Bol. Mat. **16**(2), 167–183 (2009) 167

Soluciones viscosas para un sistema de leyes de conservación

Miller Cerón[1]

Departamento de Matemáticas y Estadística
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Nariño

En este artículo se prueba la existencia y unicidad local para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas cuasilineales comúnmente llamadas leyes de conservación usando el teorema del punto fijo, por último se aplica este resultado a los sistemas relacionados con: el sistema de flujo cuadrático y el sistema de Le Roux, para los cuales encontramos la existencia global por aplicación del principio del máximo.

Palabras Claves: leyes de conservación, núcleo del calor, soluciones viscosas, principio del máximo.

In this article is proved the local existence and uniqueness for a system of quasilinear parabolic partial differential equations using the fixed point theorem, finally is applied this result to systems related to: Quadratic Flux and Le Roux to get the global solution by application of maximum principle.

Keywords: conservation laws, Kernel heat, viscosity solutions, maximum principle.

MSC: 35B40, 35L65.

1 Introduction

Se considera el siguiente problema de Cauchy para el sistema cuasilineal parabólico:

$$\begin{aligned}
u_t^1 + f_1(u^1, u^2, \cdots, u^n, x, t)_x + g_1(u^1, u^2, \cdots, u^n, x, t) &= \varepsilon\, u_{xx}^1 \,, \\
&\vdots \\
u_t^n + f_n(u^1, u^2, \cdots, u^n, x, t)_x + g_n(u^1, u^2, \cdots, u^n, x, t) &= \varepsilon\, u_{xx}^n \,,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

[1] millercg@udenar.edu.co

con datos iniciales medibles acotados

$$\begin{aligned} u^1(x,\,0) &= u_0^1(x),\,\cdots,\,u^n(x,\,0)=u_0^n(x)\,, \\ \left|u_0^1(x)\right| &\leq M,\,\cdots,\,|u_0^n(x)|\leq M\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Para el cual se prueba la existencia y unicidad de la solución por medio del teorema del punto fijo. La perturbación parabólica adherida a la derecha(coeficiente de viscosidad) que aparece en (1.1), es parte del método estándar conocido como método de viscosidad, utilizado para obtener la solución débil del sistema de leyes de conservación asociado a (1.1). El teorema de existencia y unicidad del sistema cuasilineal parabólico sin funciones fuentes se encuentra en [3, 4]; el desarrollo aquí expuesto amplia el trabajo hecho en [1, 2] pues se consideran funciones fuentes más generales.

2 Solución viscosa de leyes de conservación con fuente

Teorema 2.1. *(a) Supongamos que g_i son funciones localmente Lipschitz para $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$, acotadas y continuas para (x, t) en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces el problema de Cauchy (1.1), (1.3) tiene única solución $(u^{1\varepsilon}(x,t), \cdots, u^{n\varepsilon}(x,t)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$ para τ_0 pequeño el cual depende solo de la norma L^∞ de los datos iniciales y,*

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\right| \leq 2\,M,\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,t)| \leq 2\,M,\,\forall(x,\,t)\in\mathbb{R}\times[0,\,\tau_0)\;;$$

(b) Además, si la solución $(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon})$ tiene estimaciones a priori

$$\|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\|_{L^\infty} \leq M(T),\,\cdots,\,\|u^{n\varepsilon}(x,\,t)\|_{L^\infty} \leq M(T),\,\forall t\in[0,\,T] \tag{2.1}$$

entonces la solución $(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon})$ existe sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Particularmente si existe $N > 0$ tal que

$$\|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\|_{L^\infty\mathbb{R}\times[0,\infty)} \leq N,\,\cdots,\,\|u^{n\varepsilon}(x,\,t)\|_{L^\infty\mathbb{R}\times[0,\infty)} \leq N\,, \tag{2.2}$$

entonces la solución $(u^{1\varepsilon}(x,t), \cdots, u^{n\varepsilon}(x,t))$ existe sobre $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Demostración. (a) El problema de Cauchy (1.1)–(1.3) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$
\begin{aligned}
u^i(x,\,t) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_0^i(\xi)\, G(x-\xi,\,t)\, d\xi \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_i(u^1(\xi,\,\tau),\,\cdots,\,u^n(\xi,\,\tau))\, G_\xi(x-\xi,\,t-\tau)\, d\xi\, d\tau \\
& - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_i(u^1(\xi,\,\tau),\,\cdots,\,u^n(\xi,\,\tau),\,\xi,\,\tau) \\
& \qquad\qquad \times\, G(x-\xi,\,t-\tau)\, d\xi\, d\tau\,,
\end{aligned}
$$

