REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS

El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización

Verónica Molfino Vigo[1], Gabriela Buendía Abalos[2]

veromolfino@gmail.com, gbuendia@ipn.mx

[1]*Instituto de Profesores "Artigas", Montevideo, Uruguay*
[2]*CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México*

Resumen

Este artículo describe un estudio sobre los fenómenos de producción, adquisición y difusión del concepto de límite funcional. Se busca explicar cómo se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente, tanto en ámbitos académicos como escolares, a través del análisis de las prácticas sociales que lo generan. Esto implicó explorar, por un lado, su desarrollo socio-histórico-cultural al interior de la comunidad matemática y, por otro lado, su tratamiento en la matemática escolar, atendiendo aspectos específicos del discurso matemático escolar como los libros de texto y concepciones del docentes sobre su práctica educativa. Se investigó especialmente la situación en el ámbito uruguayo, intentando explicar las relaciones entre ambas exploraciones. Este análisis permitió elaborar la hipótesis sobre la existencia de un proceso de institucionalización del concepto de límite que atraviesa por diferentes momentos y que, en su conjunto, explicaría el papel del límite en el discurso matemático escolar.

Palabras clave: Institucionalización, límite funcional, práctica social.

Abstract

This paper describes a study about functional limit concept production, acquisition and diffusion. It explains how the concept became valid knowledge, socially and culturally accepted in the mathematical community as well as in the school mathematics, by analyzing the social practices that generate it. The concept's social, historical, and cultural development in the mathematical community was explored. The way it is treated in the school mathematics was also explored, focusing on specific aspects such as text books and educational practices' conceptions of teachers. The research was centered specially on the uruguayan system, explaining the relationship between both explorations. This analysis allowed elaborating a hypothesis about the existence of an institutionalization process of the limit concept that goes through different stages and would explain the rol of limit in school mathematic's discourse.

Keywords: Institucionalization, function limit, social practice.

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en Matemática Educativa alrededor del concepto del límite de funciones han logrado explicaciones acerca de por qué los estudiantes no aprenden el concepto, cuáles son los procesos cognitivos y didácticos relacionados con el aprendizaje del límite y cuáles son las posibles alternativas de abordaje para el concepto de límite. También se han enfatizado los aspectos socio-históricos de la evolución del concepto para investigar cómo se ha ido constituyendo la construcción del concepto de límite[1].

Ante este panorama, proponemos un estudio cuyo énfasis no esté en el límite como objeto preexistente, sino que trate con los fenómenos de producción, adquisición y de difusión de ese conocimiento

[1] Las investigaciones alrededor del límite pueden estructurarse en cuatro grandes grupos: según el polo de la tríada didáctica en la cual se centran encontramos a los que enfatizan en los aspectos cognitivos (Tall, 1980, 1991 y 1992; Vinner, 1991, entre otros), en los aspectos epistemológicos (Cornu, 1986; Sierpinska, 1987; Dubinsky, 1991 y 2000, entre otros) o en los aspectos didácticos (Bokhari y Yushau, 2006; Bucari, Bertero y Trípoli, 2007, entre otros). Otro grupo de investigaciones se centran en los aspectos sociohistóricos: Bagni, 2005; Blázquez y Ortega, 2002; Hitt, 2003; Juter, 2006, entre otros.

matemático. Planteamos una discusión sobre el límite en el paradigma actual de enseñanza del Cálculo en la que se reconozca el papel de los escenarios socio-histórico culturales en los que se desarrolló dicho saber. Ello reconoce al hombre haciendo matemáticas en un escenario cultural e históricamente situado, y nos permite analizar , entonces, el porqué enseñamos hoy el límite de la manera como lo hacemos.

Un análisis de este tipo problematiza la enseñanza actual del límite de tal manera que abre la posibilidad de cuestionamientos en la comunidad escolar acerca de su tratamiento escolar, y de cómo y por qué los actores involucrados en la conformación de los programas deciden qué debemos enseñar y aprender de los conceptos del Cálculo, y del límite en particular. Buscamos una explicación acerca de cómo el saber matemático referido al límite de una función se volvió un saber institucionalizado; esto es, cómo se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente en el ámbito escolar y en los ámbitos académicos.

2. MARCO TEÓRICO

Este escrito se enmarca en una visión socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998) lo cual nos permitirá explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales. Se hablará de *prácticas sociales* como aquéllas normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005) y que son generadoras de herramientas y representaciones sociales (Ferrari y Farfán, 2009). Ya que nos importa reconocer el papel de los escenarios socioculturales y de la escuela como una institución[2], se analiza específicamente el contexto educativo uruguayo. Como en toda institución, en la escuela se desarrollan prácticas, que al instituirse en un contexto específico, resultan en normas y visiones determinadas.

Una de las hipótesis que surge de tal análisis, es que la institucionalización es un proceso en el que además de los procesos de transposición del saber matemático en cuestión –el límite funcional- existen prácticas subyacentes como la formalización y la difusión que norman todo aquello que va constituyendo al concepto de límite.

Al seno de la socioepistemología, Cordero (2006) distingue en la evolución de la matemática educativa como disciplina dos programas de investigación: los que prestan especial atención a los procesos cognitivos individuales y los que analizan la construcción del conocimiento en los escenarios socioculturales. Sin embargo, plantea que ninguna de estas aproximaciones permite explicar cómo un conocimiento se convierte en un saber institucionalizado en ámbitos científicos o para su estudio en la escuela, cómo los grupos se organizan, de qué se valen y qué métodos utilizan para constituir dicho conocimiento. Esto se da porque ambas aproximaciones conciben al conocimiento como preexistente al sujeto que aprende y descontextualizado de las prácticas de referencia que le dieron origen.

