

Banco Central de Chile
Documentos de Trabajo

Central Bank of Chile
Working Papers

N° 631

Mayo 2011

**APLICACIONES DEL MODELO BINOMIAL PARA
EL ANÁLISIS DE RIESGO**

Rodrigo A. Alfaro

Andrés Sagner

Carmen G. Silva

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: <http://www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc>. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: <http://www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper>. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.



BANCO CENTRAL DE CHILE

CENTRAL BANK OF CHILE

La serie Documentos de Trabajo es una publicación del Banco Central de Chile que divulga los trabajos de investigación económica realizados por profesionales de esta institución o encargados por ella a terceros. El objetivo de la serie es aportar al debate temas relevantes y presentar nuevos enfoques en el análisis de los mismos. La difusión de los Documentos de Trabajo sólo intenta facilitar el intercambio de ideas y dar a conocer investigaciones, con carácter preliminar, para su discusión y comentarios.

La publicación de los Documentos de Trabajo no está sujeta a la aprobación previa de los miembros del Consejo del Banco Central de Chile. Tanto el contenido de los Documentos de Trabajo como también los análisis y conclusiones que de ellos se deriven, son de exclusiva responsabilidad de su o sus autores y no reflejan necesariamente la opinión del Banco Central de Chile o de sus Consejeros.

The Working Papers series of the Central Bank of Chile disseminates economic research conducted by Central Bank staff or third parties under the sponsorship of the Bank. The purpose of the series is to contribute to the discussion of relevant issues and develop new analytical or empirical approaches in their analyses. The only aim of the Working Papers is to disseminate preliminary research for its discussion and comments.

Publication of Working Papers is not subject to previous approval by the members of the Board of the Central Bank. The views and conclusions presented in the papers are exclusively those of the author(s) and do not necessarily reflect the position of the Central Bank of Chile or of the Board members.

Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile
Working Papers of the Central Bank of Chile
Agustinas 1180, Santiago, Chile
Teléfono: (56-2) 3882475; Fax: (56-2) 3882231

APLICACIONES DEL MODELO BINOMIAL PARA EL ANÁLISIS DE RIESGO

Rodrigo A. Alfaro.
Banco Central de Chile

Andrés Sagner
Banco Central de Chile

Carmen G. Silva
Banco Central de Chile

Resumen

En este artículo analizamos algunas medidas de riesgo bajo el Modelo Binomial. En la primera de ellas mostramos que la Distancia a la Insolvencia es un estadístico Z , y que una simplificación de este resulta apropiado para aproximar la probabilidad de insolvencia en el caso de los bancos comerciales listados en bolsa. La segunda aplicación se basa en una pregunta para obtener una medida de volatilidad implícita, análoga a la que se obtendría con precios de opciones financieras. Los resultados de un ejercicio piloto indican que los valores obtenidos son coherentes con las cifras observadas en el mercado de derivados. Finalmente, se utiliza una de las trayectorias del modelo para definir un escenario de riesgo para el cual se derivan el valor en riesgo (VaR) y el riesgo de prepago.

Abstract

In this paper we analyze two risk measures using the Binomial Model. In one case we show that the distance-to-default measure is indeed a Z -statistic. In an empirical application we estimate the probability of default for Chilean banks. Our second measure is a pseudo implied volatility which is obtained from a question. From a small survey we find that results are consistent with market values. Finally, we consider the worst case scenario analysis applied to Value at Risk and to callable bonds.

I. Introducción

El Modelo Binomial fue propuesto por Cox, Ross y Rubinstein (1979) para demostrar el resultado presentado en Black y Scholes (1973) respecto de la valoración de opciones financieras europeas. Ambos modelos son piedras fundamentales en la valoración de opciones existiendo diversos refinamientos para considerar tanto pago de dividendos, tasa de interés variable en el tiempo o volatilidad estocástica entre otros.

Desde una perspectiva económica, el Modelo Binomial puede relacionarse con el argumento propuesto por Debreu (1956) en el cual la incertidumbre respecto del valor del precio de un activo se considera tomando un número finito de posibles valores los cuales son dependientes del estado de la naturaleza. En el caso del Modelo Binomial los estados son obtenidos con la repetición sucesiva de realizaciones binarias (sube o baja), las que se definen como pasos del modelo.

En términos aplicados, el modelo ha sido ampliamente utilizado para la valoración de opciones financieras incluyendo aquellas relacionadas con instrumentos de renta fija, caso en el cual el Modelo Binomial caracteriza la dinámica de la tasa corta (Shreve, 2004). En otras palabras, el modelo ha sido utilizado como complemento para resolver un problema sobre el derivado más que en el subyacente. Para el caso de países con poco desarrollo financiero, el Modelo Binomial puede ser todavía útil en la modelación propia del subyacente.

En esta línea, Alfaro y Silva (2008) proponen un indicador de volatilidad intra-día el cual utiliza más información que el clásico cierre contra cierre siendo por este motivo tres o cuatro veces más eficiente. Los resultados bajo el Modelo Binomial mejoran tanto las estimaciones de sesgo como las de eficiencia, las cuales fueron anteriormente obtenidas bajo el caso continuo. De esta forma se concluye que la ganancia en eficiencia depende del número de pasos considerados en el problema, es decir de la profundidad del mercado financiero. Por otra parte, Alfaro y Sagner (2009) analizan un indicador de Análisis Técnico —el Índice de Fuerza Relativa— estableciendo una predicción del indicador

utilizando el Modelo Binomial. Los resultados para la paridad peso-dólar muestran que dicha predicción se impone por sobre una modelación ARMA.

En este artículo se consideran algunas aplicaciones del Modelo Binomial que permiten extraer medidas de riesgo. Dada la simplicidad de los resultados, estas medidas pueden obtenerse con información pública de modo que pueden servir como elementos para el monitoreo de los distintos mercados financieros. La primera de las aplicaciones corresponde al uso de la Distancia a la Insolvencia (DI) para la banca. Gray, Echeverría y Luna (2007) proponen utilizar el promedio de esta medida como un indicador de riesgo agregado del sistema bancario, mientras que Gray *et al.* (2009) incluyen la medida en un modelo macroeconómico general. Los resultados acá presentados muestran que la DI es equivalente a un estadístico Z donde la nula es el umbral de deuda. Por otra parte, la Probabilidad de Insolvencia puede derivarse directamente y resulta similar a la medidas de riesgo de no pago propuestas por Moody's KMV conocidas como EDF's.

La segunda aplicación corresponde a una medida de volatilidad implícita similar a la que se obtendría de opciones financieras pero que se deriva de una pregunta sobre la probabilidad que ocurra un determinado evento. En términos de valoración esto es equivalente a opciones binarias y extensiones de este tipo de preguntas permitirían —en teoría— determinar la distribución del subyacente o lo que se denomina como *volatility surface*.