$i = 1, \cdots, n$, donde

$$
G(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}\,.
$$

Consideremos un espacio de Banach B y un conjunto B_τ convexo y acotado, definido para todo $\tau > 0$ por:

$$
\begin{aligned}
B \;=\; & \{(u^1(x,\,t),\,\cdots,\,u^n(x,\,t)) : \\
& \qquad u^i(x,\,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\,\tau)) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\,\tau])\}\,,
\end{aligned}
$$

con la norma definida por

$$
\|(u^1,\,\cdots,\,u^n)\|_B = \sum_{j=1}^{n} \|u^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau])}\,,
$$

$$
\begin{aligned}
B_\tau \;=\; & \{(u^1(x,\,t),\,\cdots,\,u^n(x,\,t)) : \\
& \qquad u^i(x,\,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\,\tau)),\ \|u^i(x,\,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\,\tau])} \le 2M\}\,,
\end{aligned}
$$

Ahora definamos un operador $\mathbf{T}$ sobre B_τ,

$$
\mathbf{T}(u^1,\,\cdots,\,u^n) = (T_1(u^1,\,\cdots,\,u^n),\,\cdots,\,T_n(u^1,\,\cdots,\,u^n))\,,
$$

donde

$$
\begin{aligned}
& T_i(u^1,\, \cdots,\, u^n) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} u_0^i(\xi)\, G(x-\xi,\, t)\, d\xi \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_i(u^1(\xi,\, \tau),\, \cdots,\, u^n(\xi,\, \tau))\, G_\xi(x-\xi,\, t-\tau)\, d\xi\, d\tau \\
& - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_i(u^1(\xi,\, \tau),\, \cdots,\, u^n(\xi,\, \tau),\, \xi,\, \tau)\, G(x-\xi,\, t-\tau)\, d\xi\, d\tau\,,
\end{aligned}
$$

$i = 1, \cdots, n$. Probaremos que existe $\tau_o > 0$ tal que para cualquier $(u^1, \cdots, u^n) \in B_{\tau_0}$, $\mathbf{T}(u^1, \cdots, u^n) \in B_{\tau_0}$ y que es una contracción.

Sean $(u^1, \cdots, u^n), (u_1^1, \cdots, u_1^n), (u_2^1, \cdots, u_2^n) \in B_\tau$. Puesto que las funciones $f_i,\ g_i$ son continuas, las funciones g_i son acotadas para (x, t) y las funciones u^i son acotadas por estar en B_τ, existe K constante positiva tal que:

$$
\begin{aligned}
|f_i(u^1,\, \cdots,\, u^n)| &\leq K\,, \\
|g_i(u^1,\, \cdots,\, u^n,\, x\,, t)| &\leq K\,,
\end{aligned}
$$

además, existe una constante $L > 0$ para la cual se tiene

$$
\begin{aligned}
& |f_i(u_2^1,\, \cdots,\, u_2^n) - f_i(u_1^1,\, \cdots,\, u_1^n)| \\
& \qquad \leq L(|u_2^1 - u_1^2| + \cdots + |u_2^n - u_1^n|)\,, \qquad (2.3a) \\
& |g_i(u_2^1, \cdots, u_2^n, x, t) - g_i(u_1^1, \cdots, u_1^n, x, t)| \\
& \qquad \leq L(|u_2^1 - u_1^2| + \cdots + |u_2^n - u_1^n|)\,. \qquad (2.3b)
\end{aligned}
$$

De lo anterior y considerando que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\, t)\, dx &= 1\,, \\
\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(x-y,\, t-\tau)|\, dy\, d\tau &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi k}}\,, \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
& |T_i(u^1, \cdots, u^n)| \\
\leq \; & \int_{-\infty}^{\infty} |u_0^i(\xi)|\, |G(x-\xi,\, t)|\, d\xi \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(u^1, \cdots, u^n)|\, |G_\xi(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi\, d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |g_i(u^1(\xi,\,\tau), \cdots, u^n(\xi,\,\tau),\, \xi,\, \tau)|\, |G(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi\, d\tau \\
\leq \; & M \int_{-\infty}^{\infty} |G(x-\xi,\, t)|\, d\xi + K \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_\xi(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi\, d\tau \\
& + K \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi\, d\tau \\
\leq \; & M + 2\,K \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} + K\,t\,,
\end{aligned}
$$