En cambio, si el conocimiento matemático no es considerado como preexistente al sujeto que aprende, sino que se analizan las circunstancias sociales, históricas y culturales de los escenarios en los que se produce y difunde, los saberes matemáticos pueden ser concebidos como un bien cultural producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir la realidad (Martínez, 2005). El conocimiento constituido como tal en ámbitos no escolares, sufrirá una serie de modificaciones tanto en su estructura como en su funcionamiento en el proceso de difusión hacia y desde el sistema de enseñanza (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

La idea anterior parece considerar dos aspectos: la evolución del saber institucionalizado en ámbitos académicos, y el saber institucionalizado para su estudio en la escuela. Ambos aspectos guardan una relación dialéctica; sin embargo, con el fin de reconocer el papel de los escenarios socio-histórico culturales, los abordaremos de forma separada.

3. AL SENO DE LA COMUNIDAD MATEMÁTICA

3.1 Etapas en el desarrollo histórico

Para los intereses de la investigación, retomamos las etapas de tránsito del concepto de límite hasta llegar a la configuración actual del concepto de límite. Dichas etapas se identificaron a partir del análisis de diversas investigaciones (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006; Juter, 2006; Kline, 1994; Sánchez y Contreras, 2000; Youschkevitch, 1976). En este desarrollo al seno de la comunidad matemática, se intenta dar cuenta de las necesidades socioculturales a las que responde cada una de ellas. Ello permitirá discutir el papel de las prácticas sociales en el tránsito entre ellas.

1er etapa: la Antigüedad (época griega)

Se caracteriza por la consideración de problemas geométricos, con el problema del cálculo del área del círculo como ejemplo paradigmático. El límite surge en un ambiente geométrico–estático, principalmente en problemas en los que se quería determinar el área de una figura o el volumen de un cuerpo. Los principales trabajos a destacar son los de Hipócrates (S. V a.C.), quien utiliza el concepto para determinar el área de las "lúnulas"; de Eudoxo (408-355 a.C.) quien presenta de manera implícita el concepto de límite en las demostraciones por exhausción, cuando se quiere demostrar la validez de los resultados alcanzados de manera inductiva o empírica; y los de Arquímedes (287-212 a.C.), quien aplica este método para demostrar sus resultados referidos a áreas y volúmenes (Sánchez y Contreras, 2000). Existe un interés explícito por formalizar y validar dichos resultados. El método de exhausción surge como una alternativa al paso al límite,

[2] Una entidad dinámica que posibilita la conservación de saberes en las sociedades a través del tiempo (García-Torres y Cantoral, 2007)

lo que era inviable en el momento por la ausencia del concepto de número real. De hecho, el propio concepto de función estaba en un estado incipiente en el momento, sólo se puede hablar de una “intuición del concepto de función” (Youschkevitch, 1976), caracterizada por la asociación con la representación tabular.

Es necesario destacar las paradojas propuestas por Zenón (480 a.C.) dirigidas a las concepciones pitagóricas del tiempo y el espacio como suma de infinitos instantes o puntos. Éstas pueden haber sido el motivo por el cual los trabajos posteriores se aferraran a la Geometría estática para eludir tratar con el infinito. Pasaron varios siglos para que estas paradojas fueran superadas y se lograra un avance en esta área del conocimiento. Para ello fue necesario el desarrollo simultáneo de otras herramientas matemáticas relacionadas, como el concepto de función y sus representaciones algebraica, analítica y geométrica; métodos algebraicos más potentes; sistemas de coordenadas; estudio de la variación infinitesimal.

2da etapa: siglo XVII

Esta etapa se caracteriza por la búsqueda de resultados para problemas físicos y astronómicos concretos, utilizando métodos infinitesimales. Las aportaciones de Kepler, Fermat, Cavalieri, Barrow, Newton y Leibniz, se encuentran dentro de dicho período (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez et al. 2006). Los matemáticos que trabajaron con métodos infinitesimales en el siglo XVII lo hicieron en un ambiente geométrico – dinámico; el móvil era el estudio del movimiento a través de prácticas relacionadas con la predicción, que motivaba la profundización en el estudio del Cálculo. El límite se presenta, nuevamente de manera implícita, vinculado a los problemas de cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Los matemáticos de la época desarrollaron sus teorías en un ambiente más intuitivo, el afán por conseguir resultados dominaba sobre la búsqueda de argumentos y fundamentaciones sólidas (Kline, 1994).

Antes de que comenzaran a explicitarse las críticas a los fundamentos, los infinitésimos constituían una definición formalmente operable en el sentido de Bills y Tall (1998) ya que permitían crear o reproducir (significativamente) un argumento a pesar de no estar formalmente definidos respecto a los criterios actuales. Se podía a partir de ellos encontrar resultados y generar argumentos que fueron considerados válidos; sin embargo, al cuestionar dichos fundamentos, los infinitésimos perdieron su estatus de “definición formalmente operable”.

Según Kline (1994), las criticas propuestas a los trabajos de Newton y Leibniz y de sus antecesores por Bernard Nieuwentijdt (en 1694) y el obispo George Berkeley (en 1734), pusieron de manifiesto precisamente este conflicto. Los ‘infinitésimos’ de Kepler, los ‘indivisibles’ de Cavalieri, el método de Fermat o de Barrow para buscar extremos, e incluso las ‘cantidades evanescentes’ de Newton y lo ‘infinitamente pequeño’ de Leibniz eran considerados como cero (despreciables) si aparecen como sumandos pero como pequeñas cantidades no nulas si aparecen como denominadores, a la vez que la suma de infinitesimales podía ser finita. Berkeley y Nieuwentijdt evidenciaron cómo dos concepciones contradictorias estaban siendo evocadas simultáneamente en los fundamentos de dichos matemáticos. Esto condujo a una búsqueda por mejorar los argumentos utilizados y marcó un hito en el desarrollo histórico del concepto, en lo que hace a la estructura de la matemática formal.

