Geometría diferencial elemental: ¿Un estudio de la curvatura?

Elementary differential geometry, a sudy of curvare?

Oostra Arnold[I]

Resumen. Esta es una presentación, rigurosa pero sin definiciones ni demostraciones formales, de la Geometría Diferencial clásica en la cual se toma como guía el concepto de curvatura.

Palabras clave: Geometría Diferencial, curva, superficie, isometría, curvatura.

Abstract. This is an exposition of classical Differential Geometry, without strict definitions and formal proofs but with mathematical rigor, in which we take curvature as the leading theme.

Key words: Differential Geometry, curves, surfaces, isometry, curvature.

1 INTRODUCCIÓN

Desde el "Programa de Erlangen" (1872) de Felix Klein la Geometría, en general, es el estudio de propiedades invariantes bajo ciertas transformaciones. Por ejemplo, la Geometría Euclidiana se concentra en las propiedades invariantes bajo transformaciones del plano ($\mathbb{R}^2$) o del espacio ($\mathbb{R}^3$) que conservan las distancias; la Topología describe las propiedades invariantes bajo funciones continuas. En estos casos, no se han elegido transformaciones arbitrarias sino aquellas que son compatibles con determinada estructura, de manera que constituyen un revelador de las propiedades intrínsecas de tal estructura. Por ejemplo, dada la distancia usual del plano se estudian las funciones que la conservan, luego las propiedades que quedan invariantes bajo tales funciones guardan una relación estrecha con la estructura observada.

[I]Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima. Miembro del Grupo de Matemáticas del Tolima - MaT.
Correo electrónico: aaoostra@gmail.com

La Geometría Diferencial, en particular, se ocupa de las estructuras con las condiciones mínimas para hacer en ellas cálculo diferencial e integral –estructuras que reciben el nombre de *variedades*– y en las cuales, además, se tiene el concepto de ortogonalidad, expresado mediante cierto producto escalar entre vectores tangentes. Las transformaciones compatibles con esta estructura son aquellas funciones diferenciables que, de alguna manera, conservan la ortogonalidad o el producto escalar, funciones que se llaman *isometrías*. Entre todas las propiedades importantes que revelan las isometrías, importantes en tanto permanecen invariantes, la fundamental es sin duda alguna la *curvatura*. Tanto es así que la curvatura puede verse como un hilo conductor en el estudio de la Geometría Diferencial, por lo menos en lo que se refiere a curvas y a superficies.

Este artículo es una apología de esa última idea, pues en él se realiza un resumen somero de la Geometría Diferencial de curvas y superficies, enfatizando cada vez el significado y la importancia de la curvatura. La primera sección se refiere a la geometría de curvas en $\mathbb{R}^3$, la segunda a superficies en ese mismo espacio y la tercera muestra el camino hacia el estudio de variedades abstractas de dimensión 2, llamadas allí superficies geométricas y que, *a priori*, no se consideran sumergidas en $\mathbb{R}^3$. Dado que se quieren resaltar las ideas geométricas centrales, no se desarrollan las demostraciones ni se plantean ejemplos particulares. Sí se da una bibliografía que puede servir a lectores interesados en profundizar sobre los detalles. Sin embargo, es preciso suponer conocidos ciertos elementos de Cálculo en varias variables (véase por ejemplo, Caicedo, 2005), resultando así un escrito peculiar de "divulgación en matemáticas no elementales".

En la actualidad, la Geometría Diferencial se enfoca de manera abstracta como el estudio de variedades de dimensión arbitraria. Al implementar esa orientación en un primer curso universitario, con seguridad se pierde el sabor geométrico original que de manera histórica marcó esta ciencia. Por ello, se ha propuesto que esa asignatura se oriente más hacia la Geometría Diferencial clásica, y ese es un posible impacto de este artículo que también puede tomarse como un primer bosquejo para tal curso.

2 CURVAS EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Una curva se describe mediante una función $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que se asume derivable y con derivada continua y no nula, de manera que puede suponerse que α' es un vector unitario. ¿Qué tan 'curva' es α? ¿Cuánto gira?