$i = 1, \cdots, n$. De manera similar, teniendo en cuenta las desigualdades (2.3a),(2.3b), para $i = 1, \cdots, n$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& |T_i(u_2^1, \cdots, u_2^n) - T_i(u_1^1, \cdots, u_1^n)| \\
\leq \; & \left(2\,L \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} + L\,t \right) \left(\|u_2^1 - u_1^1\|_{L^\infty} + \cdots + \|u_2^n - u_1^n\|_{L^\infty} \right);
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
& \|T_i(u_2^1, \cdots, u_2^n) - T_i(u_1^1, \cdots, u_1^n)\|_{L^\infty} \\
\leq \; & \left(2\,L \sqrt{\frac{\tau}{\pi\varepsilon}} + L\,\tau \right) \left(\|u_2^1 - u_1^1\|_{L^\infty} + \cdots + \|u_2^n - u_1^n\|_{L^\infty} \right),
\end{aligned}
$$

ahora si se suma de 1 hasta n se tiene que,

$$
\begin{aligned}
& \|\mathbf{T}(u_2^1, \cdots, u_2^n) - \mathbf{T}(u_1^1, \cdots, u_1^n)\|_B \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \|T_i(u_2^1, \cdots, u_2^n) - T_i(u_1^1, \cdots, u_1^n)\|_{L^\infty} \\
\leq \; & n \left(2\,L \sqrt{\frac{\tau}{\pi\varepsilon}} + L\,\tau \right) \left(\|u_2^1 - u_1^1\|_{L^\infty} + \cdots + \|u_2^n - u_1^n\|_{L^\infty} \right) \\
= \; & n \left(2\,L \sqrt{\frac{\tau}{\pi\varepsilon}} + L\,\tau \right) \|(u_2^1, \cdots, u_2^n) - (u_1^1, \cdots, u_1^n)\|_B\,.
\end{aligned}
$$

Si escogemos un $\tau_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,K\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\varepsilon}} + K\,\tau_0 &\leq M\,, \\ n\left(2\,L\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\varepsilon}} + L\,\tau_0\right) &< 1\,, \end{aligned}$$

entonces $\mathbf{T}(u^1, \cdots, u^n) \in B_{\tau_0}$ y es un contracción, por tanto existe un único $(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon}) \in B_{\tau_0}$ tal que $\mathbf{T}(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon}) = (u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon})$. De donde el problema de Cauchy (1.1)–(1.3) tiene única solución $(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$ y

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\right| \leq 2\,M,\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,t)| \leq 2\,M,\,\forall (x,\,t) \in \mathbb{R} \times [0,\,\tau_0)\;.$$

Ahora verifiquemos (b). Si la Solución tiene una estimación a priori

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\right| \leq M(T),\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,t)| \leq M(T),\,\forall t \in [0,\,T]\;,$$

entonces

$$\left|u_0^1(x)\right| \leq M(T),\,\cdots,\,|u_0^n(x)| \leq M(T)\,.$$

Así de la parte (a), existe $\tau > 0$ el cual depende sólo de $M(T)$ tal que la solución $(u^{1\varepsilon}, \cdots, u^{n\varepsilon})$ existe en $\mathbb{R} \times [0, \tau]$ y

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\right| \leq 2\,M(T),\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,t)| \leq 2\,M(T),\,\forall t \in [0,\,\tau]\;.$$

Debido a las estimaciones a priori (2.1), tenemos que

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,\tau)\right| \leq M(T),\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,\tau)| \leq M(T)\,.$$

Si consideramos τ como el tiempo inicial, un procedimiento igual muestra que la solución existe en $\mathbb{R} \times [\tau, 2\tau]$ y

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,t)\right| \leq 2\,M(T),\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,t)| \leq 2\,M(T),\,\forall (x,\,t) \in [\tau,\,2\,\tau]\;.$$

De esto tenemos que

$$\left|u^{1\varepsilon}(x,\,2\,\tau)\right| \le M(T),\,\cdots,\,|u^{n\varepsilon}(x,\,2\tau)| \le M(T)\,.$$

Haciendo el mismo procedimiento, se puede ver que el tiempo local τ puede ser extendido a T ya que el tiempo depende solamente de $M(T)$.

En particular, si la solución tiene estimaciones a priori (2.2), entonces por el análisis anterior la solución existe en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

☑

3 Estimaciones a priori

El resultado anterior será aplicado a dos sistemas relacionados con el sistema de Flujo cuadrático y el sistema Le Roux, para los cuales buscaremos estimaciones a priori para expandir la solución local.

