Bol. Mat. **17**(1), 59–76 (2010)

La matemática de las finanzas

Pablo Amster[1]

Departamento de Matemáticas — FCEyN
Universidad de Buenos Aires y CONICET
Argentina

¿Qué relación tiene el comportamiento de los mercados financieros y los activos riesgosos con las leyes de la termodinámica, la entropía o las teorías de Einstein? En este artículo se exponen de manera elemental algunas de las ideas básicas del modelo matemático para la valuación de instrumentos financieros que permitió a uno de sus creadores obtener el Premio Nobel de Economía: el modelo de Black y Scholes.

Palabras claves: valuación de opciones, modelo de Black–Scholes, movimiento browniano, ecuación del calor.

What's the connection between the behavior of financial markets and risky assets with the laws of thermodynamics, entropy, or Einstein's theories? In this article, we present in an elementary way some of the fundamental ideas of the mathematical model for pricing financial instruments that allowed one of its creator to obtain the Nobel Prize in Economics: the Black–Scholes model.

Keywords: option pricing, Black–Scholes model, Brownian motion, heat equation.

MSC: 91B25, 91G20.

[1] `pamster@dm.uba.ar`

1 Paseos por el mercado

1.1 El que no arriesga, no gana

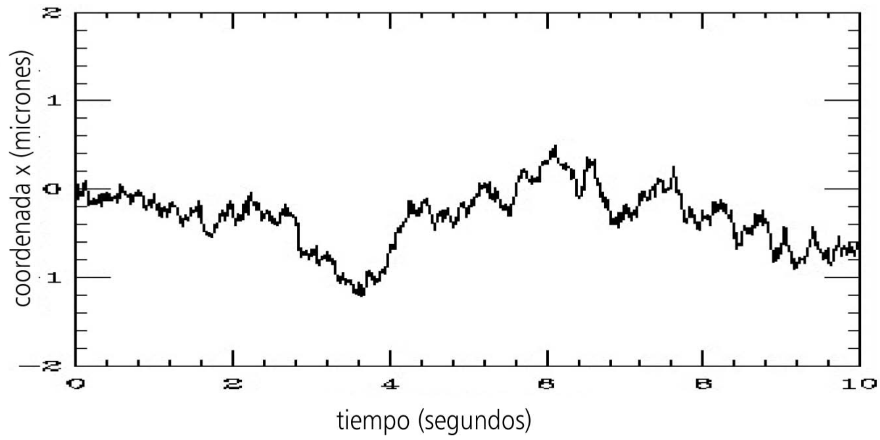
Muchas de las grandes ideas comienzan con un puñado de observaciones triviales. Y, dado que existe un número mucho mayor de trivialidades que de grandes ideas, vale la pena describir los pasos que llevaron a la deducción de la ecuación de Black–Scholes, una de las fórmulas más celebradas en Finanzas durante las últimas tres o cuatro décadas [2], [6], [8], [10]. Este recorrido nos llevará a hablar del concepto de *riesgo*, así como de las formas que los inversores han ideado para cubrirse del mismo: los derivados financieros y la teoría de portafolios. En nuestro caso, las observaciones triviales se resumen en dos principios elementales, que podemos formular de la siguiente manera:

- **Principio 1**: $ 1 hoy vale más que $ 1 mañana.
- **Principio 2**: $ 1 seguro vale más que $ 1 riesgoso.

El primer principio brinda la base de lo que se entiende por "invertir": toda inversión debe suponer un *retorno*, que representa una medida relativa del incremento del capital con el tiempo. El segundo principio nos dice cómo debe ser ese retorno según el riesgo que la inversión entrañe. La idea es clara; si la inversión es riesgosa, es razonable esperar que el retorno sea mayor: en algn sentido, se trata de una compensación por el riesgo. La teoría de portafolios de Markowitz, que motivó otro premio Nobel, consiste en maximizar el retorno de una cartera compuesta por diferentes activos manteniendo constante el nivel de riesgo [7]. Finalmente, mencionaremos un supuesto fundamental sobre los mercados, el de *no arbitraje*, que intuitivamente postula que no existe una "máquina de hacer dinero". Pensemos en lo que ocurriría por ejemplo si una persona pudiera pedir un préstamo a una tasa del 5 % anual, y a su vez prestar a una tasa del 6%: no hacen falta muchos cálculos para descubrir una estrategia que la transforme en millonaria sin correr el menor riesgo. En efecto, si pide prestada una cantidad, digamos $ 100, y la presta inmediatamente, al cabo de un año obtendrá una ganancia neta de $ 1; si repite este procedimiento se hará de grandes ganancias mientras disfruta de su pasatiempo favorito. Se asume que el mercado no ofrece tales oportunidades; aunque en realidad algunas veces ello ocurre y algunos inversores se llenan los bolsillos, dichas oportunidades no son permanentes: enseguida el mercado vuelve a equilibrarse.