En una primera aproximación, el giro de α es su desviación de una recta. Esto conduce a considerar la dirección de la curva, dada por el vector tangente $T = \alpha'$: ahora α es una recta si y solo si T es constante; cuanto más cerrada es la 'curva' formada por α, tanto mayor es la variación de T. La *curvatura* de α se define, pues, como la magnitud de la componente de T' perpendicular a T. Si α' es unitario esta componente se reduce a $\|\alpha''\|$. En segundo lugar, puede considerarse que el giro es la desviación de α del plano de aproximación determinado por T y α''; el escalar que la mide es la *torsión* de la curva α.

Dos curvas α, β son *congruentes* cuando existe una isometría $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (biyectiva, suave y que preserva el producto escalar usual) tal que $\beta = F(\alpha)$, es decir, si la una es 'copia' o bien 'copia especular' de la otra. Curvas congruentes tienen la misma curvatura y torsión salvo, en algunos casos, el signo de la torsión, de manera que éstas son propiedades geométricas de la curva. Más aún, ellas caracterizan a la curva. Pues si dos curvas unitarias tienen curvaturas iguales y torsiones iguales en valor absoluto, entonces son congruentes.

3 SUPERFICIES EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Una superficie se describe mediante una familia de funciones $\{\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3\}$, cada una de las cuales se asume que es diferenciable y con derivada continua y de rango 2 (es decir, regular) pero, además, se pide que sea un homeomorfismo en su imagen. De manera local, puede considerarse que una superficie en $\mathbb{R}^3$ está constituida por curvas, luego, para empezar, el estudio de la forma de una superficie puede basarse en el correspondiente estudio de las curvas.

Así, dado un punto p en una superficie S en $\mathbb{R}^3$, sea η un vector unitario normal a S en p. La curvatura de S en la dirección de un vector tangente v podría definirse como la curvatura de la curva intersección de S con el plano determinado por η y v. Este enfoque tiene un pequeño defecto y es que la curvatura siempre sería positiva y no podría distinguirse entre superficies 'abultadas' y 'hundidas'. Para cubrir esta imperfección se introduce la derivada covariante.

Si W es un campo vectorial definido en S y v es un vector tangente a S en p (esto es, $v \in T_pS$) entonces la *derivada covariante* de W en la dirección de v es

$$\nabla_v W = \left.\frac{d}{dt}(W\alpha)\right|_{t=0}$$

siendo α una curva en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Esta definición no depende de la curva α elegida. Si W está definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S entonces se tiene

$$\nabla_v W = \lim_{h \to 0} \frac{W(p + hv) - W(p)}{h}.$$

En cualquier caso, $\nabla_v W$ representa la rapidez de variación de $W(p)$ cuando p empieza a moverse sobre S en la dirección de v.

Ahora el *operador forma*[1] de S en p se define como la función que a cada vector

[1]Algunos autores, como Hoyos (1988), llaman a esta función la *aplicación de Weingarten*.

v asigna la derivada covariante del campo normal η en la dirección de v:

$$N(v) = -\nabla_v \eta.$$

De hecho, $\nabla_v \eta$ es también tangente a S en p, luego, en realidad, N es un operador lineal $T_pS \longrightarrow T_pS$.

Dada cualquier curva α en S es válida la igualdad

$$\alpha'' \cdot \eta = N(\alpha') \cdot \alpha',$$

de manera que si η coincide con el vector normal a la curva, entonces $N(\alpha') \cdot \alpha'$ es la curvatura de la misma. Obsérvese aquí que la componente normal de la aceleración solo depende de la velocidad, luego la forma de la superficie S determina la curvatura de las curvas que pasan por p en esa dirección. En consecuencia, dado un vector tangente unitario $v \in T_pS$ el escalar