3.1 Lemas auxiliares

Lema 3.1. Sea $v^{\varepsilon}(x,t)$ una función con derivadas continuas v_x, v_{xx}, v_t, en $\mathbb{R} \times (0,T)$, que da solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} v_t + (vf(u,\,v))_x + g(u,\,v,\,x,\,t) = \varepsilon\, v_{xx} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad v(x,\,0) = v_0(x) \ge \delta > 0\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(u,v,x,t)$ es localmente Lipschitz para u, v y $g(u,v,x,t) = vh(u,v,x,t)$, $h(u,v,x,t)$ es una función continua para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, acotada y continua para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Si $|u(x,t)| \le M(\varepsilon,\delta,t)$, $|v^{\varepsilon}(x,t)| \le M(\varepsilon,\delta,t)$, sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$, entonces $v^{\varepsilon}(x,t) \ge c(t,\delta,\varepsilon) > 0$ sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$, donde $c(t,\delta,\varepsilon)$ puede tender a cero cuando δ, ε tienden a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Haciendo la sustitución $w = \log v$ la ecuación (3.1) se transforma en

$$w_t + f(u,\,v)\,w_x + f(u,v)_x + h(u,\,v,\,x,\,t) = \varepsilon\,(w_{xx} + w_x^2)\,, \tag{3.2}$$

entonces

$$w_t = \varepsilon\,w_{xx} + \varepsilon\left(w_x - \frac{f(u,\,v)}{2\varepsilon}\right)^2 - f(u,\,v)_x - \frac{f^2(u,v)}{4\varepsilon} - h(u,\,v,\,x,\,t)\,.$$

La solución w de (3.2) con dato inicial $w_0(x) = \log(v_0(x))$ puede ser representada por una función de Green $G(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} exp(-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t})$:

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\, t)\, w_0(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varepsilon \left(w_x - \frac{f(u,v)}{2\varepsilon} \right)^2 - f(u,\, v)_x - \frac{f^2(u,v)}{4\varepsilon} \right. \\ &\qquad \left. - h(u,\, v,\, \xi,\, s) \right] G(x-\xi,\, t-s)\, d\xi\, ds\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considerando (2.4) tenemos que,

$$\begin{aligned} w &\geq \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\, t)\, w_0(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[-f(u,\, v)_x - \frac{f^2(u,v)}{4\varepsilon} - h(u,\, v,\, \xi,\, s) \right] \\ &\qquad \times G(x-\xi,\, t-s)\, d\xi\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\, t)\, w_0(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(u,\, v)\, G_\xi(x-\xi,\, t-s)\, d\xi\, ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f^2(u,v)}{4\varepsilon} + h(u,\, v,\, \xi,\, s) \right) G(x-\xi,\, t-s)\, d\xi\, ds \\ &\geq \log(\delta) - 2\, M \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} - M_1\, t \geq -C(t,\, \delta,\, \varepsilon) > -\infty\,, \end{aligned}$$

de donde $v^\varepsilon(x,t)$ tiene una cota inferior positiva $c(t,\delta,\varepsilon)$

☑

Lema 3.2. Supongamos que $u(x,t)$ es una solución de la ecuación parabólica

$$u_t + a(u,\, x,\, t)\, u_x + g(u,\, x,\, t) = u_{xx}\,, \tag{3.4}$$

y $|u(x,0)| \leq M$, donde $|g(u,x,t)| \leq C|u| + \tilde{C}$, $C, \tilde{C} > 0$ y $a(u,x,t)$ es localmente acotada. Entonces para todo $T > 0$, existe $M(T) > 0$ tal que $|u(x,t)| \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Corolario 3.3. Supongamos que $u(x,t) \geq (\leq) 0$ satisface

$$u_t + a(u,\, x,\, t)\, u_x + g(u,\, x,\, t) \leq (\geq)\, u_{xx}\,,$$

y $|u(x,0)| \leq M$, $g(u,x,t) \geq (\leq) Cu + \tilde{C}$ donde $C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ y $a(u,x,t)$ es localmente acotada. Entonces para todo $T > 0$, existe $M(T) > 0$ tal que $u(x,t) \leq M(T)(u(x,t) \geq -M(T))$ sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$.