1.2 Activos hiperactivos

Hemos hablado de riesgo, lo cual parece involucrar de alguna forma al azar. Y esto es más que una asociación casual, por no decir azarosa: los modelos que se emplean para describir el comportamiento de los mercados postulan que los precios siguen un *proceso estocástico*, vale decir, un proceso en el cual los valores futuros no se pueden determinar con exactitud por más que se conozcan los valores en el presente. Más específicamente, se trata en este caso del mismo tipo de proceso que rige el choque de las partículas en un fluido, que se hizo célebre a través de los trabajos de Einstein de 1905: el *movimiento browniano*[5]. Esto, que parece un contrasentido (una ley que rige un comportamiento azaroso) puede entenderse mejor si comenzamos por una versión más sencilla, denominada *paseo al azar*: partiendo de una posición inicial nos movemos cada vez un paso hacia la derecha o hacia la izquierda, según salgan cara o cruz las sucesivas tiradas de una moneda. Si ahora pensamos que las tiradas se producen a intervalos muy cortos de tiempo (y la longitud de los pasos es cada vez más pequeña[2]), el resultado de este proceso va a presentar más o menos el siguiente aspecto:



De allí a hablar de las leyes de la termodinámica, o de la entropía, hay un corto paso: basta decir que las ecuaciones que provienen de este modelo se transforman en una fórmula clásica de la física, conocida como *ecuación del calor*. Esto no parece tan desacertado en el presente contexto, al menos si pensamos en la actividad febril que se observa en algunos mercados. Cabe destacar que las primeras publicaciones sobre

[2]Más precisamente, el modelo establece que la longitud del paso debe ser proporcional a la raíz cuadrada de la medida del intervalo temporal. Sin embargo, las razones de esta elección escapan a los alcances de este artículo.

estos asuntos no fueron las de Einstein, sino de un matemático francés llamado Bachelier, cuya tesis doctoral de 1900 llevó un sugestivo título: *Teoría de la especulación*[1]. Sin embargo, la aplicación de procesos como el movimiento browniano a las finanzas cayó en el olvido por unas cuantas décadas, al menos hasta los años cincuenta, cuando mediante estudios estadísticos se dictaminó que los precios de los activos fluctúan al azar.[3]

La medida de la variabilidad instantánea en dichos precios se determina por medio de una cantidad cuyo nombre se escucha a menudo: la *volatilidad*. En un mercado de baja volatilidad, los precios tienden naturalmente a subir a un ritmo más o menos constante; a medida que la volatilidad aumenta, tal tendencia se ve afectada por una componente riesgosa, que posibilita subas o bajas inesperadas. Esta idea permitió plantear las hipótesis de *mercado eficiente*, que resultaron decisivas en la fórmula dada en 1973 por Black y Scholes para la valuación de opciones y otros derivados.

1.3 Si de optar se trata ...

Hemos mencionado a los derivados, que son instrumentos financieros cuyo valor depende (se “deriva”) del valor de otro activo, denominado *subyacente*. Entre ellos, uno de los más conocidos es la opción, un contrato que da derecho a su poseedor a comprar o vender cierta cantidad de unidades del activo subyacente por un precio establecido, en determinada fecha futura.[4] Le da el derecho de hacerlo ... siempre que le convenga: de esta forma, el poseedor de una opción se protege del riesgo que implicaría comprar o vender directamente el activo. Por ejemplo, el poseedor de una opción de compra o *call* por $ 10 sobre una acción de cierta compañía al 20 de julio de 2011, al llegar esta fecha decide si ejerce o no la opción en función de lo que valga el activo. Si vale por ejemplo $ 11, entonces conviene ejercer, pues la opción da el derecho a comprarla a $ 10; en cambio, si la acción vale $ 9 la opción no se ejerce, y toda la pérdida

[3] Quizás parezca excesivo plantear que los precios de los activos fluctúan al azar; sin embargo, existen diversos argumentos a favor de estos modelos. En el fondo, podemos decir que los matemáticos no están en desacuerdo con lo que plantea Alejandro Dumas en su relato histórico *Murat* [4]:

Los resultados más importantes los producen, a veces, causas tan mínimas que se podría creer que Dios y Satanás se juegan la vida y la muerte de los hombres a los dados y abandonan al azar el auge y la caída de los imperios.

[4] En realidad, esta descripción corresponde a la denominada opción *europea*, que solo puede ser ejercida en su fecha de expiración. En cambio, la opción *americana* puede ejercerse en cualquier momento hasta dicha fecha. Como es de esperar, el tratamiento matemático de esta última resulta más complejo.

se reduce al precio pagado por adquirirla. De esta forma, las opciones pueden pensarse como una manera de transferir riesgo de unos a otros. El problema es: ¿cómo se calcula el precio de un contrato así? Aquí entra en juego el desarrollo de Black y Scholes, basado en el comportamiento de los activos esbozado en la sección anterior. Lo que se propone es una estrategia denominada *hedging*, que consiste en construir un portafolio libre de riesgo, vale decir, insensible a las subas o bajas del activo subyacente. La estrategia es instantánea: para mantener el portafolio se requiere en todo momento comprar o vender opciones y unidades del activo. Ahora bien, esto no significa que deba uno correr de un lado a otro del mercado comprando y vendiendo como un desaforado: la definición de este portafolio es puramente teórica, y no tiene otro fin que el de permitir deducir una fórmula "justa" para valuar la opción. Dicho y hecho: la construcción, sumada a la hipótesis de no arbitraje, conduce por medio de una deducción matemática a la obtención de la preciada fórmula, estrella indiscutida de las finanzas en los últimos tiempos. Hoy los operadores tienen en sus computadoras programas capaces de calcular en un momento el precio Black–Scholes de opciones con diferentes fechas y precios de ejercicio, a partir del precio que tiene el activo en el presente. La conclusión es notable, en especial si se tiene en cuenta que hemos partido de unos pocos principios elementales y, claro está, unos paseos de lo más azarosos.