Finalmente se presenta una tercera aplicación que utiliza una trayectoria específica del modelo para establecer el peor escenario posible (*worst case scenario*), en este ámbito se revisa el Valor en Riesgo y el riesgo de prepago de créditos ante cambios en las condiciones de refinanciamiento.

II. Distancia a la Insolvencia

El origen de la Distancia a la Insolvencia data de la década de los '70 como fruto del trabajo de Merton, quien introdujo el uso del Cálculo Estocástico para la resolución de problemas económicos y colaboró con Black y Scholes en la obtención de la famosa ecuación de valoración de opciones. Según Merton (1974), el spread de bonos riesgosos por sobre la tasa libre de riesgo puede ser explicado por la volatilidad del valor de los activos y el nivel de apalancamiento de la firma. Un elemento clave corresponde al valor de los activos; para ello se propone estimarlos a través del valor del *equity* de la firma. De este modo, se obtiene una estimación del valor de mercado de los activos, el cual se compara con respecto al monto de obligaciones de la firma. Dicha comparación se realiza en términos de la desviación estándar del valor de los activos, construyéndose de este modo, la Distancia a la Insolvencia (DI).¹

Para el caso chileno existen varias aplicaciones que utilizan la DI: (i) Zurita (2007) analiza las quiebras y salida de empresas utilizando este indicador en conjunto con modelos estadísticos de elección binaria; (ii) Gray, Echeverría y Luna (2007) aplican la metodología para bancos que transan en bolsa generando un indicador agregado de riesgo; (iii) Gray *et al.* (2009) utiliza este indicador en un modelo macroeconómico dinámico en el cual la DI tiene un rol en la economía real a través de la brecha de producto; (iv) Alfaro, Gallardo y Vio (2010) estudian el sector de las casas comerciales utilizando esta medida. En este último artículo se muestra que la simplificación de esta medida propuesta por Byström (2007) es razonable para períodos de estabilidad financiera y que un factor relevante, que explica la DI, corresponde al cambio en la tasa de desempleo.

En esta sección demostramos que la DI es equivalente a un estadístico Z , el cual realiza la inferencia que el valor esperado de los activos es superior a la deuda, ambas cantidades medidas en logaritmos; resultado que es independiente del número de pasos utilizados en el árbol. En lo que se refiere a la probabilidad de insolvencia (PI), notamos que ésta puede ser

¹ Moody's KMV ha trabajado con las distancias a la insolvencia junto con información de balance a fin de establecer una relación empírica entre esta medida y la frecuencia histórica de no pago observada para una muestra de firmas. De este modo, construye el indicador de riesgo EDF (Expected Default Frequency), el cual varios artículos han mostrado que puede anticipar el no pago (Korablev y Qu, 2009).

obtenida directamente a través de la aplicación de la función de distribución binomial. Sin embargo, cuando el número de pasos tiende a infinito la aproximación asintótica de la distribución binomial puede ser utilizada. Esto último implica que la PI se obtiene de evaluar la DI en la distribución normal estándar acumulada.

1. Calibración del Modelo Binomial

Consideremos que el valor de los activos de la firma parte en A_0 y puede llegar a su valor final A_1 . Considerando la calibración de Jarrow y Rudd (1983) descrita en el Anexo A, se tiene que la probabilidad de alza es $p = 1/2$, mientras los factores de alza y baja son $u = \exp(\theta T/N + \sigma\sqrt{T/N})$ y $d = \exp(\theta T/N - \sigma\sqrt{T/N})$, respectivamente.

Dado que trabajaremos con la distribución bajo riesgo neutral tenemos que $\theta = r - (1/2)\sigma^2$. De esta forma podemos considerar X como una variable aleatoria distribuida Binomial tal que el valor de los activos se expresa como $A_1 = A_0 u^X d^{N-X}$. Una manera sencilla de cuantificar el problema es considerar la dinámica del logaritmo del valor del activo:

$$\log(A_1) = \log(A_0) + X[\log(u) - \log(d)] + N \log(d). \quad (1)$$

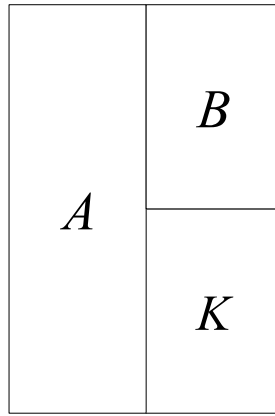
Notamos que (Anexo A): $E(X) = Np = N/2$ y $Vol(X) = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{N}/2$, mientras que por calibración $\log(u) - \log(d) = 2\sigma\sqrt{T/N}$.

De esta forma

$$\begin{aligned} E[\log(A_1)] &= \log(A_0) + [\log(u) - \log(d)]E(X) + N \log(d) \\ &= \log(A_0) + 2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} \frac{N}{2} + N \left[\theta \frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} \right] \\ &= \log(A_0) + \theta T. \end{aligned}$$

Similarmente, $Vol(A_1) = 2\sigma\sqrt{T/N}Vol(X) = \sigma\sqrt{T}$. Por otra parte, consideremos que el balance de una firma es un estado contable que refleja la situación patrimonial de una empresa en un momento determinado del tiempo y que se estructura en base a tres conceptos patrimoniales: el valor de los activos (A), el valor de la deuda (B) y el valor del *equity* (K), tal como se aprecia en la Figura 1. De esta forma, el valor del *equity* de la firma es $K_1 = \max\{A_1 - B; 0\}$.

Figura 1: Balance de una firma



2. Estadístico Z

Si se desea hacer inferencia respecto de si el valor esperado de los activos es igual a la deuda —ambas cantidades en logaritmos— se aplica la hipótesis nula que el valor esperado de los activos (en logaritmo) es igual al valor de la deuda (en logaritmo), esto se verifica mediante el estadístico Z , el cual se encuentra definido como:

$$Z = \frac{E[\log(A_1)] - \log(B)}{Vol(A_1)} = \frac{[\log(A_0) - \log(B)] + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (2)$$

Notamos que el estadístico Z de la ecuación anterior es igual al d_2 de la fórmula Black-Scholes para la valoración de opciones y derivada para la DI por Gray y Malone (2008). Notamos además que pese a que el modelo utilizado es el Binomial, la DI no depende del número de pasos.