3.2 Sistema de flujo cuadrático con fuente

Consideremos el problema de Cauchy relacionado a la ley de conservación de flujo cuadrático con fuente regularizada:

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}\,(3\,u^2 + v^2)_x + g_1(u,v,x,t) = \varepsilon\, u_{xx}\,, \\ \qquad\qquad v_t + (u\,v)_x + g_2(u,\, v,\, x,\, t) = \varepsilon\, v_{xx}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

con datos iniciales medibles acotados

$$\begin{aligned} u(x,\, 0) &= u_0(x)\,, \\ v(x,\, 0) &= v_0(x) \geq 0\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $g_1(u,v,x,t)$ y $g_2(u,v,x,t)$ son funciones continuas localmente Lipschitz respecto a u, v, acotadas y continuas para x, t. La solución local está garantizada por el teorema 2.1, es decir la solución $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ al problema (3.5)-(3.6), es de clase $C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau))$ y además $|u^\varepsilon(x,t)| \leq 2M$ y $|v^\varepsilon(x,t)| \leq 2M$, ahora busquemos los estimativos a priori.

Sean $U = (u,v)^T$, F el mapeo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$F : (u,\, v) \longmapsto \left(\frac{3}{2}\, u^2 + \frac{1}{2}\, v^2,\, u\, v \right)\,,$$

y G el mapeo de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$G : (u,v,x,t) \longmapsto (g_1(u,\, v,\, x,\, t),\, g_2(u,\, v,\, x,\, t))^T\,,$$

entonces (3.5) se convierte en

$$U_t + dF\, U_x + G = \varepsilon\, \Delta\, U\,, \tag{3.7}$$

donde

$$dF = \begin{pmatrix} 3\,u & v \\ v & u \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}.$$

Cálculos simples muestran que los valores propios de la matriz dF son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\,u - s^{1/2}\,, \\ \lambda_2 &= 2\,u + s^{1/2}\,, \end{aligned}$$

donde $s = u^2 + v^2$ y los invariantes de Riemann del sistema (3.5) son funciones $w(u,v)$ y $z(u,v)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} w_u(s^{1/2} - u) - v\,w_v &= 0\,, \\ z_u(s^{1/2} + u) + v\,z_v &= 0\,, \end{aligned}$$

La solución a estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} w(u,\,v) &= u + s^{1/2}\,, \\ z(u,\,v) &= u - s^{1/2}\,. \end{aligned}$$

Proposición 3.4. Supongamos que $g_1(u,v,x,t)$, $g_2(u,v,x,t)$ satisfacen

$$\begin{aligned} w_u\,g_1 + w_v\,g_2 &\geq C_1\,w + C_2\,, \\ z_u\,g_1 + z_v\,g_2 &\leq C_3 z + C_4\,; \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ y $g_2(u,v,x,t) = vh(u,v,x,t)$, donde $h(u,v,x,t)$ es una función continua para (u,v), acotada y continua para (x,t), entonces el problema de Cauchy (3.5)–(3.6) tiene única solución $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ y satisface que para todo $T > 0$, $|u^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$, $0 < c(\varepsilon,t) \leq v^\varepsilon(x,t) \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$, donde $M(T)$ es una constante positiva la cual es independiente de ε, $c(\varepsilon,t)$ es una función positiva, la cual puede tender a cero cuando ε tiende a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Haciendo cálculos simples tenemos que

$$w_u = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}}\,,\ w_v = \frac{v}{\sqrt{s}}\,,\ w_{uu} = \frac{v^2}{s^{\frac{3}{2}}}\,,\ w_{uv} = -\frac{uv}{s^{\frac{3}{2}}}\,,\ w_{vv} = \frac{u^2}{s^{\frac{3}{2}}}\,;$$
$$z_u = 1 - \frac{u}{\sqrt{s}}\,,\ z_v = -\frac{v}{\sqrt{s}}\,,\ z_{uu} = -\frac{v^2}{s^{\frac{3}{2}}}\,,\ z_{uv} = \frac{uv}{s^{\frac{3}{2}}}\,,\ z_{vv} = -\frac{u^2}{s^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Multiplicando (3.7) por la izquierda con ∇w y teniendo en cuenta que $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$(ver [4]), obtenemos que

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2\, w_x + (w_u\, g_1 + w_v\, g_2) &= \varepsilon\, w_{xx} \\ &\quad -\varepsilon\,(w_{uu}\, u_x^2 + 2\, w_{uv}\, u_x\, v_x + w_{vv}\, v_x^2)\,; \end{aligned}$$

de manera similar, se tiene que,

$$z_t + \lambda_1\, z_x + (z_u\, g_1 + z_v\, g_2) = \varepsilon\, z_{xx} - \varepsilon\,(z_{uu}\, u_x^2 + 2\, z_{uv}\, u_x\, v_x + z_{vv}\, v_x^2)\,.$$

