Anillos que son suma de ideales

Rings which are sums of ideals

Ávila Jesús[I] y Lazzarin João[II]

Resumen. En este trabajo consideramos anillos que son suma de ideales. Estudiamos la relación entre el anillo y los ideales que forman esta suma. Algunas propiedades de los radicales, noetherianidad, artinianidad y von Neumann regularidad se transfieren del anillo a los sumandos y viceversa. Finalmente, presentamos una aplicación de estos resultados a las acciones parciales de grupos sobre anillos.

Palabras clave: Ideal, suma de ideales, radical hereditario, condiciones de cadena, acción parcial.

Abstract. In this paper we consider a ring T which is a sum of ideals. We study some algebraic properties that are transferred from T to each ideal and viceversa. Finally, we apply the results to the case of partial actions of groups on rings.

Key words: Ideal, artinian ring, neotherian ring, hereditary radical, partial action.

Clasificación de materias (MSC2000): 16P20, 16P40, 16P60, 16W20.

1. INTRODUCCIÓN

Existen varios ejemplos de anillos que son suma de ideales, dentro de estos el producto directo de anillos. Las propiedades referentes al anillo en relación con aquellas de los ideales, y viceversa, resulta ser un problema interesante por sí mismo. El interés en estas cuestiones nació en el estudio de las propiedades de la

[I]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima (Ibagué-Colombia). Miembro del Grupo de Matemáticas del Tolima (Grupo-MaT). Correo electrónico: javila@ut.edu.co

[II]Departamento de Matematica, Universidade Federal de Santa Maria (Santa Maria-Brasil). Correo electrónico: lazzarin@smail.ufsm.br

envolvente de una acción parcial de un grupo sobre un anillo (Dokuchaev & Exel, 2005; Ferrero & Lazzarin, 2008).

En la Sección 2 estudiamos la existencia de unidad del anillo en mención, pues es bien sabido que anillos con unidad tienen características especiales. En la Sección 3 estudiamos la transferencia de la noetherianidad y la artinianidad del anillo a los sumandos y viceversa; así como la von Neumann regularidad y algunas propiedades radicales (semisimple, semiprimo). Finalmente, en la Sección 4 presentamos una aplicación de los resultados obtenidos, a las acciones parciales de grupos sobre anillos. Recordamos que algunos de los resultados presentados aquí han sido usados por Ferrero y Lazzarin (2008) y por Ávila, Ferrero y Lazzarin (2010) para resolver cuestiones relativas a anillos fijos parciales y temas relacionados.

Sea L un conjunto de índices, T un anillo (posiblemente sin unidad) y $\{A_i\}_{i\in L}$ una familia de ideales de T, donde cada A_i tiene unidad 1_i, tales que $T = \sum_{i\in L} A_i$. Nuestro objetivo será estudiar algunas propiedades que pueden transferirse de los A_i para T y viceversa.

Para $T = \sum_{i\in L} A_i$, usaremos la expresión "L es finito" para indicar que existen $n > 0$ e índices $i_1, i_2, ..., i_n \in L$ tales que $T = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}$. Cuando no haya lugar a confusión, simplemente escribiremos $L = \{1, 2, ..., n\}$ y $T = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

2. UNA UNIDAD PARA T

Lema 2.1. *Sea el anillo* $T = \sum\limits_{i\in L} A_i$ *donde cada ideal* A_i *tiene unidad* 1_i*. Entonces,*

1. *Para* $i \in L$, $1_i \in C(T)$ *(el centro de* T*) y* $1_i T = T 1_i = A_i$.
2. T *tiene unidad* $\Leftrightarrow$ L *es finito. En este caso, existe* $n > 0$*, tal que* $L = \{1, 2, ..., n\}$ *y* $T = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$*. Además, la unidad* 1_T *de* T *está dada por:*

$$1_T = \sum_{1\leq l\leq n} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_l} (-1)^{l+1} 1_{i_1} 1_{i_2} \ldots 1_{i_{l-1}} 1_{i_l}. \tag{2.1}$$

Este elemento puede expresarse también como una suma de idempotentes ortogonales centrales de T*:*

$$1_T = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \tag{2.2}$$

donde $e_1 = 1_1, e_j = (1_T - 1_1)(1_T - 1_2)\cdots(1_T - 1_{j-1})1_j$ *para* $2 \leq j \leq n$.

