



Programación de ganancias robustas basada en la Teoría de Lyapunov para el control de sistemas no lineales con garantía de estabilidad

PEDRO TEPPA^{1, 2, 4}

JACQUES BERNUSSOU¹

GERMAIN GARCÍA^{1, 3}

¹ LAAS du CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche,
31077 Toulouse Cedex 4, France.

² Universidad Simón Bolívar,
Centro de Teoría Matemática de Sistemas,
Departamento de Procesos y Sistemas,

³ INSA, 135 Avenue de Rangueil,
31077 Toulouse Cedex 4, France

⁴ Universidad Metropolitana,
Escuela de Ingeniería Eléctrica

¹ pteppa@usb.ve

Resumen

En este artículo, la técnica de ganancia programada es empleada a fin de asegurar la transición de un sistema dinámico no lineal, desde un punto de operación inicial hasta un punto de operación final. El sistema no lineal es representado localmente, alrededor de cada punto de equilibrio, a través de una familia de sistemas lineales inciertos politópicos. Las no linealidades son aproximadas localmente en el interior de poliedros de inclusión, donde se efectúa la síntesis de una ley de control robusta que garantiza la estabilidad asintótica en el interior de una región elipsoidal máxima incluida en el poliedro. Repitiendo el procedimiento sobre una trayectoria estacionaria predefinida en el espacio de estado, que conecta los dos puntos de operación, será posible cubrir la trayectoria por una serie de elipsoides que asegurarán la estabilidad a lazo cerrado del sistema no lineal, así como ciertas especificaciones de desempeño a nivel local.

Palabras clave: Sistemas no lineales, programación de ganancias, incertidumbres politópicas, desigualdades lineales matriciales.



Abstract

This paper presents a systematic approach for nonlinear control design by using the gain scheduling technique to insure the transition of a nonlinear dynamical process from an actual operating condition to a desired one. The nonlinear system is represented in a neighborhood of the equilibrium points by a family of polytopic uncertain linear systems. The nonlinear equations of the system are imbedded in the interior of an inclusion polyhedron. A robust control law is built so as to insure asymptotic stability within a maximal ellipsoidal region contained in the interior of the polyhedron. Repeating the procedure on a pre-specified state trajectory connecting the operating conditions, we can cover such trajectory by a set of ellipsoids that guarantee closed loop stability of the nonlinear system while taking into account certain local control criteria.

Key words: Nonlinear systems, gain scheduling, polytopic uncertainties, linear matrix inequalities

Introducción

Asegurar la transición estable a lazo cerrado de un sistema dinámico no lineal entre dos puntos de operación, constituye un problema interesante dentro del control de sistemas no lineales. El empleo de un controlador de estructura fija para resolver tal problema no es, en términos generales, la mejor opción. Debe optarse por estrategias multi-modelos o de múltiples controladores. Dentro de las técnicas de resolución frecuentemente adoptadas en la industria, encontramos la técnica de programación de ganancias, mejor conocida por su denominación anglosajona *gain scheduling*, la misma plantea el control de un sistema no lineal, considerando diversas tareas lineales. Ahora bien, la técnica de programación de ganancias, en general, no garantiza la estabilidad a lazo cerrado. Con el objetivo de paliar este grave inconveniente, proponemos un algoritmo que garantiza la transición estable a lazo cerrado de un sistema dinámico no lineal, el cual suponemos pertenece a la clase de sistemas no lineales afines en la señal de control sometido a no linealidades suaves y continuas. Empleamos la técnica de programación de ganancias para conmutar dentro de un conjunto de con-



troladores lineales robustos sintetizados a partir de nociones de la estabilidad cuadrática y de herramientas de la programación convexa, en particular las desigualdades matriciales lineales (LMI). Inicialmente, las no linealidades del sistema dinámico son aproximadas localmente en el interior de una región poliedral, enseguida; es construida una ley de control lineal robusta que garantiza la estabilidad asintótica del sistema no lineal en una región elipsoidal máxima incluida dentro del poliedro de aproximación, todo esto alrededor de cada punto de equilibrio. Repitiendo el procedimiento sobre una trayectoria definida dentro de una variedad de equilibrio (*manifold*) del sistema no lineal, la cual conecta los dos puntos de operación, será posible cubrir tal trayectoria por una serie de elipsoides incluidos dentro de poliedros, que aseguran la estabilidad global del sistema no lineal a lazo cerrado. Hay que mencionar, igualmente, la posibilidad de garantizar condiciones de desempeño mínimas a nivel local, en términos de tiempo de respuesta, incorporando restricciones como: reubicación de polos en una región convexa, minimización de una norma del tipo H_2 o H_∞ .

El artículo es organizado de la manera siguiente: la sección II muestra ciertas nociones de base. La sección III es dedicada tanto al planteamiento del problema como a la formulación del algoritmo de transición. Encontramos en la sección IV los elementos de síntesis robusta a través de LMI, y finalmente en la sección V, un ejemplo numérico de la técnica desarrollada.