$$N(v) \cdot v$$

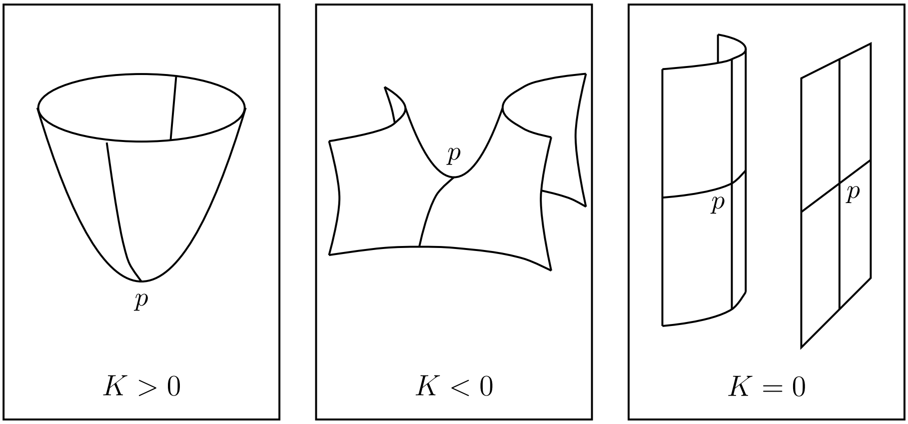
es la *curvatura normal*[2] de S en la dirección de v.

Expresando todos los vectores unitarios de T_pS en términos del ángulo formado con cierto vector fijo, la curvatura normal es una función continua $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ luego toma un máximo y un mínimo. El producto de estos extremos es la *curvatura gaussiana* de S en el punto p, notada $K(p)$ o, si no hay lugar a confusión, K. Puede verse con facilidad que las curvaturas normales máxima y mínima son valores propios del operador forma N, obteniendo así una descripción algebraica de la curvatura gaussiana:

$$K = \det N.$$

La curvatura gaussiana revela mucho sobre la forma de la superficie en el punto. Por supuesto, cuanto mayor es su magnitud tanto más se 'curva' la superficie. Pero, además, ella puede ser positiva o negativa y esto también contiene información sobre la superficie en el punto. En efecto, si $K > 0$ entonces las curvaturas máxima y mínima tienen el mismo signo, todas las curvas de sección se flexionan en la misma dirección y S se asemeja a un paraboloide en cercanías de p; si $K < 0$ entonces las curvas de sección correspondientes al máximo (positivo) y mínimo (negativo) se flexionan en direcciones opuestas, de manera que S se aproxima a una silla de montar; si $K = 0$ entonces por lo menos una de las curvaturas extremas es cero, luego, en este caso S es como un cilindro o como un plano en una vecindad del punto.

[2] La función definida para un vector tangente arbitrario $v \in T_pS$ como $N(v) \cdot v$ se conoce también como la *segunda forma fundamental* (Hoyos, 1988; Lipschutz, 1971)



La curvatura gaussiana es una información puntual o local. Para globalizarla podría pensarse en integrar la función K sobre todo S, pero para ello se requiere que la superficie sea orientable. Si S está orientada por una forma de área dS y además es compacta, su *curvatura total* se define como

$$K_S = \int_S K\, dS$$

siendo $K : S \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de curvatura gaussiana.

Dada de nuevo una curva α en la superficie S, la curvatura normal $N(\alpha') \cdot \alpha'$ a lo largo de α es la componente de su aceleración en la dirección perpendicular a S. Puede ocurrir que esa es toda la aceleración, es decir, que α'' es perpendicular a S a lo largo de α. Tales curvas se denominan *geodésicas* y son en cierto modo las rectas de S, pues son las curvas inerciales: si una partícula se mueve sobre una geodésica, entonces no está sujeta a aceleraciones dentro de S, de manera que, desde el punto de vista de un observador en S, no actúa ninguna fuerza sobre ella.