2 Precisión y rigurosa lógica

En la sección previa hemos expuesto las ideas básicas del modelo de Black y Scholes para la valuación de instrumentos financieros. Profundizaremos ahora las nociones matemáticas fundamentales que llevan a la deducción de la celebrada fórmula.

2.1 Los laboriosos embriones del pensamiento

En su célebre *Filosofía de la composición*, el genial Edgar Allan Poe [9] cuenta la forma en que compuso su poema *El cuervo*, una de las más perfectas obras producidas por la literatura de todos los tiempos. Su intención se resume en un párrafo que acaso pueda sorprender al lector desprevenido:

Mi deseo es demostrar que ningún punto de la composición puede ser atribuido a la casualidad o la intuición, y que la obra ha marchado, *paso a paso, hacia su solución con la precisión y rigurosa lógica de un problema matemático.*

A tales fines, explica sus primeras consideraciones, referidas al hecho de producir un efecto; más precisamente, muestra de qué forma su anhelo de transmitir la más pura Belleza lo llevó a establecer que su trabajo se iba a desenvolver en torno a un estribillo, una fórmula breve destinada a la conclusión de cada estrofa. Llegado este punto, dice Poe:

En tal investigación, hubiese sido absolutamente imposible no elegir nevermore, nunca más [...] El desideratum siguiente fue: ¿cuál será el pretexto elegido para emplear continuamente las palabras nunca más?

A partir de allí, lo que sigue es el resultado de dejar que se desencadenen las consecuencias naturales de esta elección inicial. Algo similar dijo el sabio Maimónides en su interpretación del texto bíblico del Génesis: por ejemplo, cuando se lee que el mundo ha sido creado en siete días, en verdad debe entenderse que hay un solo acto de creación, el del comienzo. En el comienzo Dios puso en marcha el espacio y el tiempo; lo demás es puro florecimiento, desarrollo de la obra ya hecha. El caso que presenta Poe es bastante ilustrativo. El clima producido por su estribillo, dice, no puede sino responder a los pesares de un enamorado que ha perdido a su amada; la aparición repentina del pájaro le proporciona una distracción, casi un alivio para sus lóbregos pensamientos. Los dos seres mantienen un diálogo que al comienzo muestra una incoherencia tosca, animal:

Dime: ¿Cuál tu nombre, cuál
en el reino plutoniano de la noche y de la niebla ... ?
Dijo el cuervo: "Nunca más".

Sin embargo, las sucesivas preguntas van socavando en las respuestas del ave, cada vez más certeras, de modo tal que los ánimos del amante comienzan a inquietarse. El joven adquiere la conciencia de que su amada ha muerto; por fin, con la esperanza última de poder reunirse con ella, cuanto menos en otra vida, el desesperado pregunta si volverá a estrechar en su seno a la amada Leonora. Inexorable, el ave grazna una seca respuesta: *nevermore.*[5]

[5]De este modo, el poema proporciona un magnífico ejemplo de un proceder que no deja de ser frecuente en la actividad científica: conociendo de antemano la respuesta, de lo que se trata es de reformular la pregunta.

Un clima tan melancólico puede parecer un oscuro presagio para presentar un modelo matemático para las finanzas. En efecto, quizá nuestra primera imagen sea la de un preocupado inversionista que plantea una angustiosa pregunta para encontrarse con el invariable estribillo:

¿Volveré a ver mi dinero? *Nevermore.*

Sin embargo, el modelo que vamos a describir goza de una amplia popularidad, más allá de las eventuales preocupaciones que aquejan a quienes juegan en esto su fortuna. Muchas obras artísticas se desarrollan tal como lo describe Poe, de atrás hacia delante. La Matemática, para muchos un Arte, no escapa a esta regla: en particular, la ecuación que se deduce de Black–Scholes supone en algún sentido un tiempo que se recorre hacia atrás.[6] No llegaremos al extremo de decir que su desarrollo sigue "la precisión y rigurosa lógica de un problema literario", aunque permite dar una buena descripción de lo que es un modelo. En esto los matemáticos suelen mostrarse bien dispuestos, aunque eso no siempre ocurre con todo el mundo. Al menos según la opinión de Poe:

Muchos literatos, particularmente los poetas, gustan de dejar entender que componen gracias a una especie de sutil frenesí, o de una intuición estética, y verdaderamente se estremeceran si se vieran obligados a permitir al público que lanzara una mirada detrás de la escena, y que contemplara los laboriosos e indecisos embriones del pensamiento ....[7]