Nociones preliminares

El sistema no lineal considerado en nuestro trabajo pertenece a la clase de sistemas no lineales afines en la señal de control descritos $\forall t \geq 0$ por la relación

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(t))u(t) \quad (1)$$

No obstante, a fin de no recargar la notación, empleamos una escritura más general para el sistema no lineal. De esta forma, consideramos un sistema no lineal afín en la señal de control

$$\Sigma : \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2)$$

donde $x(t) \in X \subseteq \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, X es un conjunto abierto, $u(t) \in U \subseteq \mathfrak{R}^m$ es el vector de control, U denota el conjunto de todos los controles admisibles, de forma que $u(\cdot) \in U$ es una función medible. El espacio de operación del sistema Σ es definido a través del producto cartesiano $\Psi = X \times U$, está constituido del vector de operación $\psi = (x, u) \in \Psi$. La función no lineal f definida sobre Ψ tiene valores en X , la misma verifica una condición de Lipschitz en vecindades de los puntos de equilibrio de Ψ .

A. Programación de ganancias

Generalmente no es necesario trabajar en el espacio de operación del sistema (de dimensión elevada). En ese caso se introduce el espacio de programación de ganancias Z , constituido por la variable de programación de ganancias $z(t) \in Z \subseteq \mathfrak{R}^s$. El espacio Z es un conjunto compacto. En muchos casos existirá una función $s : \Psi \rightarrow Z$ que proyecta el vector de operación ψ sobre el espacio de menor dimensión Z , esto es $z = s(\psi)$, tal que $\dim(z) < \dim(\psi)$. Supongamos que existe una variedad de equilibrio (*manifold*) del sistema no lineal [1] parametrizada por la variable de programación de ganancias $z(t) \in Z$. Esto es, existen funciones continuas, $x^0 : Z \rightarrow X$ y $u^0 : Z \rightarrow U$, tales que $f(x^0(z), u^0(z)) = 0$ para todo $z(t) \in Z$. La variable de programación de ganancias puede ser función de los estados, entradas y señales exógenas. Aunque la variable de programación de ganancias es una función temporal, dentro de la técnica de programación de ganancias es interpretada como un parámetro de diseño. El sistema lineal que representa al sistema no lineal Σ alrededor de $(x^0(z), u^0(z))$ se escribe como:

$$\Sigma(z) : \dot{x}(t) = A(z)(x(t) - x^0(z)) + B(z)(u(t) - u^0(z)) \quad (3)$$



donde, por ejemplo:

$$A(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^0(z), u^0(z))} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x^0(z), u^0(z)) \quad (4)$$

Para cada z , esto es $z(t) \Big|_{t=z_j} = z_j$, el sistema no lineal Σ es representado localmente a través del sistema lineal invariante en el tiempo $\Sigma(z_j)$

$$\Sigma(z_j) : \dot{x}(t) = f_L(x(t), u(t)) = A(z_j) (x(t) - x_{eq}^{(j)}) + B(z_j) (u(t) - u_{eq}^{(j)}) \quad (5)$$

donde $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)}) = (x^0(z_j), u^0(z_j))$ y f_L designa la aproximación local de f (2). Apoyándonos en la existencia de la variedad de equilibrio del sistema no lineal y en la técnica de linealización, un controlador lineal invariante en el tiempo $C_L^{(j)}$ es diseñado para valores específicos de z_j . El controlador de programación de ganancias global C se implementa combinando los controladores lineales $C = \bigcup_j C_L^{(j)}$, empleando mediciones en tiempo real de la variable $z(t)$ para modificar los parámetros del controlador.

B. Herramientas geométricas

A continuación describimos los objetos matemáticos utilizados en este trabajo: los poliedros, que son empleados con el propósito de aproximar localmente las no linealidades del sistema dinámico no lineal alrededor de los diferentes puntos de equilibrio, y los elipsoides, que permiten estimar regiones de estabilidad asintótica en las vecindades de los puntos de equilibrio del sistema no lineal.

Definición 1. Un **poliedro** P se define como la intersección de una familia finita de semi-planos. Dado un conjunto de vectores columnas a_i y de escalares b_i , podremos escribir

$$P = \{x \in \mathfrak{R}^n : a_i^T x \leq b_i; i = 1, \dots, p\} \quad (6)$$

Definición 2. Un **elipsoide** E puede definirse a través de la expresión

$$E = \{x \in \mathfrak{R}^n : (x - x_c)^T S^{-1} (x - x_c) < 1, S = S^T > 0\} \quad (7)$$

donde x_c es el centro del elipsoide.

El siguiente problema de optimización muestra cómo se maximiza el volumen de un elipsoide E incluido en un poliedro P [2, 3].

$$\text{Maximizar } \text{Traza}(S) \text{ tal que: } \left\{ \begin{array}{l} S = S^T > 0 \\ (c_i = b_i - a_i^T x_c > 0) \ a_i^T S a_i - c_i^2 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Se trata de un problema clásico de optimización convexa bajo forma de LMI con criterio lineal. El mismo se empleará más adelante en la síntesis de leyes de control robusta.