En respuesta a las críticas de Nieuwentijdt, Leibniz escribió en un manuscrito no publicado de 1695:

Será suficiente si, cuando hablamos de magnitudes infinitamente grandes (o, más estrictamente, ilimitadas), o infinitamente pequeñas (es decir, las menores a las que alcance nuestro conocimiento), se entiende que significamos cantidades indefinidamente grandes o indefinidamente pequeñas, es decir tan grandes o tan pequeñas como se quiera, de modo que el error que se pueda asignar sea menor que una cantidad establecida de antemano. (citado en Kline, 1994, p. 511)

Los trabajos de Newton y Leibniz conformaron una nueva manera de resolver problemas, y como nueva disciplina precisaba de nuevos fundamentos, que no se podían explicar con las herramientas teóricas conocidas hasta el momento. Las críticas a sus fundamentos pusieron de manifiesto esa falta de rigor, poniendo en tela de juicio la precisión y fundamentación de las nuevas técnicas y dando pie a una nueva etapa en el desarrollo del concepto.

3ª etapa: siglo XVIII

Se caracteriza por la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal. Dicha transformación se dio a través de, en parte, por la *generalización* de los métodos a otro tipo de funciones que fueron siendo consideradas por la comunidad matemática por resultar significativas en situaciones y problemas concretos, así como por el interés por *formalizar* los conceptos. Se requirió profundizar también en el concepto de función. Se destacan en esta época los trabajos de Euler, D’Alembert y Lagrange, quienes intentan fundar el cálculo en bases independientes de la geometría, utilizando el álgebra.

Euler promovió ese cambio en la fundamentación considerando funciones en lugar de variables, aunque el concepto de función no era el actual sino el formulado por Bernoulli: “una función es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes” (Boyer, 1992, p. 558). Así, pretende eludir el trabajo con infinitesimales considerando el desarrollo en series infinitas de las funciones, aunque a veces la no consideración de su convergencia lo condujo a errores (Blázquez y Ortega, 2002).

Lagrange, interesado en dotar al cálculo infinitesimal del rigor de las demostraciones de la época griega, recurrió también al álgebra y al desarrollo en series de potencias para definir las funciones. Consciente de que no todas las funciones permitían ser consideradas de esa manera o al menos no en todos los puntos, descarta esos casos por tratarse de casos excepcionales. Pretendía de esta manera eludir la consideración del concepto de límite, lo que en principio tuvo aceptación entre sus contemporáneos. Sin embargo, más tarde fue abandonado precisamente por sus puntos débiles en la formalización: el asumir que todas las funciones admitían desarrollos en series de potencia, sin percatarse que el estudio de su convergencia involucra al concepto de límite (Kline, 1994).

A pesar de no haber conseguido por completo su objetivo (eludir los infinitesimales utilizando sólo herramientas algebraicas), tanto Lagrange como Euler contribuyeron a separar la fundamentación del análisis de la geometría y la mecánica. Estamos aquí frente a un proceso de despersonalización de saberes.

D'Alembert se fundamentó en los trabajos de Newton considerando su método de razones primeras y últimas como un método para encontrar el límite de esas razones. Su consideración explícita del concepto de límite lo condujo a ser uno de los primeros matemáticos en expresar una definición del mismo:

*Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (*Citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 75).

Aunque con algunas diferencias, como la consideración de las "cantidades" como monótonas y de la imposibilidad de que el límite sea alcanzado, esta definición se aproxima a la aceptada actualmente. Sin embargo, no fue suficientemente reconocida en su época por estar enunciada en lenguaje coloquial y no disponer suficientes herramientas algebraicas: esta etapa se caracteriza precisamente por una fuerte concepción algebraica.

4ª etapa: entre el siglo XIX y principios del XX

Los resultados obtenidos en la etapa precedente estaban fuertemente justificados gracias a un concepto de función según el cual a toda función se le podía transmitir las propiedades de continuidad, derivabilidad, integrabilidad de las funciones algebraicas más simples (polinomios y funciones racionales). Pero este fundamento dejó de ser válido cuando se precisó extender el concepto de función a otros contextos, debido a la consideración de nuevos problemas matemáticos y físicos, entre ellos el de la cuerda vibrante. También influyó el desarrollo de la enseñanza de la materia debido a una necesidad de *difusión* de las nuevas ideas.

Se consideran en este período principalmente los trabajos de Cauchy (1821) y Weierstrass, que se caracterizan por la *aritmetización* del análisis.

Bagni (2005) sostiene que las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y tenían en común el considerar al límite como una aproximación que no se alcanza, más como un *proceso* que como un *objeto* en sí mismo. Estas concepciones comparten además el ser expresadas principalmente en forma verbal, incluida la concepción de Cauchy. Es interesante destacar cómo en la obra de Cauchy sí existen indicios de considerar al límite como un objeto y no sólo como un proceso en las definiciones de número irracional y de superficie de círculo:

"... un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus... "

Cauchy (1821, p. 4)

Su obra Co*urs d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1er Partie Analyse Algebrique* representa una piedra fundamental en el proceso de rigorización del Análisis, ya que es la primera en la cual el concepto de límite, y no el de infinitesimales, es usado como la base sobre la que se construyen el resto de los conceptos: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral. Por otra parte, existe un interés explícito de Cauchy por cimentar sólidamente el análisis, a diferencia de sus antecesores, quienes priorizaban la búsqueda de resultados a la fundamentación.

