Críticas
Los números primos. Un largo camino al infinito.

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

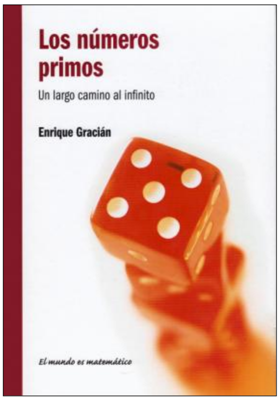
1 de octubre de 2011

Resumen

En este artículo se hace un informe de un libro sobre los números primos perteneciente a la colección divulgativa "El mundo es matemático". Dicha colección incluye otros libros que serán comentados próximamente.

Palabras Clave: Divulgación matemática, números primos, teoría de los números

1. Ficha técnica



Título: Los números primos.

Un largo camino al infinito

Autor: ENRIQUE GRACIÁN

Nº Páginas: 144

De la colección "El mundo es matemático"

Editado por: RBA

ISBN: 9788498678185

Año de Edición: 2010

2. Crítica

El libro del que se hace el informe pertenece a una colección de divulgación de las matemáticas. Por ello, el autor no presupone un nivel matemático alto del lector e introduce los temas de una forma adecuada, incluyendo definiciones de todos los conceptos y yendo de menos a más hasta llegar a explicar de manera clara temas nada triviales siempre relacionados con los números primos. Se puede decir por tanto que el libro está muy bien escrito, tanto en la parte matemática como en la literaria, quedando al alcance del público no especializado sin perder rigor.

Sin embargo, se aprecian aspectos mejorables que podrían ser modificados en próximas ediciones:

Hay un cierto desorden en los planteamientos. Por ejemplo, como se indica más abajo, el pequeño teorema de Fermat se enuncia varias veces de distintas formas, algunas de ellas con erratas ó no completas. Quizás hubiera sido mejor enunciar el teorema una sola vez y aludir a este enunciado cuando fuese necesario.

Se incluyen descripciones muy bellas, como la de la biblioteca de Alejandría, pero con una relación tangencial con los números primos, lo que hace que a veces se pierda el hilo conductor del libro. Otras veces se incluyen introducciones muy amplias a temas relacionados con los números primos pero que al final no se desarrollan mucho. Por ejemplo, cuando se habla del matemático Ramanujan, se incluyen muchos aspectos de su vida, anécdotas,… para concluir que su aportación a los números primos no es tan interesante como la que hizo a otras facetas de las matemáticas.

Da la sensación de que la última parte del libro está escrita de forma más esquemática, con más prisas (quizás debido a presiones por el plazo de entrega). Por ejemplo, cuando se expone el resultado de Agrawal, Kayak y Saxena, no se definen los parámetros que aparecen, ni se explica demasiado el alcance de dicho resultado.

Una última cosa que se echa en falta es la presentación de más conjeturas. Aunque el libro es rico en conceptos y resultados referentes a los números primos, como se puede ver en las próximas secciones no se habla tanto de los problemas abiertos, a pesar de que el estudio de los números primos es una de las partes de las matemáticas con más problemas abiertos en la actualidad, muchos de ellos muy atractivos por sus enunciados sencillos de entender.

3. Matemáticos que aparecen

Entendemos matemático en el sentido amplio de “aquél que hace matemáticas”, independientemente de cuál sea su profesión oficial. Con este criterio, los matemáticos incluidos en el libro son (por orden de aparición):

Fermat, Euler, Cartan, Weil, Alphonse de Polignac, Mersenne, Ramanujan, Pierre de Carcavi, Gauss, Bernard Frénicle de Bessy, Leibniz, Hensen, Jacob Bernoulli, Johan Bernoulli, Mengoli, Fourier, Goldbach, Chen Jingrun, Napier, Briggs, Hadarmard, de la Valle Pousin, Filolao, Riemann, Cardano, Descartes, de Moivre, Vandermonde, Argand, D’Alembert, Falconer, Legendre, Dirichlet, Jacobi, Eisenstein, Hardy, Littlewood, Poincare, Perelman, Matigasevich, Stechkin, Atkin, Wilson, Carmichael, Agrawal, Kayal, Saxena.