2.2 Modelo para armar

En la primera parte hemos introducido la noción de retorno como una medida relativa del beneficio de una inversión respecto del capital inicial. En términos matemáticos, si $X(t)$ es el valor del activo en el momento t, el retorno en un intervalo de tiempo que va desde el instante 0 hasta un instante final T se calcula por medio de la siguiente fórmula:

[6] La idea no parece muy distinta a las descripciones que hace Lewis Carroll del curioso mundo que encuentra Alicia en *A través del espejo.* Por ejemplo, en el capítulo "Lana y agua" se explican algunos incisos de su controvertido sistema judicial:

Ahora está en prisión, condenado, y el proceso no empezará hasta el miércoles próximo. Naturalmente, el crimen viene al final.[3]

[7] Ya que hemos comparado la creación literaria con la actividad matemática, vale la pena recordar una anécdota del gran matemático alemán David Hilbert. Se cuenta que uno de sus alumnos abandonó su curso sin previo aviso. Cuando preguntó por él, le dijeron que había dejado la matemática para dedicarse a la poesía, a lo que Hilbert respondió: "Siempre pensé que le faltaba imaginación para ser matemático".

$$R = \frac{X(T) - X(0)}{X(0)}\,.$$

En otras palabras, si se conoce el retorno R y el valor inicial $X(0)$ del activo, su valor al final del intervalo será:

$$X(T) = (1 + R)X(0).$$

El principio de no arbitraje postula la existencia de un retorno "libre de riesgo", por ejemplo el retorno de un bono, según el cual crecen todos los activos no riesgosos. Este punto va a ser clave en nuestro desarrollo. Podría pensarse que su validez es más que dudosa, aunque resulta prácticamente indispensable para poder plantear un modelo razonable: en definitiva, queda claro que el arte de hacer matemática y el arte de hacer dinero son cosas bien diferentes.

Nos hemos referido ya a las opciones como una forma de transferir riesgo. A modo de ejemplo comenzaremos por una situación especialmente sencilla, y por cierto (quizás a consecuencia de ello) nada realista: queremos valuar una opción para comprar por \$ 100 dentro de un mes cierto activo que hoy vale \$ 95. Hasta allí, nada del otro mundo .... Pero ahora supondremos que conocemos los posibles valores del activo para el mes próximo: digamos que alguien, acaso proveniente del "reino plutoniano de la noche y de la niebla", nos dice que con certeza el activo subirá a \$ 120, o bien bajará a \$ 90. Esto significa que nuestra opción de compra valdrá \$ 20 si el activo sube, y no tendrá ningún valor si el activo baja:

$$\begin{array}{ccc} & & 120 \\ & & 20 \\ & \nearrow & \\ 95 & & \\ & \searrow & \\ & & 90 \\ & & 0 \end{array}$$

El problema consiste en obtener el valor presente V de la opción. Pero en un caso así, la estrategia de hedging mencionada en la sección previa es sencilla: para construir un portafolio insensible a las subas o bajas, basta comprar un número Δ de unidades del activo, y vender una opción.[8] De esta forma el valor del portafolio dentro de un mes será de

$$\Delta \cdot 120 - 20\,,$$

en caso de que el activo suba, y

$$\Delta \cdot 90 - 0\,,$$

en caso de que baje. Entonces buscamos un valor de Δ para que el portafolio valga siempre igual, pase lo que pase:

$$\Delta \cdot 120 - 20 = \Delta \cdot 90 - 0\,,$$

$$\Delta = 2/3\,.$$

De esta forma, el valor del portafolio dentro de un mes será el mismo, en cualquiera de las dos situaciones:

$$2/3 \cdot 120 - 20 = 2/3 \cdot 90 = 60.$$

En definitiva, nuestra cartera se ha convertido en un bien libre de riesgo, lo que permite entonces decir, de acuerdo con el principio de no arbitraje, que crece según el retorno libre de riesgo R. Para obtener su valor actual, debemos dividir el resultado antes obtenido por $1 + R$, y de esta forma podremos calcular el valor actual V de la opción. Por ejemplo, supongamos que el retorno es del 1 %, vale decir: $R = 0,01$. Entonces el valor actual del portafolio está dado por $60/1,01 = 59,4059\cdots$. Por otro lado, sabemos que su composición es de 2/3 unidades del activo (que hoy vale \$ 95) menos el valor de la opción. Se deduce entonces que

$$2/3 \cdot 0,95 - V = 59,4059\cdots\,,$$

es decir:

$$V = 3,9273\cdots\,.$$

Cabe hacer aquí una pequea observación. Incluso en este modelo simple estamos reconociendo un comportamiento azaroso para el activo, pues no sabemos con certeza su valor futuro. Se podría pensar que

[8] En términos más precisos, se dice que asumimos una posición *long* en el activo y una posición *short* en la opción.