C. Estabilidad cuadrática

Considere un sistema politópico descrito $\forall t \geq 0$ por las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in D_A \quad (9)$$

Con D_A un dominio de incertidumbre politópica definido como



$$A \in D_A = \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (10)$$

El sistema (9-10) es *cuadráticamente estable* si todas las trayectorias convergen hacia el estado de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. Una condición suficiente se verifica por la existencia de una función de Lyapunov cuadrática $V(\xi) = \xi^T P \xi$, $P > 0$ decreciente en la dirección de las trayectorias del sistema. Dado $d/dt(V(x)) = x^T (A^T P + PA)x$, una condición necesaria y suficiente de estabilidad cuadrática para (9-10) es

$$S = P^{-1} > 0, \quad SA_i^T + A_i S < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

La estabilidad cuadrática puede expresarse por intermedio de *elipsoides invariantes*. Considerando el elipsoide E centrado en x_c decimos que es *invariante*, o sea, constituye un *dominio de estabilidad y de invariabilidad positiva* [2, 4] para el sistema (9-10) si para toda trayectoria del sistema se satisface

$$x(t_0) \in E \Rightarrow x(t) \in E, \quad \forall t \geq t_0 \quad (12)$$

La condición (12) es asegurada si se determina una matriz S que verifica (11).

D. Aproximación local del sistema no lineal

En lo que sigue, mostramos que es posible aproximar las no linealidades del sistema Σ en el interior de una región poliedral. Denotemos la región poliedral asociada al j -ésimo punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$ por el poliedro $P^{(j)} = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : a_i^T x \leq b_i; i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, N \right\}$, donde N es el número

de controladores lineales obtenidos por la técnica de programación de ganancias.

Proponemos que para cualquier poliedro de aproximación dentro de la región de operación de Σ , será posible construir un conjunto de sistemas lineales asociados al j -ésimo punto de equilibrio

$$\left\{ \left(A_{i_A}^{(j)}, B_{i_B}^{(j)} \right); i_A = 1, \dots, N_A, i_B = 1, \dots, N_B, j = 1, \dots, N \right\} \forall \psi = (x, u) \in P^{(j)}$$

que satisfacen la condición de inclusión

$$f(x, u) \in \subset_0 \left\{ \begin{array}{l} A_{i_A}^{(j)}(x - x_{eq}^{(j)}) + B_{i_B}^{(j)}(u - u_{eq}^{(j)}) \\ i_A = 1, \dots, N_A, i_B = 1, \dots, N_B, j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \forall \psi = (x, u) \in P^{(j)} \quad (13)$$

donde \subset_0 designa la envolvente convexa. Verificando la condición (13), todas las trayectorias de estado del sistema Σ correspondientes a las entradas $u(t)$, tales que $\psi = (x, u) \in P^{(j)}$ son también trayectorias de la inclusión diferencial lineal (13) [2]. De esta forma

$$x(t) \in \subset_0 \left\{ A_{i_A}^{(j)}(x - x_{eq}^{(j)}) + B_{i_B}^{(j)}(u - u_{eq}^{(j)}) \mid i_A = 1, \dots, N_A, i_B = 1, \dots, N_B, j = 1, \dots, N \right\} \quad (14)$$

Esto es, la dinámica de (2) es capturada por la del sistema incierto (14), este último engendrado por todas las posibles combinaciones de un conjunto de sistemas lineales dados. Con el objetivo de determinar el poliedro de aproximación $P^{(j)}$, se define un dominio de validez a partir de un error de aproximación $\varepsilon \in \mathfrak{R}^n$ entre el sistema no lineal Σ y su aproximación lineal calculada en el j -ésimo punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$. El hecho de fijar un error $\varepsilon \in \mathfrak{R}^n$ induce un poliedro en el espacio de estado. La figura (1) ilustra el caso de una no linealidad dependiente de una variable.



Proposición 1. Dado un error de aproximación $\varepsilon \in \mathfrak{R}^n$ entre el sistema no lineal Σ (2) y su aproximación lineal calculada en el j -ésimo punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$, entonces existe un poliedro $P^{(j)} = \{x \in \mathfrak{R}^n : a_i^T x \leq b_i; i = 1, \dots, 2n\}$ que aproxima las no linealidades de Σ .

Haciendo $\delta^{(j)} \in \mathfrak{R} = \min \{ \delta_1^{(j)}, \dots, \delta_n^{(j)} \}$ y empleando la proposición (1) el poliedro $P^{(j)}$ será simétrico en relación al j -ésimo punto de equilibrio. Lo escribiremos como:

$$P^{(j)} = \{x \in \mathfrak{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, 2n\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x_n \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta^{(j)} + x_{1eq}^{(j)} \\ \vdots \\ \delta^{(j)} + x_{n eq}^{(j)} \\ \delta^{(j)} - x_{1eq}^{(j)} \\ \vdots \\ \delta^{(j)} - x_{n eq}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