3. Probabilidad de Insolvencia

La probabilidad que los activos de la firma sean iguales o menores a la deuda se encuentra dada en términos más generales por:

$$\begin{aligned}
 \Pr(A_1 \leq B) &= \Pr[\log(A_1) \leq \log(B)] \\
 &= \Pr[\log(A_0) + 2\sigma\sqrt{T/N}X + N\log(d) \leq \log(B)] \\
 &= \Pr[X \leq C] = \sum_{k=0}^C \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \tag{3}
 \end{aligned}$$

donde C contiene el valor de los activos y el valor de la deuda (ambos en logaritmos), el período de análisis y el número de pasos. Notamos que

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\log(B) - \log(A_0)}{2\sigma\sqrt{T/N}} - \frac{N}{2\sigma\sqrt{T/N}} \left[\theta \frac{T}{N} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} \right] \\
 &= \frac{\log(B) - \log(A_0)}{2\sigma\sqrt{T/N}} - \frac{(\theta T - \sigma\sqrt{NT})}{2\sigma\sqrt{T/N}} \\
 &= \frac{\log(B) - \log(A_0)}{2\sigma\sqrt{T/N}} - \frac{\theta\sqrt{NT}}{2\sigma} + \frac{N}{2}.
 \end{aligned}$$

Si siguiendo con la aproximación asintótica de la distribución Binomial, presentada en el Anexo B, podemos resolver (3) para el caso en que el número de pasos sea grande. En este caso tenemos que

$$\Pr(X \leq C) = \Pr\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{C - \mu_X}{\sigma_X} \right] \cong \Phi(\zeta),$$

donde $\zeta = (C - \mu_X)/\sigma_X$ y $\Phi(\cdot)$ corresponde a la función de distribución acumulada de la normal. Basado en los resultados técnicos (Anexo A) tenemos que: $\mu_X = Np = N/2$ y $\sigma_X = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{N}/2$.

Por la definición de C podemos resolver para ζ :

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{C - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{2}{\sqrt{N}} \left\{ \left[\frac{\log(B) - \log(A_0)}{2\sigma\sqrt{T/N}} - \frac{\theta\sqrt{NT}}{2\sigma} + \frac{N}{2} \right] - \frac{N}{2} \right\} \\ &= \frac{\log(B) - \log(A_0)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\theta\sqrt{T}}{\sigma} = - \left[\frac{\log(A_0) - \log(B) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] = -DI.\end{aligned}$$

En la última línea hemos utilizado la definición de θ con la cual obtenemos la DI presentada en (2). De esta forma se concluye que la Probabilidad de Insolvencia (PI), queda definida como $PI = \Phi(-DI)$.

4. Volatilidad de los Activos

Byström (2007) propone una simplificación a la DI obtenida en la ecuación (2), la cual supone que la expresión $(r - \sigma^2/2)$ es pequeña y que σ puede ser reemplazada por $(K/A_0)\omega$, donde ω es la volatilidad del *equity*.

Por otra parte, tomando $L \equiv B/A_0$ (*leverage* o apalancamiento de la firma), observamos de la Figura 1 que $K = A_0 - B$ por lo tanto $L \equiv B/(B + K)$. De esta forma la aproximación de la volatilidad propuesta por el autor es $\sigma = (1 - L)\omega$.

Alternativamente, Bharath y Schumway (2008) consideran que la volatilidad de los activos es un promedio ponderado entre la volatilidad del *equity* y la deuda. El ponderador natural es el *leverage* mientras la volatilidad de la deuda es asumida como una función lineal del *equity*. Esto implica que la volatilidad del activo es una función de la volatilidad del *equity*, el *leverage* y la interacción entre estos componentes como sigue:

$$\sigma = \alpha L + \beta \omega + \gamma L \omega.$$

Los ponderadores sugeridos por los autores no tienen una referencia empírica, por ello podemos calibrarlos para ajustar los datos observados en esta aplicación. Más aún notamos que la combinación: $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\gamma = -1$, replica el resultado de Byström (2007).

Con todo, al utilizar la definición de *leverage* y considerando la expresión $(r - \sigma^2 / 2)$ pequeña tenemos que la DI se reduce a

$$Z = \frac{\log(A_0) - \log(B)}{\sigma} = \frac{\log(1/L)}{\alpha L + \beta \omega + \gamma L \omega} \quad (4)$$

Esta DI simplificada puede obtenerse de información del balance (apalancamiento) y de mercado (volatilidad accionaria) de la firma.

5. Aplicación a Bancos Comerciales

Consideremos la información de la deuda de corto plazo (B^{CP}), la deuda de largo plazo (B^{LP}) y el patrimonio (K) a Diciembre de 2010 para 5 bancos comerciales chilenos obtenida desde la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (Tabla 1).

Tabla 1. Información de Balance y de Mercado de Bancos Comerciales en Chile Diciembre 2010 (en miles de millones de pesos)

	Banco de Chile	BCI	Corpbanca	Santander Chile
Deuda Total	12,144	8,312	4,313	11,495
Deuda Corto Plazo	4,446	2,844	612	4,236
Deuda Largo Plazo	7,698	5,468	3,700	7,259
Patrimonio	1,404	1,039	535	1,864
Volatilidad (%)	21.3	23.4	25.1	25.4
Clasificación Feller-Rate	AAA	AA+	AA	AAA
Clasificación Ajustada	A+	A	A-	A+

Fuente: Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras, Bloomberg y Feller-Rate

Con esta información y considerando un horizonte de análisis de 1 año, el *leverage* fue obtenido suponiendo que la totalidad de la deuda de largo plazo afecta la razón de apalancamiento, es decir, $L \equiv (B^{CP} + B^{LP}) / (B^{CP} + B^{LP} + K)$.

La volatilidad del *equity* se calculó como la desviación estándar anualizada del retorno diario del precio de cierre de la acción durante Diciembre de 2010; este último obtenido de Bloomberg. Adicionalmente se consideró la clasificación de riesgo de Feller-Rate y se realizó un ajuste de acuerdo con la clasificación de la deuda soberana de Chile (A+).

Sobre la base de la comparación de ratings entre Feller-Rate (Standard & Poor's) y Moody's obtenida del BIS y la Tabla 3 en Chan-Lau (2010) es posible realizar una comparación entre las categorías de riesgo ajustadas de Feller-Rate con la EDF (Tabla 2).

Tabla 2: Clasificaciones de Riesgo y EDF's

Standard & Poor's	Moody's	EDF (%)
AAA	Aaa	0.020
AA+	Aa1	0.032
AA	Aa2	0.040
AA-	Aa3	0.056
A+	A1	0.080
A	A2	0.114
A-	A3	0.144
BBB+	Baa1	0.182
BBB	Baa2	0.230
BBB-	Baa3	0.307
BB+	Ba1	0.408
BB	Ba2	0.544
BB-	Ba3	0.848
B+	B1	1.323
B	B2	2.064
B-	B3	4.168

Fuente: BIS (<http://www.bis.org/bcbs/qis/qisrating.htm>) y Chan-Lau (2010)

Sobre la información de la tabla obtenemos EDF's estimadas para el Banco de Chile y Santander Chile de 0.08%, mientras BCI y Corpbanca tendrían valores 0.114% y 0.144%, respectivamente. Utilizando $N = 1000$ encontramos los siguientes valores críticos para las

EDF's arriba consideradas: 450, 452 y 453. De esta forma la volatilidad del activo fue obtenida a partir de la aproximación de Bharath y Schumway (2008) calibrándose los parámetros en cuestión para que la PI estimada sea consistente con los valores críticos.