con algo más de información uno sería capaz de predecirlo; una postura extrema en tal dirección es la del determinismo, reflejado en una notable frase que suele atribuirse al matemático francés Poincaré: *El azar es la medida de nuestra ignorancia.*[9] Sin embargo, la estrategia de hedging no se basa en intentar predecir el valor futuro del activo subyacente; más aun, ni siquiera hemos mencionado las probabilidades de que ocurra una suba o una baja. Para valuar la opción, imaginamos un portafolio que nos permita cubrirnos del riesgo, sin importarnos cuál es la chance de perder o ganar al comprar directamente el activo. La situación anterior puede generalizarse de la siguiente manera. Supongamos una opción para comprar un activo que hoy vale S, en determinado momento futuro T por cierto valor K.[10] Como antes, nuestro adivino plutoniano nos dice que el activo en T puede tomar los valores $S \cdot u$ o $S \cdot d$, en donde u y d son dos factores determinados. Esto corresponde a posibles subas o bajas del activo (u y d provienen respectivamente de "up" y "down"), de modo que suele suponerse (aunque en rigor no hace falta) que $u > 1 > d$. La opción tomar los valores V_u o V_d correspondientes a cada una de las dos posibilidades; al tratarse de una opción de compra, lo razonable es pensar, como antes, que $V_u = S \cdot u - K$ y $V_d = 0$. En cualquier caso, se trata de dos cantidades calculables: es fácil establecer el valor de una apuesta una vez que las cartas están sobre la mesa. Se tiene, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{matrix} S \cdot u \\ V_u \end{matrix} \\
\begin{matrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{V} \end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \begin{matrix} S \cdot d \\ V_d \end{matrix}
\end{tikzcd}
$$

Construimos ahora un portafolio como el anterior

[9]Hablando de medidas, existe una cantidad de gran importancia en la teoría de probabilidades, que intuitivamente mide el grado de incertidumbre de un sistema. Se trata de la *entropía*, también definida en la física y en especial en la teoría de la información en donde, a grandes rasgos, puede decirse que la información reduce la entropía.

[10]K suele denominarse "precio de ejercicio" o *strike price.*

$$\Delta \cdot S \cdot u - V_u = \Delta \cdot S \cdot d - V_d \,.$$

De esta igualdad se obtiene fácilmente que

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S \cdot u - S \cdot d}\,,$$

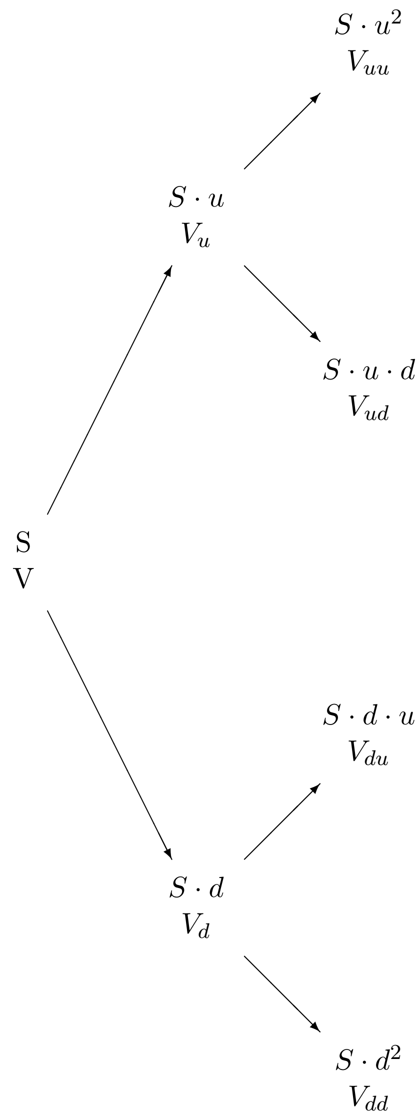
y, en definitiva, teniendo en cuenta el retorno libre de riesgo R resulta:

$$V = \frac{1}{1+R}\left(\frac{1+R-d}{u-d}V_u + \frac{u-(1+R)}{u-d}V_d\right)\,.$$

Cabe señalar que lo importante no es la expresión en sí, sino el hecho de que la opción se puede valuar por medio de una fórmula que se resume de la siguiente manera: $V = \frac{1}{1+R}(p \cdot V_u + q \cdot V_d)$, en donde p y q son dos coeficientes cuya suma (es fácil verificarlo) da 1. Pero podemos ir más lejos y afirmar que se trata de cantidades no negativas.[11] Ahora bien: ¿qué es lo primero que a uno se le ocurre decir acerca de dos números mayores o iguales a 0, cuya suma es 1? No es aventurado suponer que son probabilidades: en tal caso, es forzoso pensar a p como la probabilidad de que el activo suba, y a q como la probabilidad de que baje. El valor de V, en consecuencia, resulta ser el valor esperado de la opción en el futuro, llevado a su valor actual por medio del factor $\frac{1}{1+R}$, en general denominado *factor de descuento.* Esta suposición es muy elegante, pero esencialmente incorrecta. Habíamos postulado, hace apenas un par de párrafos, que la estrategia de hedging prescindía del conocimiento de las probabilidades de las subas y las bajas, de modo que ahora no podemos declarar que los anteriores p y q tienen ese rol. Sin embargo, el análisis previo nos dice que es válido interpretarlos como probabilidades, en un

