LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES CUADRÁTICOS: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Mario Silvino Ávila Sandoval, Carlos López Ruvalcaba, Juan Luna González

Departamento de Física y Matemáticas

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Resumen

En el presente artículo se muestra una investigación que explora las habilidades de generalización de patrones cuadráticos de estudiantes del nivel intermedio de la carrera de matemáticas en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Se presenta también en este documento, la importancia del desarrollo del razonamiento inductivo que permite construir generalizaciones a partir del análisis de corte numérico de casos particulares.

Palabras clave: Matemática educativa, generalización, patrón matemático, aprendizaje del álgebra, pensamiento inductivo.

El papel de la generalización en el aprendizaje de las matemáticas

El desarrollo de las habilidades de generalización de patrones matemáticos dentro del ejercicio escolar, tiene una notable relevancia en los aprendices de matemáticas, que pocas veces es explorado por los docentes, debido a que el trabajo con este tipo de regularidades y su generalización, prácticamente están ausentes en el currículo escolar.

Entendemos por patrón matemático como "algo" que se repite con regularidad tanto en el plano aritmético como geométrico. Algunos autores como Zazkis y Liljedahl (2002) plantean que los patrones matemáticos son el alma y corazón de las matemáticas y que a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de números enteros, no siempre están como un tópico o actividad curricular y que algunos maestros los ven solo como una actividad lúdica o recreacional y que sin embargo, consideran que esta actividad es en la que está basada el álgebra y toda la matemática en general.

Por otro lado, Krutetskii (1976) clasifica la generalización como una de las habilidades cognitivas más importantes que puede mostrar un estudiante. En concordancia con lo anterior, Mason (1996) llama a la generalización el latido de las matemáticas, así mismo, Vogel (2005) menciona que el análisis de patrones matemáticos y la descripción de sus regularidades y propiedades, es uno de los objetivos de las matemáticas, mientras que Sriraman (2004) establece que debido al pensamiento de orden superior implicado en la generalización como la abstracción, pensamiento holístico, visualización, flexibilidad de razonamiento, la habilidad de generalizar es algo que caracteriza a los estudiantes capaces.

La generalización y el aprendizaje del álgebra

Son numerosos los investigadores que consignan que el desarrollo de las habilidades en la generalización de patrones son el preámbulo necesario para el estudio del álgebra. Los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) del año 2000, estipulan que el álgebra se aprende mejor al ser considerada como un conjunto de técnicas y conceptos ligados a la representación de relaciones cuantitativas y como una clase de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones (NCTM, 2000). En iguales términos, Amit (2008) plantea que tanto como proceso como un producto de la educación matemática, la generalización tiene méritos e importancia como un objetivo instruccional en sí, sin embargo, esta puede también servir como un medio para construir nuevo conocimiento, actuando como un iniciador para futuro aprendizaje en el álgebra.

Cuando los estudiantes exploran patrones, se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas (Zazkiz y Liljedahl, 2002), desarrollan habilidades que son fundamentales para el aprendizaje del álgebra (English y Warren, 1995). Estos investigadores, defienden la postura de que el trabajar con patrones matemáticos sirve para introducir el concepto de variable, argumentando que tradicionalmente, éste, se introduce como incógnita de una ecuación, dejando de lado su naturaleza definitoria de fenómenos de variación, además, el trabajo con patrones, proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y de registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación simbólica (English y Warren 1998). Otros autores como Trujillo, Castro y Molina (2009) consideran la generalización de la aritmética como un componente fundamental del álgebra y que tradicionalmente se usa para introducir los conceptos iniciales de ésta disciplina en el contexto escolar y Mason (2005) considera la generalización como la vía que conduce hacia el álgebra y que conforma la esencia misma de esta rama de las matemáticas.