Los valores encontrados son $\alpha = 0.0202$, $\beta = 1.087$ y $\gamma = -1.125$, los que se diferencian de los propuestos por Byström (2007) pues Moody's KMV ajusta la distribución de probabilidad por industria de acuerdo a la distribución empírica de no pago.

De los resultados obtenidos por esta aproximación notamos que la volatilidad de los activos de los bancos bajo análisis es del orden entre 3.5 y 5% siguiendo el orden observado para las volatilidades del *equity*. Esto porque los niveles de *leverage* son relativamente similares. Por otra parte, las DI's ajustada se encuentra cercana a 3 para esta muestra (Tabla 3).

Tabla 3. DI y PI de Bancos Comerciales en Chile - Diciembre de 2010

	Banco de Chile	BCI	Corpbanca	Santander Chile
Leverage	0.896	0.889	0.890	0.860
Volatilidad Activos (%)	3.485	3.832	3.961	4.759
DI	3.140	3.074	2.954	3.157
PI (%)	0.074	0.100	0.135	0.074

Fuente: Elaboración propia.

Notamos que las Probabilidades de Insolvencia (PI) han sido calibradas para ajustar la información presentada en la Tabla 2. Información adicional disponible directamente de Moody's KMV nos permite confirmar que los valores son consistentes con sus EDF's. Esto confirma la consistencia entre las clasificaciones de riesgo ajustadas y la medida EDF.

III. Volatilidad Implícita

La estimación de la volatilidad implícita, que se obtiene de revertir el modelo de Black y Scholes, ha sido un indicador ampliamente utilizado para medir el riesgo del activo subyacente. Más aún, la generalización del proceso estocástico del subyacente ha dado paso a la generación del VIX (Demeterfi et al., 1999). En otra línea de investigación, la extracción recursiva de la volatilidad implícita para diferentes precios de ejercicio ha presentado un resultado empírico denominado *volatility smile*, en el cual se observa que la volatilidad implícita es creciente a medida que el precio de ejercicio se aleja del precio forward (Wilmott, 2006). Este fenómeno ha sido explotado por diversos autores para extraer la distribución de probabilidad de los precios de opciones.²

En esta sección exploramos el uso de entrevistas para derivar la volatilidad implícita del precio de un activo financiero, estableciendo una pregunta ampliamente aceptada entre los analistas financieros: ¿Cuál es la probabilidad que el precio del activo se ubique dentro de un determinado rango en los próximos T días? Los resultados obtenidos para una muestra piloto indican una volatilidad implícita de 11% la cual se encuentra por sobre las estimaciones históricas que tienen un promedio de 8%. La obtención de la volatilidad que proponemos en este trabajo se basa en el supuesto que el precio del activo puede ser caracterizado por un árbol binomial sin tendencia.

1. Pregunta del Rango

Si bien el modelo binomial permite cualquier tipo de pregunta sobre el valor del precio del activo, resulta más sencillo basar la estimación en valores locales. Por lo anterior, si se considera el precio spot del activo igual a S_0 y se asume una variación de $Y\%$, la pregunta a realizar sería: ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia que usted le asigna a que el precio del activo financiero se ubique entre $S_0/(1+Y)$ y $S_0(1+Y)$, en los próximos T días?

² Por ejemplo, Malz (1997) propone un método sencillo en el cual utiliza cotizaciones de estrategias de opciones. Con ellas deriva una distribución de probabilidad asumiendo riesgo neutral, debido a que el rendimiento del subyacente debe ser igual a la tasa libre de riesgo por cuanto las opciones son instrumentos redundantes. Para obtener la probabilidad efectiva del proceso del subyacente —esto es, la probabilidad en la que transan los individuos no cubiertos— se deben hacer supuestos sobre la dinámica del premio por riesgo.

Es claro que los parámetros de porcentaje de variación y número de días pueden entregar resultados distintos para un mismo encuestado. En particular, cambios en el intervalo de tiempo pueden ser atribuidos a expectativas sobre la tendencia del activo, el cual por ejemplo podría revertir a la media.

2. Valor Crítico

Consideremos que la probabilidad reportada por el encuestado para un determinado rango es λ . Dado que hemos supuesto que el activo no tiene tendencia, entonces la distribución es simétrica y el valor crítico del precio del activo se obtiene de resolver K en:

$$\alpha \equiv \frac{1-\lambda}{2} = \sum_{k=0}^K \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^K \binom{N}{k}. \quad (5)$$

Notamos que α corresponde a la probabilidad fuera del rango que debe distribuirse simétricamente. Por otra parte, el cálculo de K puede realizarse en Excel utilizando la función $\text{BINOM.CRIT}(N, p, \alpha) = K$.

3. Estimación de la Volatilidad

Considerando el valor crítico anterior (K) tenemos que el precio mínimo del activo que se encuentra dentro del rango asociado con la probabilidad reportada (λ) es $u^K d^{N-K} = u^{2K-N}$, lo último dado la restricción $d = 1/u$ que se deriva que el activo no tiene tendencia ($\theta = 0$).

Así $u^{2K-N} = 1/(1+Y)$ y definiendo $y = \log(1+Y)$, podemos trabajar con los logaritmos de la relación anterior: $[N - 2K] \log u = y$. Por último, al considerar la calibración estándar $u = \exp(\sigma \sqrt{T/N})$, tenemos que:

$$[N - 2K] \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} = y \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{y}{\sqrt{T}} \left[\frac{\sqrt{N}}{N - 2K} \right]. \quad (6)$$

Cuando N es suficientemente grande, las fórmulas anteriores (5) y (6) colapsan de modo que la estimación de la volatilidad se obtiene como sigue:

$$\alpha = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^K \binom{N}{k} = \Pr(X \leq K) = \Pr\left(\frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{K - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) \cong \Phi\left(\frac{K - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right).$$

De esta forma al considerar $p = 1/2$ tenemos la siguiente relación

$$\alpha \cong \Phi\left(-\frac{N - 2K}{\sqrt{N}}\right) \Rightarrow \Phi^{-1}(\alpha) = -\frac{N - 2K}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{-1}{\Phi^{-1}(\alpha)} = \frac{\sqrt{N}}{N - 2K}.$$

La que al reemplazar en (6) nos entrega

$$\sigma = -\frac{y}{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{T}}. \quad (7)$$

4. Resultados

Se realizó una encuesta piloto para estimar la volatilidad del Tipo de Cambio Nominal (TCN) en los próximos 5 días ($T = 1/52$). El precio spot para el día de la encuesta fue 470 y se consultó por un rango de 460-480, equivalente a una variación de 2%. La moda en probabilidad reportada fue 80%. Reemplazando este valor en (1) para $N = \{100, 500, 1000\}$, tenemos las siguientes volatilidades estimadas son 11.90, 11.40% y 11.29%, mientras que al utilizar (7) se tiene 11.14% (Tabla 4).