Aizpuru y Pérez-Fernández (1999) sostienen que una de las razones de la búsqueda de rigor en el cálculo infinitesimal es la necesidad de difusión, que supuestamente conduciría a una clarificación de los conceptos y principios. Sin embargo, señalan que ello no fue logrado por Cauchy, cuyo libro fue duramente criticado por su excesivo rigor por alumnos, colegas e incluso la dirección del *Conseil d'Instruction de la École Polytechnique*. Según los autores, las razones que impulsaron a Cauchy se originan en la preocupación por la debilidad lógica de los fundamentos del Cálculo.

En los Preliminares de la obra, Cauchy define el concepto de límite.

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière a finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres."

Cauchy (1821, p. 4)

Como vemos, esta definición aún es imprecisa porque utiliza términos como "se aproximan indefinidamente…"

Define infinitésimo y límite infinito para una sucesión a partir de esta definición de límite, y más adelante, después de definir la monotonía da ejemplos que permiten afirmar que era consciente de la diferencia entre monotonía y convergencia.

Cauchy establece además criterios de convergencia para límites indeterminados, en cuyas demostraciones se puede apreciar la precisión y claridad de su idea de límite. Utiliza estos criterios para la justificación de la existencia de diferentes órdenes de infinitos.

Los autores afirman que en su definición de función continua, Cauchy identifica el aspecto esencial de la continuidad, a la vez que formula una definición de continuidad mediante sucesiones, muy útil en la demostración de teoremas. Sin embargo, la definición resulta confusa por hablar de continuidad en un intervalo y puntual a la vez. Esta definición ambigua puede ser el punto de partida de una concepción errónea en su teoría: que las propiedades de los términos de una sucesión se transfieren automáticamente a su límite. Esta confusión sólo se subsanará después, con el concepto de continuidad uniforme introducido por Heine en 1870.

Vale destacar que la reputación e influencia de la que gozaba en su cargo en las academias científicas de la época (la Academia Politécnica de Paris y la Sorbona, entre otras) permitieron que fueran sus ideas las que trascendieran, y no las de otros matemáticos que trabajaron en la misma dirección pero con diferentes métodos (Kline, 1994). Estos escenarios históricos permiten apreciar la influencia de las motivaciones personales y sociales en la construcción, evolución y difusión de los saberes matemáticos.

Es recién con Weierstrass que se introduce el uso de los registros de representación simbólica ya que realiza un esfuerzo por evitar el uso de la expresión "la variable se aproxima al límite" porque sugería –ambiguas- ideas de tiempo y movimiento. Esto permitió evolucionar entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto). Así, presentó la definición que actualmente se enseña en los cursos de cálculo:

Si dado cualquier ε *positivo, existe un* δ *tal que para* $0 < n < \delta$*, la diferencia* $f(x_0 \pm n) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε*, entonces se dice que L es el límite de f(x) para* $x = x_0$.

Blázquez y Ortega (2002, p. 77)

Por último, se podría considerar una última etapa caracterizada por la generalización del concepto a nuevos contextos dentro de la matemática, gracias a la reciente consideración de los espacios topológicos como generalización de los espacios métricos, de los cuales el de la distancia habitual en el conjunto de los números reales es sólo un caso particular. El límite es, pues, una concepción topológica ya no tan estrechamente vinculada con una determinada definición de distancia y aplicable a funciones cuyo dominio y codominio ya no tienen por qué ser el de los números reales.

3.2 Las prácticas sociales en un análisis socioepistemológico

Puede observarse cómo la definición formal, actualmente consensuada en la comunidad matemática y expresada en términos de ε - δ [3], tiene una historia llena de momentos que responden a las necesidades e intereses de la época. Newton, Wallis, D'Alembert, Cauchy y Weierstrass, entre otros, fueron proponiendo diferentes definiciones. No hay una más correcta que la otra, sino que cada una debe ser interpretada en el contexto que le dio origen y de las demandas sociales o propias de la comunidad matemática a las que responde. La definición, en particular la de límite, no es única, sino que varía según el contexto socio-histórico en el que se considera, y no tiene por qué coincidir con la definición formal, que es la considerada como válida por la comunidad matemática en determinado momento y en determinado lugar (Tall y Vinner, 1981).

Pueden explicitarse en el desarrollo del concepto de límite ciertas *prácticas sociales* que promovieron el desarrollo de herramientas matemáticas en cada etapa, la profundización de fundamentos y, posteriormente el tránsito entre ellas. Sin que necesariamente sean explícitas en cuanto a objetivos a cumplir por algún investigador, sí cumplieron un papel normativo en el quehacer de los diferentes grupos sociales que participaron en la actual configuración del concepto.

La *formalización*, entendida como el proceso que sistematiza y da coherencia a un corpus matemático a través de una estructura lógico-simbólica apropiada, y la búsqueda de *generalización* de los conceptos involucrados en la resolución de nuevos problemas parecen haber oficiado de móviles en las etapas 3 y 4. A su vez, vimos cómo especialmente en la etapa 4 la búsqueda de una *extensión* de un concepto a otros contextos está jugando un papel importante para la explicitación formal del concepto.

También la *transmisión y difusión* del conocimiento a un público creciente estaría promoviendo la clarificación y fundamentación del análisis para apoyarse en bases rigurosas, evitando los ambiguos fundamentos dados hasta el momento.

Se ha descripto brevemente el proceso que vivió el saber matemático "límite funcional" en ámbitos académicos hasta llegar a la configuración actualmente aceptada. Hemos observado el papel que juegan en el transcurso de dicha descripción las *prácticas sociales* –especialmente la de formalización, generalización y difusión-. Dichas prácticas son las que han normado las actividades propias de cada etapa, constituyen el móvil que promueve la construcción del conocimiento consensuado en cada momento.