La generalización y el pensamiento inductivo

La meta primaria del pensamiento inductivo es la generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2008). En su libro *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom,* Nubert y Binko (1992), muestran la relevancia del pensamiento inductivo, ejemplificando dos situaciones de clase diferentes: Una de corte expositiva, donde el profesor lleva a cabo el razonamiento y establece una generalización para la clase en la cual, los estudiantes pueden o no estar involucrados en la explicación de los casos específicos que dan base a la generalización (enfoque deductivo), mientras que en otra, que denomina guiada al descubrimiento inductivo, los estudiantes, no el profesor, establecen la generalización seguida del análisis de los casos específicos, para establecer el origen de ésta, en la cual, el profesor utiliza el siguiente patrón, en donde, los alumnos: 1) Examinan los casos particulares (ejemplos/hechos) seleccionados por el profesor. 2) Responden las preguntas del profesor. 3) Infieren la generalización. 4) Aplican la generalización a nuevos casos específicos.

La realidad es que la práctica docente que prevalece en las instituciones educativas, sigue siendo la de carácter deductivo-expositivo.

La investigación

Con la finalidad de explorar las habilidades en el reconocimiento y generalización de patrones cuadráticos con 6 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del nivel intermedio de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, se les aplicó un test, con el cual, se pudiera ubicar el nivel de generalización y el tipo de herramientas utilizadas en el desarrollo de los problemas, los cuales tienen las características de no ser elementales ni rutinarios y no demandaban un procedimiento específico, de tal manera, que los métodos de solución eran totalmente abiertos.

A continuación se muestran los problemas del test.

I) Dada la siguiente representación

Figura 1. Patrón geométrico de puntos

a) Continúe la sucesión gráfica hasta el quinto elemento
b) Exprese con números los primeros cinco términos de la sucesión
c) ¿Qué número está en la posición 10?
d) ¿Qué números están en la posición 40 y 90?
e) ¿Qué término ocupa la posición *n*?

II) Encuentre una expresión para determinar el número de cuadritos en función de la posición que ocupa la figura

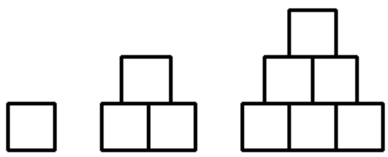

Figura 2. Patrón geométrico de cuadros

I) Determine el número de *saludos de mano* que se brindan *n* personas.

Observaciones

Al hacer la revisión de los resultados, se establece que se pueden categorizar 3 casos: El primero corresponde a aquellos que solo pudieron establecer generalizaciones locales, es decir, reconocen el patrón aritmético, y validan de manera local, no pudiendo establecer la expresión algebraica que generaliza dicho patrón, siendo este el grupo más numeroso contando con el 66% de la totalidad de estudiantes. En el segundo caso conformado por solo una persona, se reconoce la aplicación de herramientas matemáticas de orden superior, dado que intenta usar el concepto de sumatoria y se plantea una expresión algebraica para describir la generalización, y debido a la falta de validación, no se percata de un pequeño error en la expresión. (Ver figura 1, correspondiente a la solución proporcionada al inciso e) del problema I).

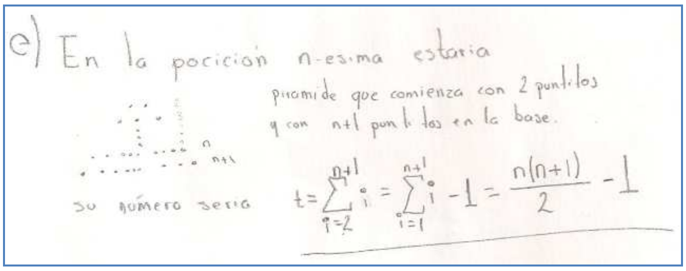

Figura 3. Respuesta basada en sumatorias

El tercer caso, corresponde también a un estudiante que plantea un algoritmo sustentado en el cálculo de las primeras y segundas diferencias de la sucesión, que le sirven para identificar el comportamiento cuadrático en cada uno de los patrones. Utiliza el mismo algoritmo en todos los problemas, consistente en plantear un sistema de ecuaciones que le permitan definir la expresión cuadrática particular. (Ver figura 2 correspondiente a la solución propuesta a la generalización del problema I).