Como se observa en (6) y (7), la estimación de la volatilidad implícita es lineal en el porcentaje de variación del activo. Por ello los resultados de la Tabla 4 pueden generalizarse fácilmente para distintos niveles de variación del activo.³

³ Adicionalmente observamos que la recopilación de información a nivel de mercado puede simplificarse considerando la volatilidad implícita para el agente y reportando alguna medida central (como la media o mediana) como indicador agregado de la economía.

Tabla 4. Volatilidad Implícita para un Activo con Variación de 2%

λ	N			
	100	500	1000	Inf
0.50	23.80	19.96	20.53	21.17
0.52	17.85	19.96	20.53	20.22
0.55	17.85	19.96	18.82	18.90
0.58	17.85	17.74	17.37	17.71
0.60	17.85	17.74	17.37	16.97
0.62	17.85	15.97	16.13	16.27
0.65	14.28	15.97	15.05	15.28
0.68	14.28	14.51	14.11	14.36
0.70	14.28	13.30	14.11	13.78
0.72	14.28	13.30	13.28	13.22
0.75	11.90	12.28	12.54	12.41
0.78	11.90	11.40	11.88	11.64
0.80	11.90	11.40	11.29	11.14
0.82	10.20	10.64	10.75	10.65
0.85	10.20	9.98	9.82	9.92
0.88	8.92	9.39	9.03	9.18
0.90	8.92	8.87	8.68	8.68
0.92	7.93	7.98	8.06	8.16
0.95	7.14	7.26	7.28	7.29
0.98	5.95	6.14	6.10	6.14

Fuente: Elaboración propia.

5. Discusión

La volatilidad implícita corresponde a un precio de ejercicio específico, el cual nosotros hemos aproximado al extremo inferior del árbol asumiendo simetría. Adicionalmente la pregunta hace referencia a un rango dentro del intervalo relevante y no del cierre propiamente tal. Con ello nuestra medida no es directamente comparable con una volatilidad implícita obtenida de opciones para precios de ejercicios específicos. En contraste la pregunta de rango podría utilizarse —previo ajuste por tendencia— como un insumo para el cálculo de la volatilidad local, asumiendo que el precio de ejercicio sería el valor *forward*. Al realizar las preguntas al cierre de distintos horizontes puede obtenerse la volatilidad local utilizando la relación de Fokker-Planck como lo establece Gatheral (2006).

IV. Análisis del Peor Escenario

En el análisis de riesgo es importante considerar escenarios adversos para los cuales se debe establecer una provisión monetaria. Dichos escenarios pueden ser poco probables pero con un fuerte efecto en pérdidas. En esta línea el mecanismo estándar de análisis para portafolio corresponde al Valor en Riesgo, dentro del Modelo Binomial el caso más simple es presentado en esta sección. Por otra parte, un elemento fundamental en la administración de flujos corresponde al prepago de deuda, punto que desarrollamos basados en un ejemplo de crédito hipotecario para el cual modelamos la tasa de refinanciamiento. Ambos ejercicios son analizados en esta sección.

En términos del Modelo Binomial podemos considerar que el Peor Escenario se define bajo la secuencia $LL\cdots L$, la cual tiene probabilidad 2^{-N} siguiendo la calibración presentada en el Anexo A. De esta forma la elección del número de pasos y la probabilidad de ocurrencia de este escenario se encuentran relacionadas.

1. Valor en Riesgo

El análisis de Valor en Riesgo se basa sobre una probabilidad de ocurrencia dada de α . Usualmente esta probabilidad es lo más pequeña posible. Con este valor se obtiene el número de pasos como $N^+ = -\log(\alpha)/\log(2)$. Concretamente para $\alpha = 0.1\%$ tenemos que $N^+ = 10$, lo cual nos permite cuantificar el valor del activo. De esta forma para la secuencia $LL\cdots L$ el valor del activo queda determinado como $S_1 = d^{N^+} S_0$. Siguiendo con la calibración del Modelo Binomial tenemos que:

$$d^{N^+} = \exp\left[\left(\theta \frac{T}{N^+} - \sigma \sqrt{\frac{T}{N^+}}\right)N^+\right] = \exp(\theta T - \sigma \sqrt{N^+ T}).$$

Siguiendo con el ejemplo anterior el valor del activo, bajo este escenario de riesgo, corresponde a: $S_1 = \exp(\theta T - 3.16\sigma\sqrt{T})S_0$. Tomando $\theta = 0$: $s_1 - s_0 = -3.16\sigma\sqrt{T}$, lo cual entrega un factor levemente superior que la distribución normal (-3.09).

2. Prepago

Consideremos el problema de un agente que contrae una deuda a cuota fija y que tiene la posibilidad de prepagarla si las condiciones de refinanciamiento son favorables. Estas hacen referencia tanto a la tasa de refinanciamiento como de la multa por prepago.

Tomando R_0 como la tasa inicial de un crédito de plazo M , tenemos que la cuota (C) y el saldo insoluto para el período $N < M$ (S_N) son respectivamente:

$$C = \frac{R_0(1+R_0)^M S_0}{(1+R_0)^M - 1} \quad \text{y} \quad S_N = S_0(1+R_0)^N + C \left[\frac{1-(1+R_0)^N}{R_0} + \lambda \right], \quad (8)$$

donde S_0 corresponde al préstamo inicial y λ corresponde a la multa por prepago la cual se ha asumido como proporción de la cuota. Colapsando ambos elementos tenemos que

$$S_N = \frac{C}{R_0} \left[1 - \frac{1}{(1+R_0)^M} \right] (1+R_0)^N + C \left[\frac{1-(1+R_0)^N}{R_0} + \lambda \right] = \left[\frac{(1+R_0)^M - (1+R_0)^N}{R_0(1+R_0)^M} + \lambda \right] C,$$

Considerando que el individuo no altera su horizonte de deuda la cuota refinanciada a la nueva tasa R_n es

$$D_N = \frac{R_N(1+R_N)^{M-N} S_N}{(1+R_N)^{M-N} - 1}. \quad (9)$$

La cual puede ser comparada directamente con la anterior al reemplazar el saldo insoluto:

$$D_N = \kappa_N C, \quad \text{con} \quad \kappa_N = \left[\frac{R_N(1+R_N)^{M-N}}{(1+R_N)^{M-N} - 1} \right] \left[\frac{(1+R_0)^M - (1+R_0)^N}{R_0(1+R_0)^M} + \lambda \right]. \quad (10)$$

La expresión κ_N debe ser menor que uno para que el individuo decida hacer el prepago. El resultado debe ser evaluado numéricamente y requiere realizar un supuesto sobre la tasa de refinanciamiento. Para esto último asumimos el modelo de Black, Derman y Toy (1990), el

cual implica que la tasa es lognormal por tanto es siempre positiva. Así, bajo el peor escenario tenemos que $R_N = d^N R_0$, con ello el factor κ_N es función de la tasa inicial, la multa y la volatilidad de la tasa (si $\theta = 0$). De esta forma la evaluación implica calibrar el modelo apropiadamente y resolver numéricamente.