La curvatura gaussiana, la curvatura total y el carácter de geodésica de una curva, son propiedades geométricas, esto es, se preservan bajo isometrías. Una *isometría local* es una función suave $F : S \longrightarrow \overline{S}$ entre superficies S, $\overline{S}$ que conserva los productos escalares en los espacios tangentes, es decir, tal que

$$dF_p(u) \cdot dF_p(v) = u \cdot v$$

para cada u, $v \in T_pS$. Una *isometría global* es una isometría local biyectiva; nótese que aquí no se pide que sea la restricción de una isometría de $\mathbb{R}^3$, lo cual constituye una congruencia mucho más fuerte.

La curvatura gaussiana lleva este nombre porque fue Gauss quien descubrió su invarianza bajo isometrías, en su célebre "Teorema Egregio": si S y $\overline{S}$ son superficies arbitrarias y $F : S \longrightarrow \overline{S}$ es una isometría local, entonces la curvatura de $\overline{S}$ en $F(p)$ es igual a la curvatura de S en p:

$$\overline{K}(F(p)) = K(p).$$

La curvatura normal de S en la dirección de $v \in T_pS$ no siempre es igual a la curvatura normal de $\overline{S}$ en la dirección de $dF_p(v) \in T_{F(p)}\overline{S}$; como contraejemplo basta observar que el plano es localmente isométrico al cilindro. La curvatura total se conserva bajo isometrías globales definidas entre superficies compactas y orientables, pero no siempre bajo isometrías locales. Si α es una geodésica de cualquier superficie S y $F : S \longrightarrow \overline{S}$ es una isometría local, entonces $F(\alpha)$ es una geodésica de $\overline{S}$. Otra magnitud que se conserva bajo isometrías es la distancia, pero no la distancia entre dos puntos como elementos de $\mathbb{R}^3$ sino la que los separa sobre la superficie. La *distancia*[3] $\rho(p, q)$ entre $p, q \in S$ se define como el extremo inferior de las longitudes de las curvas en S que unen a p y q. Si F es una isometría global y $\overline{\rho}$ es la distancia en $\overline{S}$ entonces

$$\overline{\rho}(F(p), F(q)) = \rho(p, q).$$

Esto no siempre es cierto si F es una isometría local, como se observa de nuevo en la isometría local entre el plano y el cilindro.

Lo mismo que en el caso de las curvas, la curvatura gaussiana y el operador forma no solo contienen mucha información sobre la superficie, sino que, en algunos casos, la determinan de manera completa. Por ejemplo, si $N \equiv 0$ entonces S forma parte de un plano; si S es compacta y tiene curvatura gaussiana constante K entonces $K > 0$ y S es una esfera con radio $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Por otro lado, si $F : S \longrightarrow \overline{S}$ es una isometría global que conserva el operador forma, entonces $\overline{S}$ es una *copia* de S en el sentido de que existe una isometría de $\mathbb{R}^3$, cuya restricción a S coincide con F. Así N determina de manera completa la forma de la superficie.

4 SUPERFICIES GEOMÉTRICAS

La curvatura de una superficie en $\mathbb{R}^3$ se define como el determinante del operador forma, que es la derivada del campo normal unitario, que a su vez existe porque la superficie se encuentra en $\mathbb{R}^3$, y para encontrar un vector normal basta tomar el producto cruz de dos vectores tangentes. De manera que cuando se quiere salir de $\mathbb{R}^3$ y estudiar superficies más generales, es preciso buscar otro camino para expresar la curvatura, y resulta conveniente introducir los sistemas de referencia.

[3] Algunos autores como Do Carmo (1976) la llaman *distancia isométrica*.