Considerando el último término de las dos últimas ecuaciones, podemos ver que

$$\begin{aligned} w_{uu}\, u_x^2 + 2\, w_{uv}\, u_x\, v_x + w_{vv}\, v_x^2 &= \frac{1}{s^{3/2}}\,(v\, u_x - u\, v_x)^2 > 0\,, \\ z_{uu}\, u_x^2 + 2\, z_{uv}\, u_x\, v_x + z_{vv}\, v_x^2 &= -\frac{1}{s^{3/2}}(v\, u_x - u\, v_x)^2 < 0\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y las desigualdades (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2\, w_x + C_1\, w + C_2 &\leq \varepsilon\, w_{xx}\,, \\ z_t + \lambda_1\, z_x + C_3\, z + C_4 &\geq \varepsilon\, z_{xx}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si consideramos (3.9) como desigualdades en las variables w y z y aplicamos el corolario 3.3 obtenemos $w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq N(T)$, $z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq -N(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$, donde $N(T)$ es independiente de ε y T es cualquier número real positivo. De acuerdo a esto podemos encontrar un $M(T) > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$, $|v^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$ y en vista del lema 3.1 tenemos que $0 < c(\varepsilon, t) \leq v^\varepsilon(x,t) \leq M(T)$.

☑

Nota 1. Se puede ver que existen funciones g_1 y g_2 que satisfacen la condición (3.8) por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
g_1(u,\, v,\, x,\, t) &= \sqrt{u^2+v^2}\, \phi_1(x,\, t)\,,\\
g_2(u,\, v,\, x,\, t) &= \frac{v}{v^2+u^2+1}\, \phi_2(x,\, t)\,,
\end{aligned}
$$

donde $\phi_i(x,t)$ son continuas y $|\phi_i(x,t)| \leq K_i$, para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, $K_i \geq 0$, $i = 1,2$.

De hecho teniendo en cuenta que

$$
\begin{aligned}
&|w_u| = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}} \leq 2\,, \qquad |w_v| = \frac{|v|}{\sqrt{s}} \leq 1\,,\\
&|z_u| = 1 - \frac{u}{\sqrt{s}} \leq 2\,, \qquad |z_v| = |w_u|\,.
\end{aligned}
$$

$w \geq 0$, $z \leq 0$.

Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
g_1\, w_u &= (\sqrt{u^2+v^2}\, \phi_1(x,t)) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{s}}\right) = \phi_1\, w \geq -K_1\, w\,,\\
g_2\, w_v &= (v\, h(u,\, v,\, x,\, t)) \left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right) = \frac{v^2}{\sqrt{v^2+u^2}(v^2+u^2+1)}\, \phi_2 \geq -K_2\,.
\end{aligned}
$$

De donde $w_u g_1 + w_v g_2 \geq -K_1 w - K_2$.

$$
\begin{aligned}
g_1\, z_u &= (\sqrt{u^2+v^2}\, \phi_1(x,\, t)) \left(1 - \frac{u}{\sqrt{s}}\right) = -\phi_1\, z \leq -K_1\, z\,,\\
g_2\, z_v &= (v\, h(u,\, v,\, x,\, t)) \left(-\frac{v}{\sqrt{s}}\right)\\
&= -\frac{v^2}{\sqrt{v^2+u^2}(v^2+u^2+1)}\, \phi_2 \leq K_2\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $z_u g_1 + z_v g_2 \leq -K_1 z + K_2$.

3.3 Sistema Le Roux con fuente

Consideremos el problema de Cauchy relacionado a el sistema de Le Roux con fuente regularizado:

$$
\begin{cases}
u_t + (u^2+v)_x + f(u,\, v,\, x,\, t) = \varepsilon\, u_{xx}\,,\\
\quad v_t + (uv)_x + g(u,\, v,\, x,\, t) = \varepsilon\, v_{xx}\,,
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

con datos iniciales medibles acotados

$$\begin{aligned} u(x,\,0) &= u_0(x)\,, \\ v(x,\,0) &= v_0(x) \geq 0\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $f(u,v,x,t)$ y $g(u,v,x,t)$ son funciones continuas localmente Lipschitz respecto a u,v, acotadas y continuas para x,t. La solución local está garantizada por el teorema 2.1, es decir la solución $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ al problema (3.10)-(3.11), es de clase $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau))$ y además $|u^\varepsilon(x,t)|\leq 2M$ y $|v^\varepsilon(x,t)|\leq 2M$, ahora busquemos los estimativos a priori.