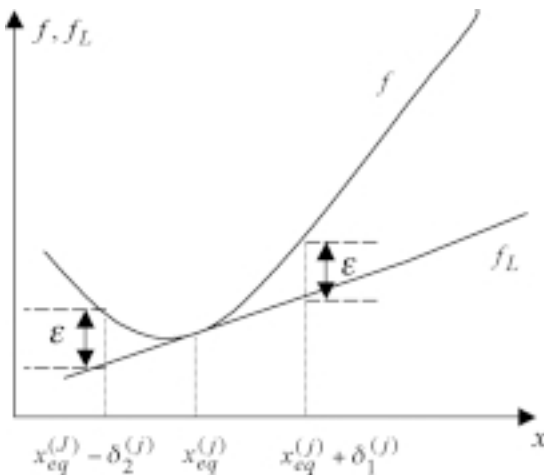


FIGURA 1
 APROXIMACIÓN LOCAL
 DEL SISTEMA NO LINEAL.

Comentario 1

i. Si existen componentes lineales en la función vectorial no lineal f (2), debe escogerse $\varepsilon_i = 0$.

ii. Se ha seleccionado un modelo afín en la señal de control con el objeto de evitar la consideración de un problema de control con restricciones en el control. Sin embargo, el caso no afín puede ser igualmente abordado en el contexto de un tratamiento LMI. El problema viene del hecho de que la traducción de restricciones de cota sobre las señales de control, en términos de LMI conlleva un grado de suficiencia bastante importante y puede conducir a poliedros de aproximación muy pequeños, incrementando así la complejidad del algoritmo de transición.

Considerando todas las combinaciones posibles engendradas por los valores extremos tomados por las no linealidades de Σ en el interior de $P^{(j)}$, podemos construir un sistema lineal incierto politópico $\Sigma_I^{(j)}$ tal que

$$\Sigma_I^{(j)} : \dot{x}(t) = A_i^{(j)} (x(t) - x_{eq}^{(j)}) + B_i^{(j)} (u(t) - u_{eq}^{(j)}) \quad (16)$$

donde las matrices $\{A_i^{(j)}, B_i^{(j)}\}$ pertenecen a dominios de incertidumbre politópicos $\{D_A^{(j)}, D_B^{(j)}\}$ tales que

$$D_A^{(j)} = \left\{ A_i^{(j)} = A(z_j) \Big|_{x_i^{(j)} \pm \delta^{(j)}} : \sum_{i=1}^{N_A} \alpha_i A_i^{(j)}, \sum_{i=1}^{N_A} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (17)$$

$$D_B^{(j)} = \left\{ B_i^{(j)} = B(z_j) \Big|_{x_i^{(j)} \pm \delta^{(j)}} : \sum_{i=1}^{N_B} \mu_i B_i^{(j)}, \sum_{i=1}^{N_B} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \right\} \quad (18)$$



Algoritmo de transición

A. Formulación del problema

Problema 1. Determinar una ley de control global admisible $u(\cdot) \in U \subseteq \mathfrak{R}^m$ que garantice la transición de un sistema dinámico no lineal Σ (2) desde un punto de operación inicial $\psi_0 = (x_0, u_0) \in \Psi$ hasta un punto de operación final $\psi_f = (x_f, u_f) \in \Psi$, asegurando la estabilidad a lazo cerrado de Σ y considerando ciertas especificaciones de desempeño a nivel local (reubicación de polos, minimización de una norma del tipo H_2 o H_∞ , etc.).

B. Hipótesis del algoritmo de transición

i. *Existencia de una variedad de equilibrio del sistema no lineal.* Es una hipótesis clásica en el contexto de la técnica de programación de ganancias. Se supone la existencia de funciones continuas $x^0: Z \rightarrow X$, $u^0: Z \rightarrow U$, tales que $\forall z(t) \in Z, f(x^0(z), u^0(z)) = 0$. Esto es, existe una familia continua de puntos de equilibrio parametrizada por la variable de conmutación z , definida por $\Pi = \{ \psi = (x, u) \in \Psi : f(x^0(z), u^0(z)) = 0, \forall z \in Z \}$.

ii. *Existencia dentro de la variedad de equilibrio del sistema no lineal de una trayectoria que conecta los puntos de inicio y llegada.* Existe una trayectoria dependiente de la variable de conmutación z , denotada por C_z en Π que conecta x_0 y x_f . Esto significa que será posible definir una nueva parametrización de la trayectoria C_z en Π , ahora en función de un escalar. Esto es $C_\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, de forma que cuando $C_\rho|_{\rho=0}$ nos encontramos sobre x_0 y cuando $C_\rho|_{\rho=1}$ se está sobre x_f . El paso de C_z hacia $C_\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, no plantea dificultades ya que siempre es posible definir una reparametrización σ de la variable de conmutación, a través de una función compuesta. En ese caso, la variable de secuenciamiento definida por $z: I_1 = [t_0, t_f] \in \mathfrak{R}^+ \rightarrow Z \subseteq \mathfrak{R}^s$, puede llevarse por la función com-