[11] Esto se debe al supuesto de no arbitraje: a modo de ejemplo, veamos que si fuera $p < 0$ podríamos armar una cartera compuesta por una unidad del activo y cierta cantidad de unidades de un activo no riesgoso por un valor igual a $-S$. ¿Qué significa esto? Es lo que antes describimos como posición *short*, vale decir, estamos "vendidos" en dicho activo, de modo que al final del período tendremos que pagar lo que el activo valga en ese entonces. Esa cartera hoy vale $S - S = 0$. Por otro lado, el activo que "vendimos" es no riesgoso, de modo que su valor al final del período se calcula multiplicando por $1 + R$. De esta forma, en el peor de los casos posibles (que el activo riesgoso pase a valer $S \cdot d$), nuestra cartera vale $S \cdot d - S \cdot (1 + R)$. Como supusimos que p es negativo, entonces nuestra cartera, que hoy nos cuesta 0, en cualquiera de los estados futuros toma un valor positivo. Así, hemos presentado una sencilla manera de fabricar dinero de la nada: en suma, se trata de una oportunidad de arbitraje, lo que contradice nuestra hipótesis fundamental. Se deduce que $p \geq 0$, y de forma similar lo mismo se prueba para q.

mundo libre de oportunidades de arbitraje.[12] En un mundo así, los riesgos son iguales para todos; toda la ganancia a la que se puede aspirar sin arriesgar es conocida de antemano, y se calcula siempre a partir de un mismo número que vuelve a aparecer (o mejor dicho, *retorna*) una y



[12]A pesar de su carácter elemental, esta observación adquiere gran importancia en situaciones más generales, a tal punto que ha dado lugar a un teorema al que los matemáticos llaman "fundamental": se trata del *Fundamental Theorem of Arbitrage Pricing*.

otra vez como el estribillo de Poe: el retorno R. El paso siguiente, casi una continuaciń natural de nuestro ejemplo, consiste en suponer que el proceso se repite a lo largo de dos, tres o varios períodos consecutivos. Por simplicidad, supondremos en cada período siempre los mismos coeficientes u y d para las subas y bajas; de esta forma queda determinado un árbol que en principio presenta el siguiente aspecto aunque luego se simplifica muchísimo gracias a la propiedad conmutativa (en resumen, al cabo de n períodos aparecen exactamente $n+1$ nodos, que corresponden a $n-j$ subas y j bajas, con $j=0,\cdots,n$).

El valor de la opción en cada nodo se calcula como antes, partiendo del único valor que conocemos con certeza: el valor al final del último período, cuando la opción expira. De atrás hacia adelante, se calculan los valores intermedios hasta llegar al que realmente nos interesa: el valor presente V. No es difícil verificar que los cálculos son similares a los que hicimos para un solo período; obteniéndose nuevamente dos valores p y q. Si los interpretamos como probabilidades, entonces el comportamiento (suba o baja) en cada etapa es independiente de lo que sucedió en las etapas anteriores: por ejemplo, la probabilidad de que el activo suba tres veces consecutivas es $p\cdot p\cdot p=p^3$. El lector que haya estudiado un curso básico de probabilidades no se sorprenderá de ver aparecer en este modelo a una de sus figuras más distinguidas: la denominada *distribución binomial*. Pero más allá de estos detalles, cabe plantear ahora una manera ligeramente distinta de estudiar el problema. En lugar de suponer un proceso que se repite a lo largo de varios períodos, imaginemos un único perodo de longitud T al que dividimos en cierto número n de partes iguales. El árbol binomial es el mismo, aunque ahora el tiempo transcurrido entre cada nodo y los nodos consecutivos es $\frac{T}{n}$, un valor que se hace muy pequeño si n es grande. Esto lleva a preguntarse: ¿qué ocurre si tomamos valores de n cada vez mayores? La respuesta a esta pregunta es el tema central de la próxima sección.

2.3 El gran salto

Volvamos por un momento a Poe. En uno de sus cuentos policiales más famosos, *Los crímenes de la calle Morgue*, el narrador dedica algunas páginas a presentar a quien se transformara en uno de los personajes clásicos del género: Auguste Dupin. Para dar una muestra de sus cualidades excepcionales, relata la forma en que una vez logró reproducir con total exactitud los cursos del pensamiento de su algo desconcertado interlocutor. Según cuenta la historia, Dupin y el narrador caminaban en silencio hasta que al cabo de unos quince minutos el primero lanza una frase que encaja perfectamente con lo que estaba pensando su amigo:

En realidad, ese muchacho es demasiado pequeño y estaría mejor en el Théatre des Variétés.

Después de la sorpresa, sobreviene la explicacón, aun más enigmática:

Ha sido el vendedor de frutas quien le ha llevado a usted a la conclusión de que el remendón de suelas no tiene suficiente estatura para representar el papel de Jerjes?