Sea $U=(u,v)^T$ y F el mapeo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$F:(u,\,v)\longmapsto(u^2+v,\,u\,v)\,,$$

y G el mapeo de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$G:(u,\,v,\,x,\,t)\longmapsto(f(u,\,v,\,x,\,t),\,g(u,\,v,\,x,\,t))^T\,,$$

entonces (3.10) se convierte en

$$U_t+dFU_x+G=\varepsilon\,\Delta\,U_{xx}\,, \tag{3.12}$$

donde

$$dF=\begin{pmatrix} u & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \qquad \Delta=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Cálculos simples muestran que los valores propios de la matriz dF son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\,(3\,u-D)\,, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\,(3\,u+D)\,; \end{aligned}$$

donde $D=\sqrt{u^2+4v}$ y los invariantes de Riemann del sistema (3.10) son funciones $w(u,v)$ y $z(u,v)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} w_u - \frac{u+D}{2}\, w_v &= 0\,, \\ z_u - \frac{u-D}{2}\, z_v &= 0\,. \end{aligned}$$

La solución a estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} w(u,\,v) &= u+D\,, \\ z(u,\,v) &= u-D\,, \end{aligned}$$

Proposición 3.5. Supongamos que $f(u,v,x,t)$, $g(u,v,x,t)$ satisfacen

$$\begin{aligned} w_u\, f + w_v\, g &\geq C_1\, w + C_2\,, \\ z_u\, f + z_v\, g &\leq C_3\, z + C_4\,, \end{aligned}$$

donde $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ y $g(u,v,x,t) = vh(u,v,x,t)$, donde $h(u,v,x,t)$ es una función continua para (u,v), acotada y continua para (x,t), entonces el problema de Cauchy (3.10)–(3.11) tiene única solución $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ y satisface que para todo $T>0$, $|u^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$, $0 < c(\varepsilon,t) \leq v^\varepsilon(x,t) \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R}\times[0,T]$, donde $M(T)$ es una constante positiva la cual es independiente de ε, $c(\varepsilon,t)$ es una función positiva, la cual puede tender a cero cuando ε tiende a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Haciendo cálculos simples tenemos que

$$\begin{aligned} &w_u = 1 + \frac{u}{D}\,,\; w_v = \frac{2}{D}\,,\; w_{uu} = \frac{4v}{D^3}\,,\; w_{uv} = -\frac{2u}{D^3}\,,\; w_{vv} = -\frac{4}{D^3}\,; \\ &z_u = 1 - \frac{u}{D}\,,\; z_v = -\frac{2}{D}\,,\; z_{uu} = -\frac{4v}{D^3}\,,\; z_{uv} = \frac{2u}{D^3}\,,\; z_{vv} = \frac{4}{D^3}\,. \end{aligned}$$

Multiplicando (3.12) por la izquierda con ∇w y teniendo en cuenta que $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& w_t + \lambda_2\, w_x + (w_u\, f + w_v\, g) \\
= \;& \varepsilon\, w_{xx} - \varepsilon\,(w_{uu}\, u_x^2 + 2\, w_{uv}\, u_x\, v_x + w_{vv}\, v_x^2) \\
= \;& \varepsilon\, w_{xx} - \varepsilon \left(\frac{4v}{D^3}\, u_x^2 - \frac{2u}{D^3}\, u_x\, v_x - \frac{4}{D^3}\, v_x^2 \right) \\
= \;& \varepsilon\, w_{xx} - \frac{\varepsilon}{D^3}\,((D+u)\, u_x + 2\, v_x)\,((D-u)\, u_x - 2\, v_x) \\
= \;& \varepsilon\, w_{xx} - \frac{\varepsilon}{D} \left(\left(1 + \frac{u}{D}\right) u_x + \frac{2}{D}\, v_x \right) \left(\left(1 - \frac{u}{D}\right) u_x - \frac{2}{D}\, v_x \right) \\
= \;& \varepsilon\, w_{xx} - \frac{\varepsilon}{D}\, w_x\, z_x\,,
\end{aligned}
$$

de manera similar, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
z_t + \lambda_1\, z_x + (z_u\, f + z_v\, g) \;&=\; \varepsilon\, z_{xx} - \varepsilon\,(z_{uu}\, u_x^2 + 2\, z_{uv}\, u_x\, v_x + z_{vv}\, v_x^2) \\
&=\; \varepsilon\, z_{xx} + \frac{\varepsilon}{D}\, w_x\, z_x\,.
\end{aligned}
$$