Por ejemplo, si tenemos una tasa inicial de 4%, un factor de multa de $\lambda = 0.5$ y un factor de baja $d = 0.95$, entonces un crédito a 20 períodos será prepago en el peor escenario en el tercer período. Notamos que el evento del prepago tiene una probabilidad de 12.5% que corresponde a la probabilidad del peor escenario. Adicionalmente, bajo ese escenario, la tasa de refinanciamiento es 3.43%.

Los resultados anteriores son muy sensibles al factor de baja de la tasa de refinanciamiento. Por ejemplo, para el caso de un crédito hipotecario a 20 años (240 meses) la tasa relevante mensual es 0.3% y tomando un factor de baja $d = 0.998$ podemos tener un prepago incluso si consideramos un factor de multa de $\lambda = 1$, es decir una cuota por concepto de prepago. En este caso el prepago —bajo el peor escenario— se realiza en el período 10 y la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario es 0.1%.

V. Conclusiones

En este artículo hemos presentado algunas aplicaciones del Modelo Binomial en el análisis de riesgo. Las aplicaciones empíricas indican que el modelo es apropiado para establecer las medidas de riesgo solicitadas tanto por su sencillez como por los resultados cuantitativos que se obtienen, los cuales son coherentes con lo observado empíricamente.

En particular para el caso de la Distancia a la Insolvencia (DI) notamos que la Probabilidad a la Insolvencia (PI) puede ser ajustada para replicar el valor de la medida de riesgo publicada por Moody's KMV. Esta medida de riesgo (EDF) ha sido ampliamente utilizada en estudios de riesgo encontrando que su información es similar a la obtenida de precios de mercados como CDS (*Credit Default Swap*). Por esto la DI es una medida apropiada de riesgo para países con menor desarrollo financiero, tal como lo aplican Alfaro, Gallardo y Vio (2010) para Casas Comerciales.

En la aplicación de Volatilidad Implícita nuevamente el Modelo Binomial es utilizado para hacer frente a la falta de precios de opciones financieras, las que permitan establecer la distribución implícita del activo subyacente. Por ello la propuesta de pregunta de rango permiten en un intervalo acotado de tiempo —para ignorar el efecto tendencia— establecer una estimación de volatilidad implícita. Si bien la extensión a determinar valores más extremos resulta muy atractiva, es posible que los encuestados no entreguen respuestas con una distribución de probabilidad consistente, es decir que tenga masa positiva en todos y cada uno de los puntos de su soporte. Con todo, el piloto realizado da cuenta de que los valores obtenidos son consistentes y pueden ser monitoreados en alta frecuencia.

Finalmente los resultados para el peor escenario permiten que los agentes calculen las pérdidas bajo una secuencia específica del Modelo Binomial la cual relaciona la volatilidad, del valor del activo con la probabilidad y el resultado por ejemplo en Valor en Riesgo.

Referencias

- Alfaro, R., N. Gallardo y C. Vio (2010). “Análisis de Derechos Contingentes: una aplicación a las Casas Comerciales.” *Revista de Economía Chilena* 13(1): 73-81.
- Alfaro, R. y A. Sagner (2009). “When RSI Met the Binomial Tree,” Documento de Trabajo N°520, Banco Central de Chile.
- Alfaro, R. y C. G. Silva (2008). “Medidas de Volatilidad de Índices Accionarios: el caso del IPSA,” Documento de Trabajo N°462, Banco Central de Chile.
- Bharath, S. T. y T. Schumway (2008). “Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model,” *The Review of Financial Studies* 21(3): 1339-1369.
- Black, F., E. Derman y W. Toy (1990). “A one-factor model of interest rate and its application to treasury bond options,” *Fin. Anal. J.* 46:33-39
- Black, F. y M. Scholes (1973). “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy* 81: 637-659
- Byström, H. (2007). “Merton for dummies: a flexible way of modeling default risk.” Documento de Trabajo, University of Technology Sydney.
- Chan-Lau, J. (2010). “The Global Financial Crisis and its Impact on the Chilean Banking System” Working Paper N°108, IMF.
- Cox, J., S. Ross y M. Rubinstein (1979). “Option pricing: a simplified approach,” *Journal of Financial Economics* 7(3): 229-263.
- Debreu, G. (1956). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press.
- Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal y J. Zou (1999). “More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps,” Goldman Sachs Research Notes.
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*, John Wiley & Sons Inc.
- Gray, D., C. Echeverría y L. Luna (2007). “Una medida del riesgo de insolvencia de la banca en Chile.” Artículo Informe Estabilidad Financiera.
- Gray, D., C. García, L. Luna y J. Restrepo (2009). “Riesgo financiero y política monetaria: una aplicación para Chile.” *Revista de Economía Chilena* 12(2): 11-33.
- Gray, D. y S. Malone (2008). “Macrofinancial Risk Analysis,” Hoboken, NJ, EEUU.: John Wiley & Sons.
- Jarrow, R., y A. Rudd (1983). *Option Pricing*, Irwin.

- Korablev, I. y S. Qu (2009). "Validating the public EDFTM model performance during the credit crisis." White Paper, Moody's KMV.
- Malz, A. (1997). "Estimating the probability distribution of the future exchange rate from options prices", *Journal of Derivatives*, Winter, 18-36.
- Merton, R. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates." *The Journal of Finance* 29: 449-470.
- Poirier, D. (1995). *Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach*, MIT Press.
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time Models*, Springer Finance Textbook.
- Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, volumen 3, segunda edición. John Wiley & Sons, Ltd.
- Zurita, F. (2007). "La Predicción de la Insolvencia de Empresas Chilenas." *Revista de Economía Chilena* 11(1): 93-116.

A. Calibración del Modelo Binomial

En esta sección presentamos la calibración del Modelo Binomial basados en los momentos observados del retorno del activo de interés. Para ello introducimos los conceptos teóricos primero para $N = 1$ y luego para la generalización de cualquier número de pasos.

Consideremos $N = 1$ lo que implica que el precio del activo únicamente sube o baja, es decir no se mantiene. Tomando el valor inicial como S_0 , entonces el precio del activo en el próximo período será $S_1 = uS_0$ si ocurre el estado H y $S_1 = dS_0$ en el caso en que ocurra el otro estado (estado L).

Estos valores tienen implícita una restricción en los factores de alza y baja, la que corresponde a: $0 < d < 1 < u$. Es necesario notar que por el momento estamos ignorando el factor de descuento (tasa de interés) relevante, la cual aparece con claridad en el caso de la valoración de opciones imponiendo un cambio en la restricción a los factores de alza y baja.