Pero antes de que se lo acuse justamente de "mandar fruta",[13] Dupin detalla cada una de las etapas del recorrido entre un punto y otro:

En sentido inverso, los más importantes eslabones de la cadena se suceden de esta forma: Chantilly, Orion, doctor Nichols, Epicuro, estereotomía, los adoquines y el vendedor de frutas.

Así, lo que parecía un verdadero misterio comienza de a poco a cobrar sentido:

Cuando cruzábamos hacia esta calle, un frutero que traía una gran canasta en la cabeza pasó rápidamente a nuestro lado y le empujó a usted contra una pila de adoquines correspondiente a un pedazo de la calle en reparación. Usted pisó una de las piedras sueltas, resbaló, torciéndose ligeramente el tobillo; mostró enojo o malhumor, murmuró algunas palabras, se volvió para mirar la pila de adoquines y siguió andando en silencio. Mantuvo usted los ojos clavados en el suelo, observando con aire quisquilloso los agujeros y los surcos del pavimento (por lo cual comprendí que seguía pensando en las piedras), hasta que llegamos al pequeño pasaje llamado Lamartine, que con fines experimentales ha sido pavimentado con bloques ensamblados y remachados. Aquí su rostro se animó y, al notar que sus labios se movían no tuve dudas de que murmuraba la palabra "estereotomía" término que se ha aplicado pretenciosamente a esta clase de pavimento. Sabía que para usted sería imposible decir "estereotomía" sin verse llevado a pensar en átomos y pasar de ahí a las teorías de Epicuro; ahora bien, cuando discutimos no hace mucho este tema, recuerdo haberle hecho notar de qué curiosa manera "por

[13] En Argentina, esta expresión es equivalente a mentir, o más bien decir cualquier cosa.

lo demás desconocida" las vagas conjeturas de aquel noble griego se han visto confirmadas en la reciente cosmogonía de las nebulosas; comprendí, por tanto, que usted no dejaría de alzar los ojos hacia la gran nebulosa de Orión, y estaba seguro de que lo haría. Efectivamente, miró usted hacia lo alto y me sentí seguro de haber seguido correctamente sus pasos hasta ese momento. Pero en la amarga crítica a Chantilly que apareció en el Musée de ayer, el escritor satírico hace algunas penosas alusiones al cambio de nombre del remendón antes de calzar los coturnos, y cita un verso latino sobre el cual hemos hablado muchas veces. Me refiero al verso: Perdidit antiquum litera prima sonum. *Le dije a usted que se refería a Orión, que en un tiempo se escribiá Urión; y dada cierta acritud que se mezcló en aquella discusión, estaba seguro de que usted no la había olvidado. Era claro pues, que no dejaría de combinar las dos ideas de Orión y Chantilly. Que así lo hizo, lo supe por la sonrisa que pasó por sus labios. Pensaba usted en la inmolación del pobre zapatero. Hasta ese momento había caminado algo encorvado, pero de pronto le vi erguirse en toda su estatura. Me sentí seguro de que estaba pensando en la diminuta figura de Chantilly. Y en este punto interrumpí sus meditaciones para hacerle notar que, en efecto, el tal Chantilly era muy pequeño y que estaría mejor en el Théatre des Variétés.*

Cabe decir que el hallazgo de Black y Scholes resultó, en casi todos sus aspectos, menos macabro que el de los gendarmes de la policía parisina, cuya publicación en la *Gazette des Tribunaux* atrajo la atención de Dupin. Aun así, podemos recurrir a una paráfrasis para explicarlo:

En sentido inverso, los más importantes eslabones de la cadena se suceden de esta forma: Ecuación del calor, Black–Scholes, no arbitraje, Lema de Ito, Movimiento Browniano, Teorema Central del Límite, paseos al azar.

Casi convendra decir que nuestro "frutero" es en realidad el modelo binomial; a partir de allí, es bastante inmediato pensar en los paseos al azar: procesos en los cuales cada paso es independiente de los anteriores, definidos a partir de la tirada de una moneda. Si el resultado es cara, nos movemos un paso hacia la derecha, si es cruz nos movemos un paso a la izquierda. Si la moneda es equilibrada, el valor esperado al cabo de n pasos es obviamente 0. Entra ahora en acción la idea mencionada en la sección previa, de considerar un intervalo temporal desde 0 hasta T, al cual dividimos en n intervalos de longitud n. Los "pasos" de nuestro paseo azaroso deben ser más pequeños cada vez; sin entrar en detalles diremos que se los elige de modo tal que la *varianza*, que brinda una medida de dispersión respecto del valor esperado, sea siempre proporcional al tiempo transcurrido. Pero entonces la tentación de cualquier matemático será la de hacer tender n a infinito; vale decir, efectuar el *paso al continuo.* Intuitivamente, se piensa al intervalo $[0, T]$ como la unión de un número infinito de intervalos de longitud infinitamente pequeña.