Demostración. 1. Para $t \in T$, tenemos $t1_i \in TA_i \subseteq A_i$ y $1_i t \in A_i T \subseteq A_i$, así $t1_i = 1_i (t1_i) = (1_i t) 1_i = 1_i t$, por otra parte $A_i = 1_i A_i \subseteq 1_i T \subseteq A_i T \subseteq A_i$.

2. Si T tiene unidad 1_T, entonces existen $n > 0$ y $i_1, i_2, ..., i_n \in L$ tales que $1_T = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$ para ciertos $a_{i_k} \in A_{i_k}$, $k = 1, 2, ..., n$. Es fácil concluir que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$.

Recíprocamente, supongamos que L es finito. Haremos inducción sobre n. Primero observamos que la suma $\sum\limits_{i=1}^{j} A_i$ es un ideal de T para todo $j = 1, \ldots, n$. El caso $n = 1$ es trivial y si el lema es cierto para $n-1$, entonces $1_{T_{n-1}} = \sum\limits_{1 \leq l \leq n-1} \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_l < n} (-1)^{l+1} 1_{i_1} \ldots 1_{i_{l-1}} 1_{i_l}$ es una unidad de $T_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i$. Ya que todo elemento de $T = T_{n-1} + A_n$ es de la forma $a + b$, donde $a \in T_{n-1}$ y $b \in A_n$, fácilmente obtenemos $(1_n + 1_{T_{n-1}} - 1_n 1_{T_{n-1}})(a + b) = a + b$. Queda por demostrar que 1_T dado por (2.1) satisface $1_n + 1_{T_{n-1}} - 1_n 1_{T_{n-1}} = 1_T$. Observando que $1_T - 1_{T_{n-1}}$ tiene todos los términos en que 1_n no se cancela, entonces $1_T - 1_{T_{n-1}} = 1_n - 1_{T_{n-1}} 1_n$ que es exactamente lo que necesitábamos.

Finalmente, veamos que $1_T = e_1 + \cdots + e_n$ es la unidad de T. Observemos que $e_i e_j = (1_T - 1_1)...(1_T - 1_{i-1})1_i(1_T - 1_1)...(1_T - 1_{j-1})1_j$,. Así, $e_i^2 = (1_T - 1_1)^2(1_T - 1_2)^2 \ldots (1_T - 1_{i-1})^2 1_i^2 = e_i$; y para $i \neq j$, con $i < j$, tenemos 1_i factor de e_i, $(1_T - 1_i)$ factor de e_j y $e_i(1_T - 1_i) = 0$. Por lo tanto $e_i e_j = 0$. $\square$

Ejemplo 2.2. 1. Sea $T = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = A_1 + A_2$ donde $A_1 = \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}$ y $A_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$. Observamos que $1_1 = (1, 0, 1)$ y $1_2 = (1, 1, 0)$, así $1_T = (1, 1, 1) = 1_1 + 1_2 - 1_1, 1_2$.

2. $T = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ donde $A_i = \mathbb{Z}$ para todo i, es un anillo sin unidad, pero cada ideal formado por finitos sumandos tiene una unidad, llamada unidad local de T. Así, por ejemplo, para $B = A_1 + A_4 + A_5$ tenemos que $1_B = (0, 1, 0, 1, 1, 0, ...)$ es una unidad local de T.