puesta $\sigma : z \circ h : I = [0,1] \rightarrow Z \subseteq \mathfrak{R}^s$, hacia un dominio de definición entre 0 y 1. Esto facilita los problemas de optimización que se plantearán posteriormente. Como consecuencia de la reparametrización establecida, será posible expresar el conjunto de puntos de equilibrio mediante:

$$\Pi = \left\{ \psi = (x, u) \in \Psi : f(x^0(\rho), u^0(\rho)) = 0, 0 \leq \rho \leq 1, \psi_0 = (x^0(0), u^0(0)) \psi_f = (x^0(1), u^0(1)) \right\}$$

iii. *Estabilizabilidad.* Para todos los miembros de la familia de sistemas lineales obtenidos a partir de la linealización de las ecuaciones no lineales del sistema Σ (2) a lo largo de la trayectoria $C_z(C_\rho)$ en Π , se verifica que el par $(A(z_j), B(z_j))$ $j = 1, \dots, N$ es estabilizable.

C. Algoritmo de transición

Nos interesamos particularmente en la determinación de un control conmutado que asegure una transición conveniente entre un punto de operación inicial y un punto de operación final dados. A fin de garantizar igualmente una transición estable, nos proponemos el cómputo de una secuencia de puntos de equilibrio intermedio de manera que todo punto intermedio $i + 1$ se encuentre en la región de atracción del punto i . El algoritmo de transición es:

1. El punto de equilibrio inicial se fija en $(x_{eq}^{(1)} \ u_{eq}^{(1)}) = (x_f \ u_f)$. Fijar también $j = 1, \rho^{(j)} = 1$ (La ley de control se calcula fuera de línea).
2. Fijar el error de aproximación $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ tal que $|f_i - f_{Li}| \leq \varepsilon_i; \forall i = 1, \dots, n$.
3. Determinar el j -ésimo poliedro $P^{(j)}$ (15) inducido alrededor del punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)} \ u_{eq}^{(j)})$.



4. $\forall x(t) \in P^{(j)}$ representar el sistema Σ (2) a través del sistema lineal incierto politópico $\Sigma_I^{(j)}$ (16-18).
5. Construir una ley de control robusta por realimentación de estado

$$u(t)^{(j)} = K^{(j)} (x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} \quad (19)$$

tal que maximice el volumen del elipsoide

$$E = \{x \in \mathfrak{R}^n : (x - x_c)^T S^{-1} (x - x_c) \leq 1, S = S^T > 0\} \quad (20)$$

incluido dentro del poliedro $P^{(j)}$, ésto plantea la resolución del problema de optimización

$$\text{maximizar volumen } (E^{(j)}): \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} E^{(j)} \subseteq P^{(j)} \\ \text{Restricciones de estabilidad } \forall j \\ \text{Restricciones de desempeño} \end{array} \right. \quad (21)$$

6. Calcular el punto de equilibrio siguiente $(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)})$ mediante la resolución del problema de optimización

$$\text{minimizar } \rho: \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} x^0(\rho) \in E^{(j)} \\ 0 < \rho < 1 \end{array} \right. \quad \forall j \quad (22)$$

El objetivo es encontrar el punto de manera que $x_{eq}^{(j+1)} \in \text{interior}(E^{(j)})$.

7. Si el punto inicial $x_0 \in E^{(j)}$ entonces $(x_{eq}^{(j+1)}, u_{eq}^{(j+1)}) = (x_0, u_0)$ y regrese al paso 3.
8. Si $x_{eq}^{(j+1)} = x_0$, parar, si no regresar al paso 3.

Comentario 2

i. La ley de control global establece una jerarquía (la prioridad se le da al índice menor); ésta es

$$u_{Global}(x) = \begin{cases} u(t)^{(N)} = K^{(N)}(x(t) - x_{eq}^{(N)}) + u_{eq}^{(N)}, & x \in E^{(N)} - \bigcup_{j=1}^{j=N-1} E^{(j)} \\ \vdots \\ u(t)^{(2)} = K^{(2)}(x(t) - x_{eq}^{(2)}) + u_{eq}^{(2)}, & x \in E^{(2)} - E^{(1)} \\ u(t)^{(1)} = K^{(1)}(x(t) - x_{eq}^{(1)}) + u_{eq}^{(1)}, & x \in E^{(1)} \end{cases}$$

donde N representa el número total de controladores.

ii. El problema de optimización planteado en la ecuación (22) puede resolverse por dicotomía.

D. Estudio de la transición ($\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_f$)

En lo que sigue, tratamos el problema de transición entre dos puntos de operación del sistema dinámico no lineal Σ . En ese contexto, denotamos una solución de Σ (trayectoria) por $s(t, x(t_0), u)$ y la trayectoria que tiende hacia x_{eq} a través de $s(t, x(t_0), u) \rightarrow x_{eq}$.

Lema 1. Considere una vecindad $\Gamma \in \mathfrak{R}^n$ del punto de equilibrio x_{eq} . Si la trayectoria de estado es tal que $s(t, x(t_0), u) \rightarrow x_{eq}$, entonces $s(t_1, x(t_0), u) \in \Gamma$, para un instante de tiempo $t_1 > t_0 \in \mathfrak{R}$.