4. Novelas con contenido matemático a las que se alude

Hay dos novelas recientes en las que se tratan los números primos y de las que este libro se hace eco. Son:

- La soledad de los números primos (P. Giordano)

- El tío Petros y la conjetura de Goldbach (A. Dioxadis)

Para más información sobre las mismas, consultar las referencias.

5. Conceptos matemáticos que se definen ó a los que se alude

Los siguientes conceptos son definidos a lo largo del libro:

-Número primo: sólo divisible por él mismo ó por la unidad

-Primos gemelos: dos primos consecutivos

-Primos relativos: números que no tienen ningún factor primo común

-Test de primalidad: prueba para ver si un número es primo

-Números de Fermat: números de la forma $2^{2^n}+1$. Si son primos, se les llama primos de Fermat

-Números de Mersenne: números de la forma 2^n-1. Si son primos, se les llama primos de Mersenne

-Definición de función

-Definición de serie numérica

-Conjunto de los números complejos: $C=\{a+b\,i\,/\,a,b\in\Re,\ i=\sqrt{-1}\}$

-Función compleja: función cuyas variables son complejas.

-Función de Riemann: $Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s\in C$

-"Definición" de serie de Fourier (sólo intuida)

-Producto de Euler: descomposición de la función Z de Riemann en productos que sólo utilizan números primos

-Definición de logaritmo

-Función $\pi(x)$: da el número de primos menores que x

-Campana de Gauss: medida de la distribución de los errores

-Polígono de Gauss: polígono regular de 17 lados construido con regla y compás

-"Definición" de clases de equivalencia (intuidas)

-Definición de congruencias (aritmética modular)

-n-ésimo número de taxicab: número natural más pequeño que se puede expresar como suma de 2 cubos positivos de n formas distintas. Se conocen sólo los 5 primeros

-Algoritmos polinomiales: procedimientos que resuelven el problema utilizando una cantidad polinomial de tiempo (eficientes)

-Algoritmos exponenciales: procedimientos que resuelven el problema utilizando una cantidad exponencial de tiempo (no eficientes)

-Problemas P: se pueden resolver en tiempo polinomial

-Problemas NP: se puede comprobar una solución en tiempo polinomial

-Polinomio de Jones, Wado, Sata y Wienes: polinomio cuyos valores positivos son todos primos

-Seudoprimo: Número que cumple una condición necesaria para ser primo sin serlo

-Números de Carmichael: Números que cumplen la condición necesaria para ser primo que da el pequeño teorema de Fermat, sin ser primos

6. Conjeturas de las que se habla

Se exponen las siguientes conjeturas acerca de los números primos:

-Existen infinitos primos gemelos

-La generalización de la anterior: para todo número natural c existen infinitas parejas de primos separados por $2c$

-Conjetura de Goldbach: todo número natural mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos primos.

-Conjetura de Riemann: la parte real de todo cero no trivial de la función Z de Riemann es $\frac{1}{2}$

-$P = NP$: todo problema que tiene un algoritmo de comprobación polinomial tiene un algoritmo de resolución polinomial

7. Resultados que se exponen

Los siguientes resultados sobre los números primos ó sobre temas relacionados con ellos son mostrados en el libro:

ISSN 2174-0410

-Teorema fundamental de la aritmética: todo número natural se puede descomponer como producto de números primos de manera única

-Existen infinitos números primos (teorema de Euclides. Con bosquejo de la demostración)

-Existen n números consecutivos compuestos para todo n (con bosquejo de la demostración)

-La única terna de números primos impares consecutivos es 3, 5, 7 (sin demostración)

- Todo número primo de la forma $4n+1$ es suma de dos cuadrados (teorema de Euler, conjeturado por Fermat)