Para caracterizar el problema debemos agregar una probabilidad. Definimos así p como la probabilidad de que ocurra el estado H . Con ello somos capaces de calcular momentos de este proceso binario de modo de entender cual es retorno esperado y su volatilidad.

Dado que tenemos la información del precio del activo en cada estado y la probabilidad el resultado es directo. Para el caso del valor esperado tenemos que

$$E(S_1) = p(uS_0) + (1-p)(dS_0) = [up + d(1-p)]S_0.$$

Con ello observamos que la rentabilidad esperada depende de la expresión en corchetes, la cual contiene tanto los factores de alza y baja. Para el caso de la varianza necesitamos calcular un paso previo que corresponde al valor esperado del cuadrado del precio.

$$E(S_1^2) = p(u^2S_0^2) + (1-p)(d^2S_0^2) = [u^2p + d^2(1-p)]S_0^2.$$

Por fórmula tenemos que la varianza es la diferencia entre la expresión anterior y el cuadrado del valor esperado presentado anteriormente, es decir

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_1) &\equiv E(S_1^2) - [E(S_1)]^2 \\ &= [u^2p + d^2(1-p)]S_0^2 - [up + d(1-p)]^2 S_0^2 \\ &= [u^2p - u^2p^2 - 2udp(1-p) + d^2(1-p) - d^2(1-p)^2]S_0^2 \\ &= [u^2p(1-p) - 2udp(1-p) + d^2p(1-p)]S_0^2 \\ &= p(1-p)(u-d)^2 S_0^2. \end{aligned}$$

A diferencia del valor esperado observamos que la varianza depende de la diferencia entre los factores de alza y baja. Visto de otra forma la volatilidad del precio del activo está directamente relacionada con la distancia entre estos factores.

Para concretizar el problema supongamos que $p = 1/2$, es decir ambos estados son igualmente probables. Bajo este supuesto observamos que el valor esperado se reduce a $[(u + d)/2]S_0$, mientras que la volatilidad o raíz cuadrada de la varianza es $[(u - d)/2]S_0$.⁴

De esta forma para un retorno μ y una volatilidad σ el problema a resolver consiste en encontrar los valores de alza y baja que satisfacen $(u + d)/2 = 1 + \mu$ y $(u - d)/2 = \sigma$. Sumando y restando ambas ecuaciones tenemos que $u = 1 + \mu + \sigma$ y $d = 1 + \mu - \sigma$. Notamos de la calibración anterior que necesitamos calzar retorno esperado y volatilidad para lo cual tenemos 3 parámetros: u , d y p . Por ello podemos arbitrariamente fijar uno de ellos. El modelo original del artículo de Cox, Rubinstein y Ross (1979) establece $d = 1/u$ como restricción, calibrando los parámetros de alza y la probabilidad.

Alternativamente podemos considerar una variable auxiliar que caracterice al precio del activo y posea propiedades estadísticas. Convenientemente consideremos X como una variable binaria que toma el valor cero cuando el estado es L y uno en el estado H . Así el precio en el siguiente período es $S_1 = u^X d^{1-X} S_0$. Si definimos $s = \log(S)$, observamos que el logaritmo simplifica el problema a $s_1 = X \log(u) + (1 - X) \log(d) + s_0$.

Antes de generalizar el modelo a N pasos resulta ilustrativo considerar 2 pasos para lo cual tenemos que el precio del activo presenta 4 trayectorias: subir y subir (HH), subir y bajar (HL), bajar y subir (LH) y bajar y bajar (LL). Por simplicidad consideramos que los factores de alza y baja se mantienen por lo que el precio del activo puede tomar 3 posibles valores en el siguiente período:

$$S_1 = \begin{cases} u^2 S_0 & HH \\ ud S_0 & HL \text{ ó } LH \\ d^2 S_0 & LL \end{cases}$$

⁴ Intuitivamente observamos que la rentabilidad depende del promedio de los factores de alza y baja, mientras el riesgo de su diferencia. Esta intuición nos indicará la forma cómo calibrar los factores de alza y baja acorde con la rentabilidad y volatilidad deseada para el problema.

Esto puede ser representado considerando una variable X binomial que toma el valor 0 bajo el estado LL , 1 bajo los estados LH ó HL y 2 bajo el estado HH . De esta forma el precio del activo puede ser representado como $S_1 = u^X d^{2-X} S_0$.

Al considerar N pasos tenemos $N+1$ valores terminales para S_1 , mientras el número de trayectorias se incrementa a 2^N . En general un número limitado de pasos es suficiente para caracterizar el valor del activo. De esta forma tenemos que $S_1 = u^X d^{N-X} S_0$, donde X es una variable aleatoria con distribución Binomial que toma los valores entre 0 y N .

Por estadística podemos definir los primeros momentos de la distribución Binomial como sigue: $E(X) = Np$ y $Var(X) = Np(1-p)$. Adicionalmente observamos que el precio del activo tiene forma exponencial por tanto tomaremos el logaritmo por simplicidad, de modo que: $s_1 = s_0 + X \log(u) + (N - X) \log(d) = s_0 + X [\log(u) - \log(d)] + N \log(d)$.⁵

Para cerrar la calibración del modelo consideraremos que el tiempo en análisis relevante es T , el cual se divide por el número de pasos del Modelo Binomial. De esta forma los primeros momentos que deseamos calzar son $E(s_1 - s_0) = \theta T$ y $Vol(s_1 - s_0) = \sigma \sqrt{T}$, es decir el promedio del retorno logarítmico y su volatilidad.

Utilizando resultados anteriores tenemos para el retorno logarítmico la siguiente expresión: $E(s_1 - s_0) = [\log(u) - \log(d)]E(X) + N \log(d) = N[p \log(u) + (1-p)\log(d)]$, mientras para la volatilidad: $Vol(s_1 - s_0) = [\log(u) - \log(d)]Vol(X) = [\log(u) - \log(d)]\sqrt{Np(1-p)}$.

Nuevamente contamos con más parámetros que restricciones por lo que consideramos la restricción $p = 1/2$, con lo cual las ecuaciones se reducen a $\log(u) + \log(d) = 2\theta T/N$ y $\log(u) - \log(d) = 2\sigma \sqrt{T/N}$, respectivamente.

⁵ Es importante destacar que la diferencia de logaritmos de los precios en distintos períodos del tiempo corresponde a una variación porcentual en tasa continua, es decir esta diferencia se entiende como retorno del activo.