A continuación, mostramos que la ley de control global $u_{Global}(x)$, suministrada por el algoritmo, garantiza la transición de Σ , desde x_0 hasta x_f .



Proposición 2. Si el punto inicial pertenece al N -ésimo elipsoide centrado en $x_{eq}^{(N)}$ (la ley de control se construye fuera de línea), denotado como $x(t_0) = x_0 \in E^{(N)}(x_{eq}^{(N)})$ entonces la trayectoria $s(t, x(t_0) = x_0, u_{Global}(x)) \rightarrow x_f$, para una ley de control global $u_{Global}(x)$ determinada por el algoritmo de transición.

Prueba. Sin pérdida de generalidad con el objeto de no recargar la notación, fijamos el número de controladores en $N = 3$. Si la condición inicial es tal que $x_0 \in E^{(3)}(x_{eq}^{(3)})$ y $x_0 \notin \{E^{(2)}(x_{eq}^{(2)}), E^{(1)}(x_{eq}^{(1)})\}$ entonces el algoritmo activa la señal de control $u(t)^{(3)} = K^{(3)}(x(t) - x_{eq}^{(3)}) + u_{eq}^{(3)}$, y según el lema 1 $s(t, x_0, u(t)^{(3)}) \rightarrow x_{eq}^{(3)}$, ya que como $x_0 \notin \{E^{(2)}(x_{eq}^{(2)}), E^{(1)}(x_{eq}^{(1)})\}$, no hay convergencia ni a $x_{eq}^{(2)}$ como tampoco a $x_{eq}^{(1)}$. Entonces, siempre es posible determinar un instante $t_1 > t_0 \in \mathfrak{R}$ y una señal de control, $u(t)^{(2)} = K^{(2)}(x(t) - x_{eq}^{(2)}) + u_{eq}^{(2)}$ tales que $s(t_1, x_0, u(t)^{(3)}) = x(t_1) \in E^{(2)}(x_{eq}^{(2)})$ y la trayectoria $s(t_1, x(t_1), u(t)^{(2)}) \rightarrow x_{eq}^{(2)}$. Aplicando un razonamiento idéntico, podremos encontrar un tiempo $t_2 > t_1 \in \mathfrak{R}$ y un control $u(t)^{(1)} = K^{(1)}(x(t) - x_{eq}^{(1)}) + u_{eq}^{(1)}$ tales que $s(t_2, x(t_1), u(t)^{(2)}) = x(t_2) \in E^{(1)}(x_{eq}^{(1)} = x_f)$, y $s(t_2, x(t_2), u(t)^{(1)}) \rightarrow x_{eq}^{(1)} = x_f$. De esta forma, dados los puntos de operación x_0 y x_f el algoritmo propuesto garantiza la transición $x_0 \rightarrow x_f$.

Síntesis robusta

En lo que sigue, nos concentraremos en leyes de control del tipo (19). La ley de control que coloca los polos a lazo cerrado del sistema politópico $\Sigma_I^{(j)}$ (16-18) en la región convexa $R_c^{(j)}(\alpha_c, \rho_c, \theta_c)$ (figura 2), maximizando adicionalmente el volumen del elipsoide $E^{(j)}$ (20) incluido en el poliedro $P^{(j)}$ (15) es determinada por el siguiente teorema, el cual, integra a su vez los resultados de [5] y los de la sección II.

Teorema 1. Sea la matriz $S_j^0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva y la matriz $R_j^0 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ soluciones del problema de optimización

Maximizar Traza (S_j)

S_j, R_j

$$S_j = S_j^T > 0$$

$$(c_i = b_i - a_i^T x_c > 0), \quad a_i^T S_j a_i - c_i^2 \leq 0$$

$$A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T} + 2\alpha S_j < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\rho S_j & * \\ A_{i_A}^{(j)} S_j + B_{i_B}^{(j)} R_j & -\rho S_j \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T}) & * \\ \sin\theta(S_j A_{i_A}^{(j)T} - A_{i_A}^{(j)} S_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T} - B_{i_B}^{(j)} R_j) \cdots \\ \cdots \cos\theta(A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T}) \end{bmatrix} < 0$$

Entonces, el dominio de estabilidad y de invarianza positiva (20) es el elipsoide de volumen máximo incluido en el poliedro $P^{(j)}$ (15), y la ley de control por realimentación de estado para el j -ésimo punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$ del sistema no lineal Σ

$$u(t)^{(j)} = K^{(j)}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} = R_j^0 (S_j^0)^{-1} (x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)}$$

coloca los polos del sistema $\Sigma_I^{(j)}$ (16-18) en la región $R_c^{(j)}(\alpha_c, \rho_c, \theta_c)$; $j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, 2n, i_A = 1, \dots, N_A, i_B = 1, \dots, N_B$.