Observación 2.3. *Sea $T = \sum_{i \in L} A_i$, donde cada ideal A_i tiene unidad 1_i. Entonces, para $n > 0$ y $j_1, j_2, ..., j_n \in L$, el ideal $T_{(j_1, j_2, ..., j_n)} := \sum_{k=1}^{n} A_{j_k}$ es un anillo con unidad, la cual puede ser expresada por*

$$1_{T_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)}} = \sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{j_{i_1} < j_{i_2} < \ldots < j_{i_l}} (-1)^{l+1} 1_{j_{i_1}} 1_{j_{i_2}} \ldots 1_{j_{i_l}}, \tag{2.3}$$

o por:

$$1_{T_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)}} = \sum_{k=1}^{n} e_k, \tag{2.4}$$

donde $e_1 = 1_{i_1}$ *y* $e_k = (1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{j_1})(1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{j_2}) \cdots (1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{i_{k-l}})1_{i_k}$ *para* $2 \leq k \leq n$, *son idempotentes ortogonales centrales de* T. *La demostración de tales hechos es análoga a la del lema anterior.*

Lema 2.4. *Sea* $T = \sum_{i \in L} A_i$, *donde cada* A_i *tiene unidad* 1_i. *Entonces, para cada* $i \in L$, *tenemos:*

1. *Si* A *es un ideal izquierdo de* T, *entonces* $A1_i$ *es un ideal izquierdo de* A_i.
2. *Si* B *es un ideal izquierdo de* A_i, *entonces* B *es un ideal izquierdo de* T.
3. *Si* A *es un ideal izquierdo de* T, *entonces* $A1_i = A \cap A_i$.
4. *Si* A, B *son ideales izquierdos de* T, *tales que* $A1_i = B1_i$ *para todo* $i \in L$, *entonces* $A = B$. *Particularmente, si* $A1_i = 0$ *para todo* $i \in L$, *entonces* $A = 0$.

Lo mismo vale para ideales derechos ó ideales bilaterales.

Demostración. 1. $A1_i \subseteq T1_i \subseteq TA_i \subseteq A_i$ y $A1_iA_i \subseteq AA_i1_i \subseteq AT1_i \subseteq A1_i$.

2. Sea B un ideal izquierdo de A_i. Entonces, por el Lema 2.1, $BT = (B1_i)\,T = B\,(1_iT) = BA_i \subseteq B$.

3. $A1_i \subseteq AA_i \subseteq A \cap A_i = (A \cap A_i)\,1_i \subseteq A1_i$.

4. Sea $a \in A$. Como $A \subseteq T$, existe $n > 0$, tal que $a = \sum_{j=1}^{n} a_{j_k}$, para ciertos $a_{j_k} \in A_{j_k}$, $k = 1, ..., n$. Considerando $1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} = \sum_{k=1}^{n} e_k$, como en (2.4), tenemos que $a = a1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} = ae_1 + ae_2 + \cdots + ae_n$. Como $ae_k \in A1_{i_k} = B1_{i_k}$ para todo k, entonces $a \in B$. Del mismo modo se prueba que todo elemento de B es también elemento de A. □

3. TRANSFIRIENDO PROPIEDADES

En lo que sigue, veremos algunas propiedades que pueden ser transferidas del anillo T para los ideales A_i y viceversa.

3.1. Artinianidad y noetherianidad

Decimos que un anillo T es *artiniano* (*noetheriano*) *izquierdo* si toda sucesión decreciente (creciente) de ideales izquierdos de T es estacionaria.

Proposición 3.1. *Sea $T = \sum_{i \in L} A_i$, donde cada ideal A_i tiene unidad 1_i. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es artiniano (noetheriano) izquierdo.*
2. *$\exists\ i_1, ...i_n \in L$, tales que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$, donde cada A_{i_k} es artiniano (noetheriano) izquierdo.*
3. *T tiene unidad y cada A_i es artiniano (noetheriano) izquierdo.*

Demostración. $2 \Rightarrow 1$. Sean $T = \sum_{i=1}^{n} A_i$, donde cada A_i es artiniano izquierdo y

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \cdots$$

una sucesión decreciente de ideales izquierdos de T. Entonces, para cada $i = 1, ..., n$, tenemos que

$$T_1 1_i \supseteq T_2 1_i \supseteq T_3 1_i \supseteq \cdots$$

es una sucesión decreciente de ideales izquierdos del anillo artiniano A_i, por lo que es estacionaria. Como existen finitos índices i, existe un $n_0 > 0$, tal que $T_j 1_i = T_k 1_i$, para $k, j \geq n_0$ y $i = 1, 2, ..., n$. Así, por el Lema 2.4(4) tenemos $T_j = T_k$ para $k, j \geq n_0$ por lo que T es artiniano izquierdo. La otra parte es análoga.