Existe un núcleo común en el saber que es lo que caracteriza a cada una de estas etapas, que es lo que explícita o implícitamente se acepta como válido en determinado momento por determinado grupo social. Podemos ver a esos núcleos como una institucionalización del saber en cuestión, ya que es la manera en que se presenta el saber en un determinado contexto institucional.

[3] Nos referimos a la definición propuesta por Weierstrass, que actualmente se formula de la siguiente manera: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si y sólo si para todo real $\varepsilon > 0$, existe un real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

4. RECONOCIMIENTO DE UN PROCESO DE INSTITUCIONALIZACIÓN

La transposición didáctica y el concepto de noósfera (Chevallard, 1991) son de capital importancia para comprender algunos de los procesos inherentes a la conformación del discurso escolar actual entorno al concepto de límite. La ***transposición didáctica*** se refiere al conjunto de transformaciones adaptativas que sufre un saber desde que es designado como saber a enseñar hasta que se convierte en un objeto de enseñanza. Explica el tránsito del saber sabio al saber susceptible de ser enseñado, tránsito que ocurre en lo que el autor denomina ***noósfera***: el entorno del sistema de enseñanza, conformado por los representantes del sistema didáctico (docentes) y los representantes de la sociedad (padres, especialistas de la disciplina, autoridades políticas). Allí se produce todo conflicto entre sistema y entorno y la transposición didáctica encuentra su lugar privilegiado de expresión. En la noosfera se produce la primer etapa de la transposición didáctica: la transición del saber sabio al saber a enseñar; sus miembros son quienes toman las decisiones sobre qué contenidos deben integrar el currículum formal. La segunda etapa se produce a la interna de la tríada saber-profesor-estudiante, es la transición del saber a enseñar al saber enseñado y está influenciada por las características propias del contexto en el que se encuentra dicha tríada.

En la noosfera se entretejen las diferentes prácticas sociales de sus actores; cada grupo, cada comunidad tiene su actuar normado por sus propias prácticas sociales, aquellas que hacen que decidan que un determinado conocimiento se convierta en un saber a enseñar. Por otra parte, también está presente la naturaleza social del propio saber en cuestión y que discutimos en las secciones anteriores: reconocer que el límite es producto del quehacer de grupos humanos específicos cuyo actuar es también normado por sus propias prácticas sociales.

Castañeda (2006) considera que “la formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito, sino que involucra otros factores ajenos a la noosfera para la selección y conformación de un saber a enseñar; entre ellas, están las prácticas socialmente compartidas que se toman en cuenta para adaptar un saber a su versión didáctica” (p. 257)

Estamos frente a un proceso que reconoce la constitución social del saber normada por las prácticas que le dieron origen y las prácticas socialmente compartidas en el seno de los grupos de actores en la noosfera. Finalmente lo anterior podría hacerse evidente en la *etapa de institucionalización* señalada por Brousseau (1997). Es una etapa en la que el profesor brinda un estatuto cultural a las producciones que los estudiantes elaboraron a partir de la situación adidáctica propuesta y tiene por objetivo lograr que el estudiante reconozca el conocimiento que está aprendiendo como un objeto de saber ya establecido en la estructura matemática. Sin embargo, resulta necesario reconocer que el propio profesor está inmerso en todo un proceso que trasciende al profesor y a su trabajo en el aula, y tiene más que ver con cómo llega ese conocimiento a su aula, a través de qué mecanismos y por qué. Lo referente a la matemática escolar y sus diferentes actores, lo analizaremos con más detalle en la siguiente sección.

Resulta viable que al querer dar cuenta de cómo el límite se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente, tenemos que hablar de un *proceso de institucionalización* que considere diferentes momentos y etapas.

5. AL SENO DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Entre los aspectos que se deben considerar para identificar el papel de los diferentes actores en el reconocimiento del límite como un saber institucionalizado, en este escrito abordaremos el discurso matemático escolar uruguayo en voz principalmente de los docentes.

5.1. El discurso matemático escolar en Uruguay

En muchos países predomina la concepción de un cálculo escolar estructurado alrededor de los conceptos de función, límite, derivación e integración. Existiría un supuesto implícito según el cual sin el tratamiento formal en la enseñanza de estos conceptos, en particular del de límite, no se puede enseñar cálculo (Alanís, 1996).

Entendemos al discurso matemático escolar como la manifestación del conocimiento matemático, normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. El discurso modela el desarrollo de la clase y establece prioridades sobre ‘aquello’ que debe estudiarse; el tipo y características de actividades, la forma de evaluar, el tipo de planteamientos y ejercicios (Cordero y Flores, 2007). Involucra a las formas orales, como el diálogo que se puede suscitar en una clase entre profesor y alumnos, pero también involucra formas escritas como los programas o los libros de texto seleccionados para dictar un curso (Castañeda, 2006). Reconocemos a la formulación del discurso como una acción social con una intencionalidad específica de un colectivo dentro de un contexto sociocultural específico, en el sentido de Van Dijk (2000).

Una de las hipótesis de la cual partimos es que el discurso matemático escolar en Uruguay no escapa de lo descripto por Alanís (2000). Se suele favorecer un tratamiento predominantemente algorítmico, sin considerar actividades con abordajes variacionales o predictivos. Tampoco se suelen considerar herramientas y argumentos propios de la génesis y evolución de los conceptos del Cálculo que apunten a considerar su significado dentro del escenario sociocultural específico en el que se están trabajando.