Ahora de (3.13) tenemos que

$$
\begin{aligned}
w_t + \left(\lambda_2 + \frac{\varepsilon}{D}\, z_x\right) w_x + C_1\, w + C_2 \;&\leq\; \varepsilon\, w_{xx}\,, \\
z_t + \left(\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{D}\, w_x\right) z_x + C_3\, z + C_4 \;&\geq\; \varepsilon\, z_{xx}.
\end{aligned}
$$

Si consideramos (3.13) como desigualdades en las variables w y z y aplicamos el corolario 3.3 obtenemos $w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq N(T)$, $z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq -N(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$, donde $N(T)$ es independiente de ε y T es cualquier número real positivo. De acuerdo a esto podemos encontrar un $M(T) > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$, $|v^\varepsilon(x,t)| \leq M(T)$ sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$ y en vista del lema 3.1 tenemos que $0 < c(\varepsilon, t) \leq v^\varepsilon(x,t) \leq M(T)$.

☑

Nota 2. Se puede ver que existen funciones f y g que satisfacen la condición (3.13) por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
f(u,\, v,\, x,\, t) \;&=\; \sqrt{u^2 + 4v + 1}\, \phi_1(x,\, t)\,, \\
g(u,\, v,\, x,\, t) \;&=\; \frac{uv^2}{v^2 + u^2 + 1}\, \phi_2(x,\, t)\,,
\end{aligned}
$$

donde $\phi_i(x,t)$ son continuas y $|\phi_i(x,t)| \leq K_i$, para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $K_i \geq 0$, $i = 1, 2$. De hecho teniendo en cuenta que

$$
\begin{aligned}
|w_u| = 1 + \frac{u}{D} \leq 2\,,\; |w_v| = \frac{2}{D}\,,\\
|z_u| = 1 - \frac{u}{D} \leq 2\,,\; |z_v| = |w_u|\,,
\end{aligned}
$$

$w \geq 0$, $z \leq 0$.

Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
f\,w_u &= (\sqrt{u^2+4v+1}\,\phi_1(x,\,t))\left(1+\frac{u}{D}\right)\\
&\geq -K_1\left(1+\frac{u}{D}\right)(\sqrt{u^2+4v}+1)\\
&\geq -K_1\,w - 2\,K_1\,,\\
g\,w_v &= (v\,h(u,\,v,\,x,\,t))\left(\frac{2}{D}\right)\\
&= \frac{2uv^2}{\sqrt{u^2+4v}(v^2+u^2+1)}\,\phi_2\\
&= 2\,\frac{u}{\sqrt{u^2+4v}}\,\frac{v^2}{(v^2+u^2+1)}\,\phi_2\\
&\geq -2\,K_2\,.
\end{aligned}
$$

de donde $w_u f + w_v g \geq -K_1 w - 2(K_1+K_2)$.

$$
\begin{aligned}
f\,z_u &= (\sqrt{u^2+4v+1}\,\phi_1(x,\,t))\left(1-\frac{u}{D}\right)\\
&\leq K_1\left(1-\frac{u}{D}\right)(\sqrt{u^2+4v}+1)\\
&\leq -K_1\,z + 2\,K_1\,,\\
g\,z_v &= (v\,h(u,\,v,\,x,\,t))\left(-\frac{2}{D}\right)\\
&= -\frac{2uv^2}{\sqrt{u^2+4v}(v^2+u^2+1)}\,\phi_2\\
&= -2\,\frac{u}{\sqrt{u^2+4v}}\,\frac{v^2}{(v^2+u^2+1)}\,\phi_2\\
&\leq 2\,K_2\,.
\end{aligned}
$$

de donde $z_u f + z_v g \leq -K_1 z + 2(K_1+K_2)$.

References

[1] Yan, Jin; Cheng, Zhixin y Tao, Ming, *Conservation laws (I): Viscosity solutions*, Rev. Col. Mat. **41**, 81–90 (2007).

[2] Tao, Ming; Cheng, Zhixin y Yan, Jin, *Conservation laws (II): weak solutions*, Rev. Col. Mat. **41**, 91–106 (2007).

[3] Lu, Yun–guang, *Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method* (Chapman and Hall, CRC Press, New York, 2002).

[4] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* (Springer–Verlag, New York, 1994).