Un *campo de sistemas de referencia* en una superficie S de $\mathbb{R}^3$ es una terna $\{E_1, E_2, E_3\}$ de campos vectoriales en S tal que en cada punto $p \in S$, los vectores $E_1(p)$, $E_2(p)$, $E_3(p)$ son linealmente independientes. Las 1-formas de conexión ω_{ij} se definen mediante las relaciones

$$\nabla_v E_i = \sum_j \omega_{ij}(v) E_j;$$

cuando el sistema es ortonormal, se tiene

$$\omega_{ij}(v) = (\nabla_v E_i) \cdot E_j$$

de manera que $\omega_{ij}(v)$ mide la variación de E_i en la dirección de E_j cuando p se mueve en la dirección de v y puede interpretarse como la tasa de rotación del sistema al moverse sobre S. Cuando el sistema es ortonormal se tiene además $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ y, en particular, $\omega_{ii} = 0$. Por ejemplo, si a lo largo de una curva unitaria α se toma $E_1 = T = \alpha'$, E_2 el vector unitario en la dirección de α'' y $E_3 = E_1 \times E_2$, entonces $\omega_{13}(T) = 0$, $\omega_{12}(T)$ es la curvatura y $\omega_{23}(T)$ es la torsión de la curva.

Si en un campo ortonormal $\{E_i\}$ las 1-formas duales de los campos E_i se denotan θ_i, de manera que $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$, entonces se satisfacen las ecuaciones estructurales

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \end{aligned}$$

Supóngase ahora que, en todos los puntos, E_3 es normal a S. Si, además, $\{E_i\}$ es ortonormal entonces $\{E_1, E_2\}$ constituye una base de T_pS. ¿Cuál es la matriz del operador forma en esta base? Como

$$\begin{aligned} S(E_i) &= -\nabla_{E_i} E_3 = -\sum_j \omega_{3j}(E_i) E_j = \\ &= -\omega_{31}(E_i) E_1 - \omega_{32}(E_i) E_2 = \\ &= \omega_{13}(E_i) E_1 - \omega_{32}(E_i) E_2 \end{aligned}$$

resulta

$$S = \begin{bmatrix} \omega_{13}(E_1) & \omega_{13}(E_2) \\ -\omega_{32}(E_1) & -\omega_{32}(E_2) \end{bmatrix}$$

de manera que

$$K = \det S = -\omega_{13} \wedge \omega_{32}(E_1, E_2) = -\sum_k \omega_{1k} \wedge \omega_{k2}(E_1, E_2) = -d\omega_{12}(E_1, E_2).$$

Esto significa que $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$. Así se ha encontrado el camino que se deseaba, ya que en esta expresión no se hace referencia alguna al vector normal E_3: ω_{12}, θ_1 y θ_2 son formas en T_pS.

Para el desarrollo anterior, lo único que se requiere es la existencia de una base ortonormal en T_pS y, para ello, es suficiente un producto interior simétrico positivo. Sobre esas bases mínimas, puede reconstruirse el trabajo hecho en $\mathbb{R}^3$. Así, una *superficie geométrica* es una variedad S de dimensión 2, dotada de un producto interior (bilineal, simétrico y positivo) en cada espacio tangente T_pS, además, este producto debe ser suave.

Dada una superficie geométrica S, en ella se elige un campo de sistemas de referencia $\{E_1, E_2\}$ ortonormal en cada T_pS respecto al producto interior correspondiente. Si θ_i denota la forma dual de E_i, la forma de conexión ω_{12} se define mediante $d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$ ($\omega_{21} = -\omega_{12}$) y la *curvatura* de la superficie geométrica en el punto p como el coeficiente real K, tal que

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Cabe anotar que esta definición no depende del sistema de referencia elegido.

La curvatura total se define lo mismo que para superficies en $\mathbb{R}^3$. Dada una forma de área dS en la superficie geométrica orientable y compacta S, la *curvatura total* es

$$K_S = \int_S K\, dS.$$

Nótese que si $dS = \theta_1 \wedge \theta_2$ entonces la curvatura total es $-\int_S d\omega_{12}$.