Resolviendo el sistema tenemos que las soluciones para los factores de alza y baja son:

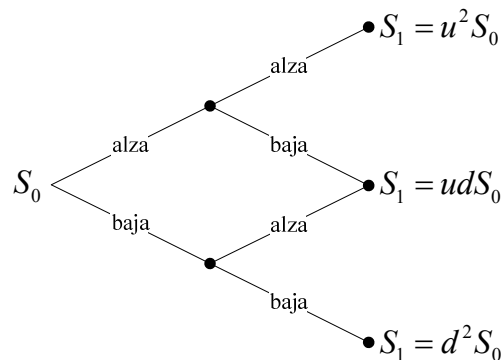
$$u = \exp\left(\theta \frac{T}{N} + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}\right) \text{ y } d = \exp\left(\theta \frac{T}{N} - \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}\right).$$

Es importante resaltar que θ es el promedio del retorno logarítmico y no simple. Una forma directa de relacionarlo con el retorno simple (μ) es considerando $\theta = \mu - (1/2)\sigma^2$. Del mismo modo, notamos que bajo $\theta = 0$ ocurre que $d = 1/u$ caso en el cual la calibración coincide con la propuesta de parámetros de Cox, Rubinstein y Ross (1979).

B. Distribuciones de Probabilidad

La distribución considerada para el precio del activo corresponde a la Binomial. Para entender su estructura retomaremos el caso de 2 pasos y luego presentaremos los resultados generales para N pasos. Por el Teorema Central del Límite la función de distribución converge a la distribución normal cuando el número de pasos diverge.

Figura B.1: Modelo Binomial con 2 pasos



Consideremos la Figura B.1, donde el precio del activo es representado por 2 pasos. Cada paso tiene asociada una probabilidad al alza de p , por tanto los estados finales —de abajo hacia arriba— tienen probabilidades $(1-p)^2$, $2p(1-p)$ y p^2 , respectivamente. El segundo caso ocurre pues existen 2 trayectorias (baja-alza y alza-baja) que confluyen a dicho valor.

Al extender el análisis tenemos que considerar el número de trayectorias que termina en determinado estado final, lo cual puede ser resuelto a través de combinatorias.

De esta forma cada estado final recibe tantas trayectorias como las que se obtiene de combinar N elementos sobre K posiciones siendo K entre 0 y N , partiendo de la posición más baja de la figura. Para este ejemplo tenemos 2 sobre 0 que corresponde a 1 (estado final inferior), 2 sobre 1 que son 2 (estado final central) y 2 sobre 2 que corresponde a uno (estado final superior).

Como resultado de generalizar el caso anterior a N pasos tenemos que la probabilidad de que la variable aleatoria X pasos tome un cierto valor se define como:

$$\Pr(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}.$$

Por tanto la probabilidad acumulada se obtiene de la suma de elementos:

$$\Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^x \binom{N}{k}.$$

Donde en la igualdad hemos impuesto $p = 1/2$ lo que simplifica el problema. Los momentos de la distribución Binomial pueden ser obtenidos de la función generadora de momentos $M_X(t)$, la que corresponde a: $M_X(t) = [1 - p + p \exp(t)]^N$.

Utilizando esta función tenemos (Poirier, 1995): $E(X) = Np$, $E[(X - Np)^2] = Np(1-p)$, $E[(X - Np)^3] = Np(1-p)(1-2p)$ y $E[(X - Np)^4] = 3[Np(1-p)]^2 + Np(1-p)[1 - 6p(1-p)]$.

Así el coeficiente de asimetría —tercer momento centrado sobre la raíz cuadrada del cubo de la varianza— es $(1-2p)/\sqrt{Np(1-p)}$, mientras la curtosis —cuarto momento centrado sobre el cuadrado de la varianza— es $3 + [1 - 6p(1-p)]/[Np(1-p)]$.

Bajo $p = 1/2$ notamos que la asimetría es cero implicando que retornos positivos y negativos son igualmente probables. Por otra parte la curtosis se reduce a $3 - 2/N$ que indica que converge a 3 por debajo.

Para el caso en que N crece al infinito la función de probabilidad de la distribución Binomial toma los valores extremos cero o uno. Una forma de evitar dicho problema es considerar la distribución límite, la que corresponde a la distribución normal.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(X \leq a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{a - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{a - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right),$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la distribución normal acumulada con media cero y varianza uno. Debido a que el logaritmo del precio del activo es Binomial entonces en el límite el logaritmo del precio es normal lo que también puede describirse como que el precio es log-normal.

Comparativamente la distribución normal es simétrica con lo cual coincide con la Binomial bajo $p = 1/2$. En términos del cuarto momento estandarizado, o curtosis, la normal tiene un valor de 3, valor límite de la distribución Binomial cuando $p = 1/2$ y N diverge.

**Documentos de Trabajo
Banco Central de Chile**

**Working Papers
Central Bank of Chile**

NÚMEROS ANTERIORES

PAST ISSUES

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.

DTBC – 630 Mayo 2011

Jaque Mate a las Proyecciones de Consenso

Pablo Pincheira y Nicolás Fernández

DTBC – 629 Mayo 2011

Risk Premium and Expectations in Higher Education

Gonzalo Castex

DTBC – 628 Mayo 2011

Fiscal Multipliers and Policy Coordination

Gauti B. Eggertsson

DTBC – 627 Mayo 2011

Chile's Fiscal Rule as a Social Insurance

Eduardo Engel, Chistopher Neilson y Rodrigo Valdés

DTBC – 626 Mayo 2011

Short – term GDP forecasting using bridge models: a case for Chile

Marcus Cobb, Gonzalo Echavarría, Pablo Filippi, Macarena García, Carolina Godoy, Wildo González, Carlos Medel y Marcela Urrutia

DTBC – 625 Mayo 2011

Introducing Financial Assets into Structural Models

Jorge Fornero

DTBC – 624 Mayo 2011

Procyclicality of Fiscal Policy in Emerging Countries: the Cycle is the Trend

Michel Strawczynski y Joseph Zeira

DTBC – 623

Mayo 2011

Taxes and the Labor Market

Tommaso Monacelli, Roberto Perotti y Antonella Trigari

DTBC – 622

Abril 2011

Valorización de Fondos mutuos monetarios y su impacto sobre la estabilidad financiera

Luis Antonio Ahumada, Nicolás Álvarez y Diego Saravia

DTBC – 621

Abril 2011

Sobre el nivel de Reservas Internacionales de Chile: Análisis a Partir de Enfoques Complementarios

Gabriela Contreras, Alejandro Jara, Eduardo Olaberría y Diego Saravia

DTBC – 620

Marzo 2011

Un Test Conjunto de Superioridad Predictiva para los Pronósticos de Inflación Chilena

Pablo Pincheira Brown

DTBC – 619

Marzo 2011

The Optimal Inflation Tax in the Presence of Imperfect Deposit – Currency Substitution

Eduardo Olaberría

DTBC – 618

Marzo 2011

El Índice de Cartera Vencida como Medida de Riesgo de Crédito: Análisis y Aplicación al caso de Chile

Andrés Sagner

DTBC – 617

Marzo 2011

Estimación del Premio por Riesgo en Chile

Francisca Lira y Claudia Sotz

DTBC – 616

Marzo 2011

Uso de la aproximación TIR/Duración en la estructura de tasas: resultados cuantitativos bajo Nelson – Siegel

Rodrigo Alfaro y Juan Sebastián Becerra