$1 \Rightarrow 2$. Por el Lema 2.4(2), para $i = 1, ..., n$, cada ideal izquierdo de A_i es también ideal izquierdo de T. Así, si T es artiniano (noetheriano) izquierdo, entonces A_i es artiniano (noetheriano) izquierdo.

Probaremos ahora que para T noetheriano existen $i_1, ...i_n \in L$, tales que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$. Si lo afirmado es falso, entonces podemos escoger $i_1 \in L$ tal que $T \neq A_{i_1}$; seguido escogemos $i_2 \in L - \{i_1\}$, tal que $A_{i_1} \subset A_{i_1} + A_{i_2} \subset T$. Siguiendo este procedimiento, podemos construir una sucesión creciente no estacionaria de ideales

$$A_{i_1} \subset A_{i_1} + A_{i_2} \subset A_{i_1} + A_{i_2} + A_{i_3} \subset \cdots$$

contradiciendo el hecho que T es noetheriano. Ahora, si T es artiniano, entonces cada A_i es artiniano. Como cada A_i tiene unidad, por el Teorema Hopkins-Levitzki (Lam, 2001, Teorema 4.15), cada A_i es noetheriano. En consecuencia T es noetheriano y entonces vale lo afirmado también en este caso.

$2 \Leftrightarrow 3$. Es consecuencia directa del Lema 2.1(2). $\square$

3.2. Radicales hereditarios

Decimos que un ideal P de un anillo T es primo si para cualquier par de ideales I, J de T, la inclusión $I \cdot J \subseteq P$ implica que $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$. La notación $P \triangleleft' T$ indica que P es un ideal primo de T.

Además, decimos que el anillo T es primo si el ideal nulo (0) es primo. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un anillo primo.

Decimos que un anillo es semiprimo, si para cualquier ideal I de T tal que $I^2 = (0)$ se tiene $I = (0)$. Por ejemplo, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es primo, pero es semiprimo. Llamamos *radical primo*, denotado por $N(T)$, a la intersección de todos los ideales primos de T. Es claro entonces que el anillo T es semiprimo, si y sólo si, $N(T) = (0)$.

Una característica importante del radical primo es que para todo ideal I de T vale

$$N(I) = I \cap N(T).$$

Existen otros radicales que satisfacen tal propiedad, estos son llamados *radicales hereditarios*. Son ejemplos de radicales hereditarios:

1. El radical de Jacobson: $J(T)$ es la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de T. Puede ser caracterizado por $J(T) = \{t \in T : 1_T - xty \in U(T), \quad \text{para todo } x, y \in T\}$, donde $U(T)$ denota el conjunto de las unidades del anillo T.

2. El nil radical superior : $Nil^*(T)$ que es definido como la suma de todos los ideales nil de T. (Recodar que un ideal de T es nil cuando todos sus elementos son nilpotentes).

3. El radical de Brown-Mccoy: $BM(T)$ que es definido como la intersección de todos los ideales maximales de T. (Recordar que esta definición es para anillos con unidad).

Dado un radical rad, decimos que un anillo T es *rad-semisimple* cuando $rad(T) = 0$.

Proposición 3.2. *Sean $T = \sum_{i \in L} A_i$, donde cada ideal A_i tiene unidad 1_i y rad un radical hereditario. Entonces, T es rad-semisimple, si y sólo si, para todo $i \in L$, A_i es rad-semisimple.*

Demostración. Para todo $i \in L$, $rad(A_i) = rad(T) \cap A_i$. Así, $rad(T) = 0$ implica $rad(A_i) = 0$. Recíprocamente, si para todo $i \in L$, $rad(A_i) = 0$, entonces $0 =$

$rad(A_i) = rad(T) \cap A_i = rad(T)1_i$, para todo $i \in L$. Luego, por el Lema 2.4(4), tenemos $rad(T) = 0$. $\square$

Entre los radicales hereditarios, destacamos el radical de Jacobson y el radical primo en el siguiente resultado inmediato.