Para definir el concepto de geodésica, es preciso definir primero una derivada covariante. Mediante un trabajo similar al seguido para describir la curvatura, se concluye que la *derivada covariante* de un campo vectorial W (expresado en términos del campo de sistemas de referencia como $W = f_1E_1 + f_2E_2$) en la dirección del vector $v \in T_pS$, debe definirse como sigue.

$$\nabla_v W = \{\, df_1(v) + f_2\omega_{21}(v)\,\}E_1 + \{\, df_2(v) + f_1\omega_{12}(v)\,\}E_2$$

Ahora, dada una curva α en S se tiene el campo vectorial 'velocidad' α'. La 'aceleración' α'' es la derivada covariante de la velocidad en la dirección de sí misma. Una *geodésica* es una curva inercial de S, es decir, una curva α tal que $\alpha'' = 0$. Como no tienen aceleración en S, las geodésicas son las 'rectas' de S. En el espacio euclidiano usual $\mathbb{R}^3$, las rectas tienen otra propiedad importante: dados dos puntos del espacio, la distancia mínima entre ellos es la longitud del segmento de recta que los une. Las geodésicas de una superficie geométrica S tienen la misma propiedad. Dados p, $q \in S$, la *distancia* $\rho(p, q)$ entre ellos es el extremo inferior de las longitudes de las curvas en S que unen p y q. En principio, puede no existir ninguna curva entre p y q con longitud $\rho(p, q)$ pero, en caso de existir, es una geodésica: si α es una curva en S entre p y q y $\mathcal{L}(\alpha) = \rho(p,q)$ entonces α es un segmento de geodésica.

Como ahora la curvatura está definida en términos del sistema de referencia, cuya ortonormalidad depende del producto interior, es casi obvio que la curvatura permanece invariante bajo isometrías locales, es decir, funciones suaves cuya diferencial en cada punto p conserva el producto interior de T_pS. En consecuencia, la curvatura total se conserva bajo isometrías globales entre superficies geométricas compactas y orientables. Por otro lado, de la fórmula de la derivada covariante no es difícil ver que ella se conserva bajo isometrías, es decir, si $F : S \longrightarrow \overline{S}$ es una isometría local entonces

$$\overline{\nabla}_{dF_p(v)}\overline{W} = dF_p(\nabla_v W)$$

siendo $\overline{\nabla}$ la derivada covariante de $\overline{S}$ y $\overline{W}(F(p)) = dF_p(W(p))$. En consecuencia, si α es geodésica en S entonces $F(\alpha)$ es geodésica en $\overline{S}$ y las geodésicas también se conservan bajo isometrías.

Así que tanto la curvatura como el carácter de geodésica de una curva son propiedades geométricas importantes, ya que permanecen invariantes bajo aquellas transformaciones que respetan la estructura mínima con la cual se trabaja.

Cabe observar que la curvatura interviene de alguna manera en el comportamiento de las geodésicas. Entre otras razones, es por ello que puede considerarse que la curvatura juega un papel fundamental en el estudio de las superficies geométricas. Esta intervención puede precisarse con ayuda de la ecuación de Jacobi. Dada una geodésica unitaria α de S que parte de $p \in S$ ($\alpha(0) = p$), sea f la solución de la ecuación de Jacobi

$$x''(s) + K(\alpha(s))x(s) = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. En tal caso, si existe un punto $q \neq p$ donde vuelven a encontrarse todas las geodésicas que parten de p entonces el más cercano a p de tales puntos es $\alpha(s_1)$, siendo s_1 la primera raíz positiva de f. Los puntos donde se encuentran las geodésicas que parten de p se llaman *puntos conjugados* de p, un ejemplo es el punto antípoda en la esfera.

De manera informal, la ecuación de Jacobi permite afirmar que mientras la curvatura sea negativa o cero, las geodésicas se dispersan; en tanto que si la curvatura es positiva, las geodésicas pueden acercarse unas a otras. Pues si $K \leq 0$ a lo largo de α, como $f'' = -Kf$, de $f'' \geq 0$ y $f'(0) > 0$ se concluye que f no tiene raíces positivas, luego, por el resultado anterior, p carece de puntos conjugados a lo largo de α.

Al igual que en las curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$, la curvatura interviene de manera decisiva en la 'forma', incluso en la estructura topológica misma de la superficie geométrica.