De igual forma, es posible incluir restricciones de desempeño del tipo minimización de una norma H_2 o H_∞ . Por ejemplo, en el caso de una



restricción H_∞ , consideramos el sistema lineal incierto politópico descrito $\forall t \geq 0$ por las ecuaciones:

$$\Sigma_I^{(j)} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i^{(j)}x(t) + B_1w(t) + B_i^{(j)}u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{12}u(t) \end{cases} \quad (23)$$

$$A_i^{(j)} \in D_A^{(j)}, B_i^{(j)} \in D_B^{(j)}$$

donde $w \in \mathfrak{R}^l$ es el vector de perturbación y $z \in \mathfrak{R}^p$ es la salida controlada. Las matrices $\{A_i^{(j)}, B_i^{(j)}\}$ pertenecen a dominios politópicos $\{D_A^{(j)}, D_B^{(j)}\}$ (17-18). Así tenemos:

Teorema 2. Sea la matriz $S_j^0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva y la matriz $R_j^0 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ soluciones del problema de optimización

Maximizar Trazo (S_j)
 S_j, R_j

$$S_j = S_j^T > 0$$

$$(c_i = b_i - a_i^T x_c > 0), \quad a_i^T S_j a_i - c_i^2 \leq 0$$

$$A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T} + 2\alpha S_j < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\rho S_j & * \\ A_{i_A}^{(j)} S_j + B_{i_B}^{(j)} R_j & -\rho S_j \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T}) & * \\ \sin\theta(S_j A_{i_A}^{(j)T} - A_{i_A}^{(j)} S_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T} - B_{i_B}^{(j)} R_j) \cdots \\ \cdots \cos\theta(A_{i_A}^{(j)} S_j + S_j A_{i_A}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T}) \end{bmatrix} < 0$$



$$\begin{bmatrix} S_j A_{i_A}^{(j)T} + A_{i_A}^{(j)} S_j + R_j^T B_{i_B}^{(j)T} + B_{i_B}^{(j)} R_j & B_1 & S_j C_1^T + R_j^T D_{12} \\ & B_1^T & -\gamma I & 0 \\ & C_1 S_j + D_{12} R_j & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Entonces, el dominio de estabilidad y de invarianza positiva (20) es el elipsoide de volumen máximo incluido en el poliedro $P^{(j)}$ (15), y la ley de control por realimentación de estado para el j -ésimo punto de equilibrio $(x_{eq}^{(j)}, u_{eq}^{(j)})$ del sistema no lineal Σ

$$u(t)^{(j)} = K^{(j)}(x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)} = R_j^0 (S_j^0)^{-1} (x(t) - x_{eq}^{(j)}) + u_{eq}^{(j)}$$

coloca los polos del sistema $\Sigma_I^{(j)}$ (16-18) en la región $R_c^{(j)}(\alpha_c, \rho_c, \theta_c)$, y su norma H_∞ es inferior a γ ; $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, 2n$, $i_A = 1, \dots, N_A$, $i_B = 1, \dots, N_B$.

La idea de maximizar los elipsoides, regiones locales de atracción de los puntos de equilibrio intermedio, es por supuesto natural para la obtención de un número, así reducido como posible, de conmutaciones para una transición $x_0 \rightarrow x_f$ dada. La definición del problema de síntesis, planteada en los teoremas (1) y (2) tiene por objeto asegurar un desempeño local en términos de tiempo de respuesta y por consiguiente, alcanzar un desempeño global satisfactorio. El punto es particularmente arduo para el método preconizado y está igualmente vinculado a la cantidad y localización de los puntos de equilibrio intermedios. Dentro de las ventajas de la técnica desarrollada, es posible resaltar su carácter sistemático, ya que, una vez que un recubrimiento entre una condición inicial y una condición final es hallado, el secuenciamiento propuesto asegura una transición estable.

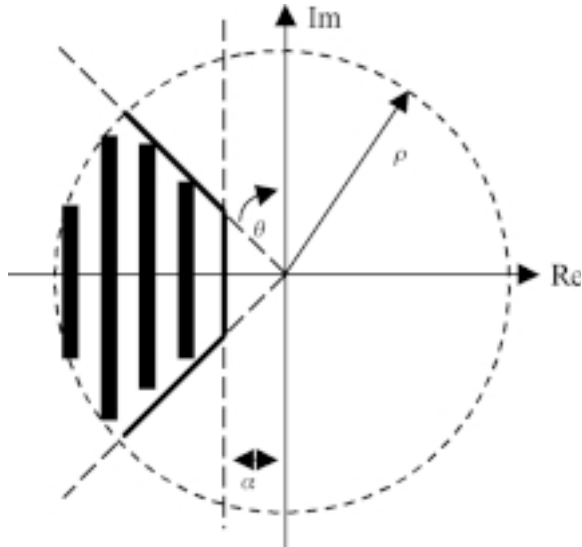


FIGURA 2
 REGIÓN $R_c^{(j)}(\alpha_c, \rho_c, \theta_c)$

Ejemplo numérico

En lo que sigue, es considerado un sistema de vibración mecánico [6]. La representación de estado del sistema $\forall t \geq 0$ es

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - [(x_1(t))^2 - 1]x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad (24)$$