Con el objetivo de sustentar dicha hipótesis se realizó un estudio sobre el discurso matemático escolar actual – en voz de los profesores- del concepto de límite en

Uruguay. Para ello se llevaron a cabo varias actividades tendentes a analizar el quehacer docente respecto a sus clases y los libros de texto que se utilizan como referencia. En primer lugar se confeccionó y aplicó un cuestionario a docentes del curso de Matemática del último año de Educación Secundaria con diversas preguntas sobre el tratamiento didáctico del límite. Dado que se realizó a través de preguntas explícitas y directas, el análisis del cuestionario permitió hacernos una idea de las concepciones de los docentes en torno a la enseñanza del límite. Por otro lado se analizaron libros de texto de antaño, utilizados como referencia en los cursos de Secundaria y Formación Docente anteriores a la década del '90 y dos de los libros de textos más utilizados y recomendados para los estudiantes actualmente.

Se analizaron también los apuntes que un profesor del Instituto de Profesores de Montevideo confeccionara para sus estudiantes, el cual es de suma importancia por su influencia sobre las concepciones y creencias sobre lo que es el Cálculo y su enseñanza, así como sobre las prácticas educativas futuras de los estudiantes de profesorado.

Por otra parte, en Uruguay ha influido fuertemente la oralidad en la perpetuación del discurso escolar, predominando en ocasiones sobre aspectos escritos del mismo. Ello se debe, en parte, al difícil acceso a los libros de texto. Es por eso que, finalmente, también se realizó una entrevista con un profesor con cincuenta años de experiencia en Secundaria, Formación Docente y Universidad, la cual fue de suma importancia para extraer percepciones sobre esta etapa en la institucionalización del concepto.

Con base en lo anterior, se buscó reunir elementos sobre cuál es el papel que los profesores le asignan al límite en la estructuración de su curso; esto es, si consideran que la definición es inamovible, sustituible, imprescindible para la formación del estudiante, innecesaria o cualquier otra alternativa. También se pretendió dar cuenta de en qué medida el límite representa en esas prácticas docentes un rol de "estructurador" del Cálculo: qué tan importante es su tratamiento para la construcción y articulación de otros conceptos, como el de continuidad, derivabilidad o integrabilidad. A su vez, se deseaba indagar acerca de cuánto influyen las exigencias del currículum en las prácticas educativas de los docentes. Explicitar estos elementos, daría cuenta de las prácticas de algunos de los agentes de la noósfera acerca de la manera en que es abordado hoy el concepto en clase, y de sus posibles alternativas. Este podría ser otro aspecto que esté conformando el proceso de institucionalización del concepto de límite

5.2. El cuestionario

El cuestionario implementado figura en el anexo. Constó de diez preguntas y se pidió a los docentes que les respondieran por escrito y las enviaran por correo electrónico, por lo que se les dio el tiempo que cada uno consideró necesario para responderlas. La primera pregunta pretende evidenciar las creencias de los docentes acerca de la pertinencia del tratamiento del tema en Secundaria. Las siguientes cuatro preguntas apuntan a conocer qué definición proponen y cómo: qué tipos de ejemplos y actividades introductorias presentan y la importancia que le otorgan al uso de cuantificadores en la presentación. Las preguntas 6 a 9 pretenden evidenciar sus creencias sobre aspectos cognitivos del proceso de aprendizaje del concepto, y la última tiene como intención averiguar si la práctica de los docentes se ciñe a un libro de texto específico o no.

De los ocho profesores que completaron el cuestionario, siete son egresados del Instituto de Formación Docente y uno es un estudiante avanzado. Excepto uno, todos han continuado su formación en Didáctica de la Matemática con cursos diversos de postgrado e incluso maestrías. Todos tienen varios años de experiencia como profesores del curso de Matemática de último año de Educación Secundaria en Uruguay, y uno trabaja en el Instituto de Formación Docente de Montevideo dictando clases de Análisis.

Todos los profesores coincidieron en que sí es importante la presencia del límite funcional en el programa de último año de Educación Secundaria, lo que se evidenció en las respuestas a la primera pregunta. Las razones expuestas se pueden agrupar en tres grandes grupos: *intramatemáticas* referidas a la necesidad del concepto para construir y formalizar otros como la continuidad, derivabilidad, número real y constituir un contexto adecuado para trabajar diferentes registros de representación (verbal, numérico, tabular, gráfico y analítico); *cognitivas*, según las cuales el tratamiento del límite favorece un determinado nivel de abstracción; y *extramatemáticos*, como herramienta de interpretación y modelización.

La primera razón es la que aparece con más frecuencia: "para formalizar otros conceptos", "para reforzar el concepto de número real", mientras sólo una profesora menciona razones externas a la construcción propia de la matemática: "como herramienta de interpretación y modelización". Otra profesora es la única en mencionar razones consuetudinarias: "De acuerdo a como están estructurados los cursos de 6º y al enfoque esperado de acuerdo a la tradición pienso que el concepto debe ser tratado y debe formar parte del curso"

Todos los profesores manejan la definición en términos de épsilon–delta y muchos de ellos explicitan que trabajan con sus presentaciones equivalentes: con entornos, valor absoluto, distancia, desigualdades:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \forall\, E_{l,\varepsilon} \text{ existe } E^*_{a,r} \text{ tal que}$$
$$\forall\, x \in E^*_{a,r} \text{ entonces } f(x) \in E_{l,\varepsilon}$$

$$\leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in R^+ \text{ existe } r \in R^+ \text{ tal que}$$
$$\text{si } 0 < \left| x - a \right| < r \text{ entonces } \left| f(x) - l \right| < \in$$
$$\leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in R \text{ éxiste } r \in R^+ \text{ tal que}$$
$$\text{si } a - r < x < a + r \text{ y } x \neq a \text{ entonces } l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Tres de ellos mencionan la posibilidad de trabajar con el concepto a nivel intuitivo sin presentar la definición formal en algunas orientaciones. Por ejemplo, una profesora declaró: “En 6° de Medicina el concepto de límite de una función lo trabajo en forma intuitiva y experimental con la utilización de calculadora y tablas, no doy la definición formal de límite.”