-Último teorema de Fermat: la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras no nulas si $n>2$

-Pequeño teorema de Fermat: p divide a a^p-a para todo primo p y todo entero a (demostrado por Euler)

-La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es $\frac{\pi^2}{6}$

-Todo número par suficientemente grande puede expresarse como la suma de un primo y un número producto de a lo más dos primos

-Teorema de los números primos: $\pi(x)$ es del orden de $\frac{x}{\log x}$

-La función Z de Riemann es igual al producto de Euler:

$$Z(x)=\prod_{p\ \text{primo}}\frac{1}{1-p^{-x}}$$

-Hay infinitos ceros no triviales de la función Z de Riemann y todos tienen parte real entre 0 y 1

- Hay infinitos ceros de la función Z de Riemann con parte real $\frac{1}{2}$

-1729 es el número natural más pequeño expresable como suma de dos cubos de dos formas distintas ($1729=1^3+12^3=9^3+10^3$)

-p es primo si y sólo si $(p-1)!\equiv -1(p)$ (es decir, p es primo si y sólo si p divide a $(p-1)!+1$)

- $2^{43112609}-1$ es primo (mayor primo de Mersenne conocido hasta Junio de 2009)

ISSN 2174-0410

8. Métodos matemáticos, algoritmos a los que se alude

-Para localizar números primos: criba de Eratóstenes, criba geométrica de Matiyasevich, criba de Atkin

-Para cifrar y descifrar números: algoritmos RSA, DSA, ECDSA

-Para comprobar si un número es primo: test de Lucas-Lehmer (test de primalidad)

9. Erratas, errores, aspectos mejorables

Aunque como se ha dicho el libro es riguroso en el tratamiento matemático, tiene algún aspecto mejorable como ahora veremos, especialmente en lo referente al tratamiento del pequeño teorema de Fermat.

-En la página 24, pone $\{2, 3, 5, 7\}$ por $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

-En la página 47, es erróneo el contraejemplo que se pone para ver que la condición del pequeño teorema de Fermat no es necesaria, ya que 10 no divide a $3^{10} - 3$. De forma análoga, el ejemplo de la página 86 de aplicación del pequeño teorema de Fermat para ver que un número no es primo es erróneo, ya que el número que se toma, 6, cumple el resultado con 4 aun no siendo primo (parece como si estos ejemplos estuvieran intercambiados).

-En la página 47 se enuncia el pequeño teorema de Fermat con pérdida de generalidad: p divide a $a^p - a$ si p es un primo que no divide a a (también se cumple si p divide a a). Se vuelve a enunciar bien en la página 85. Se enuncia otra vez bien en la página 132, pero se pone la condición superflua de que a, p sean primos relativos (incluida en las condiciones p primo, $a < p$)

-En la página 54 pone $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\,i}$ por $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$

-En la segunda tabla de la página 83 está mal la primera columna.

-En la página 85 donde pone elevar p a alguno de esos números debe poner elevar alguno de esos números a p

-En la página 88 donde pone $i^4 = -i$ debe poner $i^4 = 1$

-El dibujo de la página 91 sobra, ya que se mejora en la página 92 (aunque en el mejorado aparece una "a" no definida)

-En la página 99 falta un 2 en el exponente de la y en la función f

ISSN 2174-0410

-En la página 103 pone $Z(2)=\frac{\pi^4}{90}$ por $Z(4)=\frac{\pi^4}{90}$

- En la página 134, en curiosidades numéricas, pone primos por primo. La serie que dice que se forma añadiendo ceros a 91, en realidad añade nueves y ceros.

- En la página 138, en la demostración del pequeño teorema de Fermat, no se indica el primer paso de la inducción (es trivial). Se ponen los números combinatorios con la línea de fracción y en la última ecuación hay errores de impresión en los exponentes.

Referencias

[1] DIOXADIS, Apostolos. *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 1998.

[2] GIORDANO, Paolo. *La soledad de los números primos*, Editorial Salamandra, Barcelona, 2009.