El vector de operación es $\psi = [x_1, x_2, u]^T$ y haciendo $f(x^0, u^0) = 0$ resulta

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ u &= x_1 \end{aligned} \quad (25)$$

Obteniéndose la familia de puntos de equilibrio

$$\Pi = \{ \psi = [x_1, x_2, u]^T \in \Psi: x_2, u \text{ satisfacen (25)} \forall x_1 \} \quad (26)$$

La aplicabilidad del algoritmo de transición sobre el sistema mecánico, es considerada a través de la implantación de una realimentación de las variables de estado para la transición $[x_1, x_2]: [-0.5, 0] \rightarrow [0.5, 0]$. No obstante, en el momento de la simulación se escoge la condición inicial igual a $[x_1, x_2]: [-1, 0.4]$, siendo ésta diferente al punto de equilibrio inicial seleccionado para construir la ley de control global mediante el algoritmo de transición. La figura 3 muestra la convergencia de la trayectoria de estado al interior de los elipsoides de estabilidad, y éstos a su vez, incluidos en los poliedros de aproximación. De igual forma puede apreciarse la robustez del algoritmo en cuanto a la elección de la condición inicial.

Conclusión

Se ha obtenido un procedimiento sistemático que garantiza la transición estable a lazo cerrado entre dos puntos de operación de un proceso no lineal. A ese fin se ha empleado la técnica de ganancia programada para conmutar, dentro de un conjunto de controladores lineales robustos, sintetizados a partir de herramientas de la programación convexa, las desigualdades matriciales lineales. Puede modularse el número de puntos de equilibrio intermedios, modificando la talla del poliedro. Es posible igualmente adaptar la talla del poliedro, en función de la curvatura de las no linealidades existentes. El desempeño global es, por supuesto, función de todos esos parámetros y de la selección de condiciones de desempeño local para la síntesis de las leyes de control secuenciadas.

Actualmente se trabaja en la extensión del método a problemas más complejos, como la realimentación de la salida, el seguimiento robusto de



una trayectoria deseada y la reducción de las discontinuidades de la señal de control a través de técnicas LPV o Quasi LPV [7].

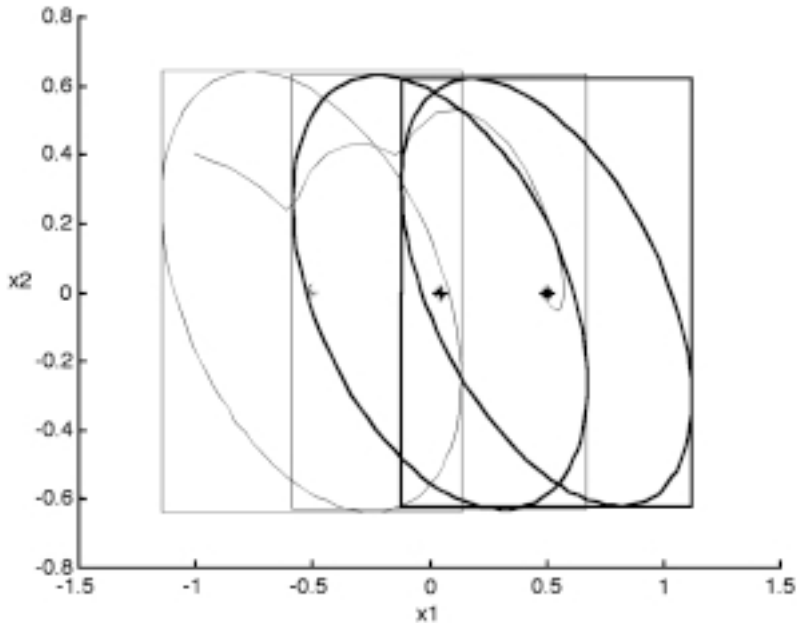


FIGURA 3
TRAYECTORIA DE ESTADO PARA UNA CONDICIÓN INICIAL IGUAL A
 $[x_1, x_2]: [-1, 0.4]$.

Agradecimientos

Los autores reconocen el apoyo financiero del *Programme de Coopération de Post-Graduation: Optimisation des Procédés* en Francia, y del Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT) en Venezuela.



Bibliografía

- BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E. et BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Vol.15.
- CHEN, C. et CHANG, M. (1998). "Optimal design of fuzzy sliding-mode control: A comparative study". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 93, pp. 37-48.
- CHILALI, M. et GAHINET, P. (1995). " H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, N° 3, pp. 358-367.
- COURTIES, C. (1999). *Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables*. France: Thèse de doctorat, Rapport LAAS-CNRS N° 99552, Institut National des Sciences Appliquées. Toulouse.
- RUGH, W. et SHAMMA, J. (2000). "Research on gain scheduling". *Automatica*, Vol. 36, pp. 1.401-1.425.
- TEPPA, P. (2003). *Commande par séquençement de gains robustes pour systèmes non lineaires*. Toulouse, France: Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.
- VANANTWERP, J. et BRAATZ, R. (2000). "A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities," *Journal of Process Control*, Vol. 10, pp. 363-385.