Destacan los ejemplos propios de la actividad matemática abstracta: trabajan con funciones, ya sea dadas por su expresión analítica, por su gráfico, por valores en una tabla o en lenguaje coloquial. Sólo dos de los profesores explicitan plantear situaciones externas al contexto matemático abstracto: la velocidad instantánea y el comportamiento de un analgésico odontológico.

Todos coinciden en la introducción del concepto a partir de un caso particular: aquél en el que el límite no es alcanzado. Se aprecia una gran variedad de actividades para significar el concepto (representaciones gráficas, verbales, analíticas, numéricas, tabulares, trabajo con entornos). Entre ellas destaca el análisis del comportamiento de funciones racionales cuyo denominador tiene una o dos raíces. Por ejemplo, una profesora propone la siguiente actividad:

Dada la función $f: R-\{2\} \rightarrow R \;/\; f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, se pide

1. probar que $f(x) = x + 2$, $\forall x \in$ D(f)
2. graficar f
3. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,1/2}$?
4. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,1/10}$?
5. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,\varepsilon}$?

Todos los profesores utilizan cuantificadores al escribir la definición de límite. Sin embargo, sólo tres de ellos proponen actividades específicas para promover su uso. Una de las restantes afirma: “…lo hago cuando lo necesito para expresar en forma de signos algo”. Este punto es importante ya que el uso de la simbología y terminología adecuadas estarían mostrando la importancia otorgada a la *formalización* por parte de los docentes. Incluso mencionan explícitamente que las mayores dificultades para los estudiantes se encuentran “en la formalización de la definición” y “en la visualización de una necesidad para tal formalización”

En cuanto a las implicancias que tiene para el seguimiento del curso la no comprensión de la definición por parte de los estudiantes, los profesores señalan, por un lado, “dificultades para la construcción de conceptos como el de derivada o continuidad”; por otro lado, “dificultades en la demostración de propiedades relativas al concepto”.

La mayoría de los profesores manifiestan evaluar la comprensión del concepto mediante preguntas específicas, por ejemplo:

1. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsa dar un contraejemplo, si es verdadera demostrarla.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \leftrightarrow \forall E^*_{a,r} \text{ , existe } E_{l,\varepsilon} \;/\; si\ x \in E^*_{a,r} \Rightarrow f(x) \in E_{l,\varepsilon}$$

$$\lim_{x\to 6} f(x) = 2 \Rightarrow \text{ existe } E^*_{6,r} \;/\; \forall x \in E^*_{6,r} \text{ es } f(x) > 1$$

2. Sea $f : f(x) = \dfrac{3x-6}{x+a}$, hallar $a \in$ R , sabiendo que:

$$\forall E_{3,\varepsilon} \text{ , existe } E^*_{0,r} \;/\; si\;\; x \in E^*_{0,r} \;\Rightarrow\; f(x) \in E_{3,\varepsilon}$$

3. Probar aplicando definición que: $\lim_{x\to 2} (4x-3) = 5$

Esto evidencia la importancia que estos docentes le otorgan al tratamiento formal del concepto de límite y a su definición.

A pesar de considerar ineludible el tratamiento del concepto de límite y de su definición en términos de épsilon-delta, la mayoría de los docentes que respondieron el cuestionario coincidieron en que podría realizarse un abordaje intuitivo del concepto y la consecuente estructuración del cálculo prescindiendo de una definición formal de límite. Incluso una de las docentes precisa que “la definición es necesaria para la demostración de teoremas y esta demostración es exigida por los programas vigentes” lo cual resulta ser una razón externa a los intereses de docentes y estudiantes. Esto sugiere que cuando se decide qué tema tratar y cómo, las exigencias curriculares y consuetudinarias influyen más en los docentes que lo que ellos mismos piensan que se debería hacer.

Por último, es interesante destacar que tres de los ocho profesores declaran directamente no recomendar ningún libro, mientras uno utiliza apuntes confeccionados por él mismo. Esto podría estar indicando una falta de identificación por parte del profesor de su curso con algún libro de texto y que los libros de texto que se ofrecen en el mercado uruguayo no son adecuados para el enfoque que el profesor desea imprimirle al curso. Pero también existen otros factores que influyen para que la utilización de libros de texto no sea una práctica difundida en los últimos años de Educación Secundaria (Bachillerato Diversificado) en Uruguay, como el difícil acceso a ellos por parte de los estudiantes ya que mientras en los primeros años la institución les brinda un libro a cada uno, en los últimos años este costo corre por cuenta del estudiante. De entre los libros señalados por los docentes, tres son de autores uruguayos y dos de ellos son los que se analizan en el apartado siguiente.

En suma, con respecto a las preguntas que se esperaba que el cuestionario respondiera, se puede comentar, en primer lugar, que todos los profesores otorgan al concepto de límite un rol central en la estructuración del cálculo y de sus cursos en particular. Sólo algunos profesores mencionan que podría omitirse su tratamiento en determinados cursos que están orientados a una formación con poco énfasis en las ciencias. Pero en general, se deduce de las respuestas de los docentes que el límite es entendido como esencial para la construcción por parte de los estudiantes del resto de los conceptos tratados en el curso, como lo son la continuidad y la derivada.

A su vez, todos mencionan la definición en términos de épsilon-delta en alguna de sus presentaciones (distancia, valor absoluto, entorno, desigualdades) y sostienen presentarla con mayor o menor énfasis dependiendo del profesor y de la orientación elegida por los estudiantes que reciben el curso.