Conclusiones

En la mayoría de los casos, los estudiantes reflejan un poder de generalización limitado solamente a predecir en el entorno local, es decir en los primeros valores de la sucesión. No reconocen el tipo de comportamiento del patrón, en este caso, cuadrático. Salvo en un caso, no se recurre al cálculo de las primeras y segundas diferencias para analizar numéricamente el comportamiento del patrón. Dada la importancia que tiene en el desarrollo matemático de los individuos el razonamiento inductivo, que nos lleva a construir generalizaciones, consideramos que deben incluirse en la currícula del matemático, el análisis de patrones geométricos y aritméticos en el marco numérico del cálculo de diferencias finitas, aunado al estudio formal de los procesos de generalización. Las investigaciones leídas para la preparación de este artículo, se llevaron a cabo principalmente con estudiantes del nivel medio superior y reportan resultados similares a los obtenidos en este trabajo, lo que nos indica que al no estar incluido en los programas el desarrollo de las habilidades de generalización, el desarrollo de los estudiantes en este rubro es muy modesto en el nivel superior.

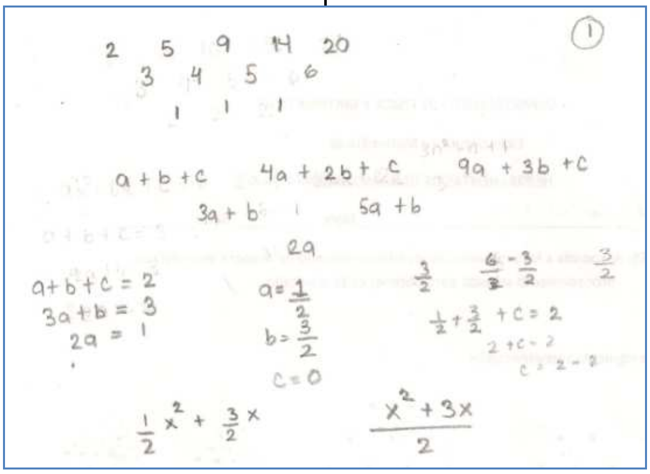

Figura 4. Respuesta basada en un algoritmo algebraico

Referencias

Amit M., Neria D. 2008. Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*. No. 40. pp. 111-129.

Cañadas M., Castro E., Castro E. 2008. Descripción de la generalización de estudiantes de 3° y 4° de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. *Investigación en Educación Matemática*, XII.

English L., Warren E. 1995. General reasoning processes and elementary algebraic understanding: implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(4), pp. 1-19.

English L., Warren E. 1998. Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, Vol. 91, No. 2. pp. 166-170.

Krutetskii V. 1976. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Mason J. 1996. Expressing generality and roots of algebra. En Bednarz, N, Kieran, C. y Lee, L. (Editores), Approaches to algebra: *Perspectives for research and teaching*, pp. 65-86.

Mason J., Graham A., Johnston-Wilder S. 2005. *Developing thinking in algebra*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

NCTM. 2000. *Executive summary. Principles and standards for shool mathematics*. Consultado en http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standar ds/12752_exec_pssm.pdf el 6 de septiembre de 2010.

Nubert G., Binko J. 1992. *Inductive reasoning in the secondary classroom.* National Education Association, Washington, D.C. pp. 11-18.

Sriraman B. 2004. Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, No. 23, pp. 205-222.

Trujillo P., Castro E., Molina M. 2009. Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En González, M. J., González, M. T. y Murillo, J. (Editores), *Investigación en Educación Matemática*, XIII. pp. 511-521.

Vogel R. 2005. Patterns: A fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, Vol. 37, No. 5, pp. 445-449.

Zazkis R., Liljedahl P. 2002. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49. No. 3, pp. 379-402.