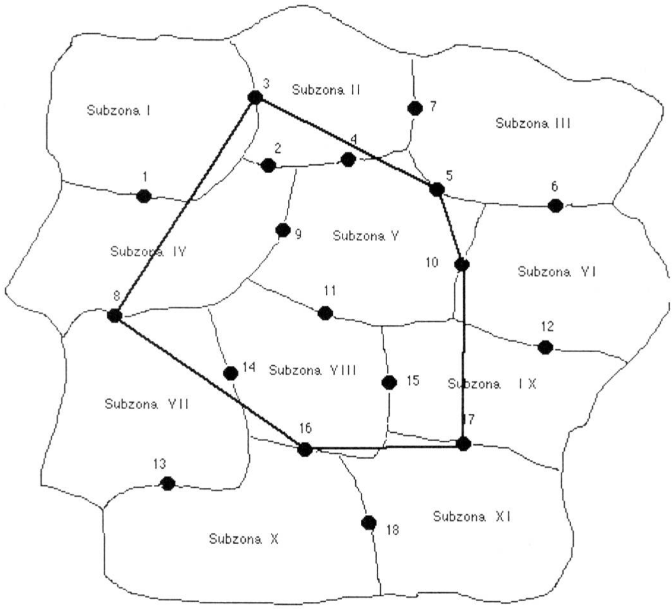

Figura N° 5. Trazado de la poligonal de 6 lados, que constituye el número mínimo posible para el levantamiento topográfico de las subzonas.

Conclusiones

Habiendo resuelto el problema con 18 variables, podemos completar el levantamiento topográfico de toda la zona, repitiendo la elaboración de los sucesivos modelos que cubran todas las subzonas restantes y así terminar con toda la región bajo estudio. Todo esto de modo óptimo, ya que siempre minimizaremos el número de estaciones de teodolito.

Recomendaciones

El modelo de Programación Entera 0-1, que acabamos de aplicar a la solución óptima de un problema de topografía, se puede aplicar también para encontrar la solución óptima de otro tipo de situaciones. Por ejemplo, el control de contrabando en las regiones limítrofes en donde las estaciones podrían ser los puestos de observación de la Guardia Fronteriza.

Otra aplicación podría ser de carácter militar. Las estaciones podrían constituir el asentamiento de baterías antiaéreas o terrestres que cubran las subzonas, que en caso de conflicto bélico podrían eliminar las fuerzas enemigas. En fin, las aplicaciones podrían ser numerosas, dependiendo del interés del analista.

Como última recomendación. Es necesario conseguir un software bien documentado en cuanto al algoritmo aplicado y a su programa con el lenguaje de programación utilizado.

Vol. 1, Nº 2, 2001: 33-44

Referencias bibliográficas

HALSEY, W. D. Colliers Encyclopedia. Crowell Collier and MacMillan, Inc. (1966).

GILLETT, B. Introduction to Operations Research: A Computer – Oriented Algorithmic Approach. McGraw Hill Book Co. (1976).

SMITH. A, Hinton. E & Lewis. R. Civil Engineering Systems: Analysis and Design. John Wiley & Sons. (1983).

SMITH. J. Introduction to Geodesy: The history & Concepts of Modern Geodesy. Wiley.(1997).

STARK. R & Nicholls. R. Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering Systems. McGraw Hill Book Co. (1972).