Corolario 3.3. *Sea* $T = \sum_{i \in L} A_i$, *donde cada ideal* A_i *tiene unidad* 1_i. *Entonces:*

1. *T es J-semisimple, si y sólo si, para todo $i \in L$, A_i es J-semisimple.*
2. *T es semiprimo, si y sólo si, para todo $i \in L$, A_i es semiprimo.*

Demostración. Basta recordar que un anillo es semiprimo, si y sólo si, su radical primo es nulo y usar el hecho de que los radicales de Jacobson y primo son hereditarios. $\square$

Decimos que un anillo T con unidad es *semisimple* cuando T es J-semisimple y artiniano izquierdo. Para estos anillos tenemos lo siguiente:

Teorema 3.4. *Sea* $T = \sum_{i \in L} A_i$, *donde cada ideal* A_i *tiene unidad* 1_i. *Son equivalentes:*

1. *T tiene unidad y es semisimple.*
2. *$\exists i_1, ... i_n \in L$, tales que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$, donde cada A_{i_k} es semisimple.*

Demostración. Ya que cada A_i tiene unidad y L es finito, por el Lema 2.1, tenemos que T es también un anillo con unidad. Entonces T es J-semisimple y artiniano izquierdo, si y sólo si, L es finito y cada A_i es J-semisimple y artiniano izquierdo. Pero esto es justamente lo que afirma la Proposición 3.1 juntamente con el Corolario 3.3. $\square$

Observación 3.5. No es verdad en general, que un anillo que es suma de ideales que son semiprimos sea también semiprimo (Ferrero & Lazzarin, 2008, Ejemplo 1.16).

Observación 3.6. Cuando T es primo la situación se restringe mucho. De hecho, T es primo si y sólo si, $\exists\ j \in L$, tal que A_j es primo y $T = A_j$. En efecto, sean $i, j \in L$. Los ideales $T1_i1_j$ y $T(1_i - 1_j)$ son tales que $T1_i1_jT(1_i - 1_j) = T^2 1_i 1_j (1_i - 1_j) = 0$. Siendo T anillo primo, tenemos $T1_i1_j = 0$ o $T(1_i - 1_j) = 0$. El primer caso implica que $A_i = 0$ o $A_j = 0$. El segundo caso implica que $A_i = A_j$. El recíproco es inmediato.

3.3. Von Neumann regularidad

El concepto de von Neumann regularidad puede introducirse por las siguientes equivalencias bien conocidas (Goodearl, 1991).

Teorema 3.7. *Para todo anillo T, son equivalentes:*

1. *Para todo $t \in T$, existe $x \in T$, tal que $t = txt$.*
2. *Todo ideal principal izquierdo es generado por un idempotente.*
3. *Todo ideal principal izquierdo es un sumando directo de ${}_TT$.*

Observe que el ítem 1 arriba, permite enunciar el mismo teorema para ideales derechos. Decimos que un anillo T es *von Neumann regular* (vNr, para acortar) si T verifica una de las condiciones (y por lo tanto todas) del teorema arriba.

El siguiente lema resulta inmediato del Lema 1.3 de Goodearl (1991):

Lema 3.8. *Sea I un ideal de un anillo T. El anillo T es vNr, si y sólo si, I y T/I son anillos vNr.*

La von Neumann regularidad es otra propiedad que podemos transferir de los A_i para T y viceversa, como muestra el siguiente resultado. Aquí no exigimos que los A_i tengan unidad.

Lema 3.9. *Si T es un anillo y $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia finita de ideales de T que son vNr como anillos, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ es vNr.*

Demostración. Basta probar el caso $n = 2$ y usar inducción. Como $A_1 \cong \frac{A_1+A_2}{A_2}$ y A_2 son vNr, entonces por el Lema 3.8, $A_1 + A_2$ es vNr. □

Proposición 3.10. *Si $T = \sum_{i \in L} A_i$, entonces*

$$T \text{ es } vNr \Leftrightarrow \text{para todo } i \in L, A_i \text{ es } vNr.$$

Demostración. La necesidad es inmediata ya que T es von Neumann regular, si y sólo si, R y T/R son von Neumann regulares.