En primer lugar, considérese el caso de una superficie geométrica S con curvatura constante K. Si $K > 0$, existe una isometría local de la esfera con radio $\frac{1}{\sqrt{K}}$ sobre S; si $K = 0$, existe una isometría local del plano sobre S; si $K < 0$ existe una isometría local del plano hiperbólico con seudorradio $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ sobre S. Cabe anotar que sobre el plano hiperbólico puede desarrollarse un modelo de la geometría de Lobachevski, tomando como rectas las geodésicas de la superficie geométrica. Por otro lado, puede probarse que en cualquier superficie geométrica con curvatura constante K, la suma de los ángulos internos de un triángulo, cuyos lados son segmentos de geodésicas, es

$$\pi + KA,$$

siendo A el área del triángulo. En el plano suman π (Euclides); en la esfera más que π (Riemann); en el plano hiperbólico menos que π (Lobachevski).

De otra parte, si S es una superficie geométrica compacta y orientable, entonces ella puede 'cubrirse con una red', o sea, puede descomponerse en una cantidad finita c de polígonos curvilíneos que encajan a la perfección. Si v denota la cantidad de vértices y a la de aristas de esta descomposición, entonces el teorema de Gauss–Bonnet afirma que la curvatura total de S es

$$K_S = 2\pi(v - a + c).$$

Ante todo, esto implica que $v - a + c$ es una magnitud intrínseca de S, ya que al cambiar la descomposición poligonal no cambia la curvatura. Esta cantidad se denomina *característica de Euler–Poincaré* de S y se denota $\chi(S) = v - a + c$. Por ejemplo, $\chi(\text{esfera}) = 2$ y $\chi(\text{toro}) = 0$.

Como la curvatura total es invariante bajo isometrías globales, se concluye que la característica de Euler–Poincaré también es una propiedad geométrica. Al revés, si S es un superficie geométrica compacta y orientable, la curvatura total no depende del producto interior que se defina. En particular, si S es una esfera con una cantidad finita h de asas, entonces la curvatura total de cualquier superficie geométrica definida sobre S es

$$4\pi(1 - h),$$

pues al añadir un asa la característica disminuye en 2.

5 CONCLUSIÓN

En el caso de las curvas, la curvatura junto con la torsión describe la forma del objeto, al punto de que estas dos funciones determinan de manera completa la curva. En las superficies, la curvatura describe su forma en cada punto, constituye un invariante bajo isometrías y, en ciertos casos específicos, determina de manera completa la superficie. En las superficies geométricas en general, la curvatura es un invariante bajo isometrías que, cuando es constante, determina de manera única una superficie geométrica que sirve como modelo para alguna de las geometrías planas. En otros casos, la curvatura total describe de manera completa la forma global de la superficie geométrica.

De esta manera, la curvatura se revela como una de las nociones fundamentales en el estudio de la Geometría Diferencial elemental.

BIBLIOGRAFÍA

Auslander, L. (1967). *Differential geometry.* New York: Harper and Row.

Caicedo, J. F. (2005). *Cálculo avanzado: Introducción.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry.* New York: John Wiley and Sons.

Do-Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces.* New Jersey: Prentice-Hall.

Hoyos, D. L. (1988). *Notas de geometría diferencial.* Cali: Universidad del Valle.

Klingenberg, W. (1978). *Curso de geometría diferencial.* Madrid: Alhambra.

Lipschutz, M. M. (1971). *Teoría y problemas de geometría diferencial.* México: McGraw-Hill.

O'Neill, B. (1972). *Elementos de geometría diferencial.* México: Limusa-Wiley.

Pogorélov, A. V. (1977). *Geometría diferencial.* Moscú: Mir.

Solanilla, L. (2008). *Geometría diferencial de superficies.* Medellín: Universidad de Medellín.

Valiron, G. (1986). *The classical differential geometry of curves and surfaces.* Massachusetts: Math Sci Press.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Oostra Arnold Geometría Diferencial elemental: ¿Un estudio de la curvatura?. Revista Tumbaga (2011), 6, 215-226	Día/mes/año 23/06/2011	Día/mes/año 08/09/2011