¿Qué resulta de todo esto? Como el proceso para cualquier número de pasos es binomial, un teorema muy importante de la teoría de probabilidades denominado *Teorema central del límite* nos dice cómo deben ser o, mejor dicho, a qué se parecen estos recorridos al aumentar cada vez más el valor de n. Lo que se obtiene, cuando n tiende a infinito, es aquel tipo de proceso denominado *movimiento browniano*, entre cuyas principales características figura la de ser markoviano. A grandes rasgos, esto significa que lo que ocurre a partir de cualquier instante t es independiente de lo sucedido hasta allí: en el caso de las tiradas de una moneda tal propiedad fue explicada por el matemático Joseph Bertrand por medio de una frase que se haría célebre: *La moneda no tiene memoria.*

La anterior construcción permite proponer un interesante modelo para un activo riesgoso, cuyo valor se expresa como una función S dependiente del tiempo t. Como se trata de un proceso continuo, lo que interesa ahora no es el retorno al cabo de un intervalo, sino una noción de retorno *instantáneo.* Una parte de este retorno consiste en cierta tasa fija, cuyo valor depende del activo, que en caso de no existir riesgo permitiría calcular con exactitud su valor en cualquier instante futuro. Pero el activo es riesgoso, de modo que debe agregarse al modelo una componente estocástica, regida por un movimiento browniano y un factor de gran importancia: la volatilidad. Si este factor es alto, eso quiere decir que los precios del activo pueden tener una gran variabilidad y en consecuencia el riesgo aumenta.

Los matemáticos han desarrollado técnicas que permiten lidiar con este tipo de procesos; en particular, si expresamos el valor de una opción en términos del activo subyacente y el tiempo, se obtiene una función de dos variables $V(S, t)$. El resultado que se aplica aquí es también una suerte de "teorema fundamental", pero ahora del cálculo estocástico, que se conoce como *Lema de Ito* y dice, en términos bien precisos, cuál es el proceso que sigue V. Un proceso que naturalmente es también estocástico, pues se apoya sobre un activo riesgoso.

Restan unos pocos, decisivos pasos. La estrategia de hedging consiste como siempre en fabricar un portafolio insensible a las subas o bajas inesperadas; un portafolio que en realidad se va modificando en forma continua, de acuerdo al comportamiento que tenga el impredecible activo. Pero al tratarse de un bien no riesgoso, el principio de no arbitraje nos dice que su crecimiento estará regido por una tasa libre de riesgo.[14] De allí se obtiene una ecuación para V; es la famosa ecuación de Black y Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, S^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} = r\, V\,.$$

En manos de un matemático, esta ecuación (que se denomina *diferencial*, pues establece una relación entre V y sus derivadas) es fácil de transformar por un sencillo cambio de variables en otra que ha sido muy estudiada a lo largo de dos siglos: la ecuación del calor, establecida por el genial físico y matemático Fourier. De esta forma, las técnicas desarrolladas para resolver esta última son suficientes para conocer con exactitud cómo son las soluciones de la ecuación de Black–Scholes. En otras palabras, si se conocen los parámetros del modelo (la tasa libre de riesgo y la volatilidad) es posible calcular el valor de una opción, para cualquier precio de ejercicio y cualquier fecha de expiración.

[14] Debemos notar aquí una pequeña diferencia con el modelo de la subsección previa, en el cual hablamos de un *retorno* libre de riesgo. Pero en el modelo continuo es preciso medir el crecimiento instantáneo y eso lleva a introducir la noción de “tasa”. Más aun, en este punto Dupin podría decir:

Sabía que para usted sería imposible decir “tasa” y “continuo” sin verse llevado a pensar en la función exponencial, y pasar de ahí al número e.

La manera de llegar a estas “extrañezas” es en realidad bastante conocida. Para calcular el capital obtenido al invertir una cantidad a una tasa r al cabo de n períodos, al capital inicial se lo debe multiplicar por $(1+r)^n$. Esto se debe a que al final de cada período el nuevo interés se calcula a partir del capital ya incrementado por el rendimiento en los períodos anteriores. Si ahora suponemos que la tasa es anual, y la capitalización es por ejemplo mensual, es razonable pensar para cada mes una tasa proporcional de $\frac{r}{12}$, y el capital valdrá, al cabo de un año: $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$ veces el capital inicial. Pero si suponemos que la capitalización es continua, entonces es fácil mostrar que al cabo de un período de T años el factor que multiplica el capital inicial debe ser e^{rT}, en donde e es la constante también llamada *número de Euler*, cuyo valor es $2,71828182845904523536\cdots$

References

[1] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17, 21 (1900).

[2] F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Polit. Econ. **81**(3), 637 (1973).

[3] L. Carroll, *A través del espejo* (Edicomunicación, Madrid, 1998).

[4] A. Dumas, *Los caballeros templarios — Murat* (Editorial El Mundo, Madrid, 1998).

[5] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Ann. Phys. (Leipzig) **322**(8), 549 (1905).

[6] J. Hull, *Options, Futures, and other Derivatives* (Prentice — Hall, 1997).

[7] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, J. Finance **7**(1), 77 (1952).

[8] R. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, Bell J. Econ. Manag. Sci. (The RAND Corporation) **4**(1), 141 (1973).

[9] E. A. Poe, *Obras Completas* (Editorial Claridad, Madrid, 1982).

[10] P. Wilmott, S. Howison and J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction* (Cambridge University Press, 1995).