Recíprocamente, sobre el conjunto L podemos usar el principio de la buena ordenación y definir: $T_1 = A_1$, $T_\lambda = T_{\lambda-1} + A_\lambda$, si λ no es un ordinal límite, y finalmente, $T_\lambda = \sum\limits_{\mu<\lambda} T_\mu$ si λ es ordinal límite. Así debe existir un ordinal λ_0, tal que

Por lo tanto, el resultado quedará probado si demostramos que para todo ordinal λ, T_λ es vNr. Para demostrar esto, usaremos inducción transfinita. Para $\lambda = 1$, $T_1 = A_1$, que por hipótesis es vNr. Sea λ un ordinal, tal que T_μ es vNr, para todo $\mu < \lambda$. Si λ no es ordinal límite, entonces como $T_{\lambda-1}$ y A_λ son vNr, por el Lema 3.9, $T_\lambda = T_{\lambda-1} + A_\lambda$ también es vNr. Si λ es un ordinal límite, entonces cada elemento $t \in T_\lambda$ pertenece a $T_{\mu_1} + T_{\mu_2} + \cdots + T_{\mu_n}$, que por el Lema 3.9 es vNr. Por lo tanto existe $x \in T_{\mu_1} + T_{\mu_2} + \cdots + T_{\mu_n} \subseteq T_\lambda$, tal que $t = xtx$. Luego, también en ese caso, T_λ es vNr. $\square$

4. UNA APLICACIÓN A LAS ACCIONES DE GRUPOS SOBRE ANILLOS

Empezamos construyendo un ejemplo de *acción parcial de un grupo sobre un anillo.* Sea G un grupo que actúa sobre un anillo T', o sea, la acción de G puede verse como la acción de un subgrupo del grupo de todos los automorfismos de T'. Consideremos un idempotente central $e \in T'$ y el ideal principal $R = T'e$. Para $g \in G$, considere los ideales $D_g = R \cap g(R)$. Observando que $g(D_{g^{-1}}) = D_g$, tenemos que $\alpha_g = g|_{D_{g^{-1}}} : D_{g^{-1}} \to D_g$ es un isomorfismo entre ideales de T', para todo $g \in G$.

Esta restrición de la acción de G sobre T' es llamada *acción parcial de G sobre el anillo R.* Para la definición general ver Dokuchaev y Exel (2005).

Llamamos *acción envolvente* al menor subanillo T de T' tal que R es un ideal y T es invariante bajo G, es decir, $g(T) = T$ para todo $g \in G$. Por lo tanto, T tiene que ser generado por los elementos que pertenecen a la unión de ideales $\{g(R)\}_{g\in G}$. Así, un elemento de T es de la forma $r_1 + g_1(r_2) + \cdots + g_n(r_{n+1})$, o sea,

$$T = \sum_{g\in G} g(R).$$

Así, si R tiene una propiedad determinada, los isomorfismos $g \in G$ transfieren esta propiedad a cada $g(R)$ y así utilizando las técnicas de las secciones anteriores podemos transferirlos al anillo T y viceversa.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los valiosos comentarios sugeridos por el (la) evaluador (a).

BIBLIOGRAFÍA

Ávila, J., Ferrero, M., & Lazzarin, J. (2010). Partial actions and partial fixed rings. *Comm. Algebra*, *38*(6), 2079-2091.

Dokuchaev, M., & Exel, R. (2005). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *357*(5), 1931-1952.

Ferrero, M., & Lazzarin, J. (2008). Partial actions and partial skew group rings. *J. Algebra*, *312*(12), 5247-5264.

Goodearl, K. R. (1991). *Von neumann regular rings.* Florida: Krieger Publishing Company.

Lam, T. Y. (2001). *A first course in noncommutative rings.* New York: Springer-Verlag.

Referencia	**Fecha de recepción**	**Fecha de aprobación**
Ávila Jesús y Lazzarin João Anillos que son suma de ideales. Revista Tumbaga (2011), 6, 227-236	Día/mes/año 14/06/2011	Día/mes/año 14/07/2011