Algunos de los profesores sugieren que las exigencias del currículum inciden en el tratamiento del concepto en sus cursos: se ven obligados a presentar su definición formal para su uso en la demostración de teoremas y por la estructura formal que tradicionalmente se le ha otorgado al Cálculo incluso desde los cursos introductorios. En este contexto, la formalización a través de la demostración de propiedades y el respeto a la estructura –formal- del Cálculo surge como práctica que aporta significado a la definición de límite. Sin embargo, otros no cuestionan ello, simplemente lo realizan por convicción personal, porque creen que esa "es *la* manera de hacerlo".

5.3. Análisis de textos

Para analizar los textos y procesar la información extraída, se atendieron los siguientes aspectos:

a) Identificación del texto: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.

b) Objetivos del autor: la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir, el modo declarado en el que se intenta que el alumno aprenda el conocimiento expuesto, la presencia o no de situaciones externas al contexto matemático abstracto en las secuencias de enseñanza, el método de demostración propuesto –si propone- y una caracterización del lenguaje utilizado (formal o coloquial).

c) Acerca de la presentación del límite: la forma en que se define y organiza el concepto de límite a lo largo del texto, la presencia o no de representaciones gráficas o simbólicas y la manera en que son introducidas y utilizadas, la presencia de problemas propuestos para introducir o desarrollar el tema, así como ejercicios de aplicación y planteo o no de su resolución.

Para cada libro se confeccionó una ficha, lo que permitió compararlos cualitativamente. A continuación se presenta un resumen del análisis realizado, enfatizando los aspectos más significativos de cada libro en lo que hace al objetivo de la investigación.

5.3.1. De antaño

Se analizaron dos de los libros de texto que se utilizaban como referencia desde los años '50 o incluso anteriores, sugerido por docentes a quienes se les recomendó siendo estudiantes. Los libros de texto "de antaño" analizados se seleccionaron por ser los citados como libros de referencia para los cursos de Bachillerato o primeros años de formación universitaria por varios docentes que dictan o dictaron clases desde la década de 1970 o anteriormente. En particular fueron dos de los que mencionó el docente a quien se le realizó la entrevista que se describe detalladamente en el apartado 5.4. Los libros analizados son: *Elementos de Análisis Algebraico* (Rey Pastor, 1962, Primera edición: 1917) y *Análisis Matemático* (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1952). Especialmente el segundo es un libro que aún hoy es utilizado por algunos profesores como libro de referencia.

En el primero de los libros citados sólo se trabaja con el concepto de límite de sucesiones, en el marco de la formalización del concepto de número real y con el fin de completar la operatoria sobre ese conjunto. En el segundo sí se trata el concepto de límite de funciones de una variable real, ubicándose como un concepto clave en la estructuración del Cálculo, es utilizado como generador y formalizador de todos los conceptos generalmente tratados en Análisis: continuidad, derivabilidad, integrabilidad.

En ambos textos el autor prioriza los métodos deductivos por sobre los inductivos y la utilización del lenguaje simbólico y formal por sobre el coloquial. Se asume que todas las explicaciones verbales y gráficas que no están en el libro se pueden brindar en forma oral en las clases correspondientes al curso. El autor pretende mostrar una exposición sistemática, lógicamente encadenada. Se evitan intencionalmente detalles considerados superfluos o secundarios, relativos a la historia de la ciencia o disquisiciones metafísicas. "Si por llegar rápidamente a las aplicaciones del Cálculo infinitesimal, resucitamos antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial […] todo deberá descansar en una fe ciega y aceptarse como dogma, sin que sea posible desarrollar y despertar el espíritu crítico" (Rey Pastor et al., 1952, p. XX). Esta cita explica la necesidad que el autor siente de estructurar el Cálculo sobre el concepto de número desde el punto de vista algebraico y el concepto de límite aritmético, con el objetivo de dotar de claridad y precisión a su discurso.

La ausencia de preguntas abiertas que no tienen una respuesta inmediata en el texto, actividades de exploración, problemas o ejercicios resueltos o para que el estudiante resuelva, traduce una idea de una matemática ya hecha, externa al estudiante y autocontenida, ya que tampoco se analizan fenómenos extramatemáticos que evidencien la necesidad del tratamiento de los conceptos involucrados.

5.3.2. Actuales

Los textos actuales analizados fueron *Matemática A para 6º año. Funciones reales* (Giovannini, 2001) e *Introducción al análisis matemático* (Belcredi, Deferrari y Zambra, 2001). En ambos los autores declaran la intencionalidad explícita de que los libros sean un apoyo para estudiantes de 6º año de Secundaria. Afirman que en los mismos se utiliza un "lenguaje simple, evitando el uso de cuantificadores" (Giovannini, 2001, prefacio p.1), priorizando el entendimiento al excesivo formalismo y las introducciones intuitivas. Sin embargo, los tipos de problemas que presentan tanto en la introducción como de aplicación son intramatemáticos y los ejercicios de aplicación requieren de la utilización correcta de los cuantificadores o de "reglas" algebraicas establecidas inmediatamente después de enunciada la definición formal de límite. El espacio dedicado para el tratamiento intuitivo es menor que el dedicado a la algoritmia y práctica rutinarias. El desarrollo es secuencial, con un tránsito de lo intuitivo a lo formal. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Si bien se presentan los conceptos a través de ejemplos y con un lenguaje coloquial, se infiere que el rol del estudiante es el de comprenderlos, memorizarlos y aplicarlos en la resolución de ejercicios, con especial énfasis en la práctica algorítmica en el caso del límite: cálculo de límites funcionales como fin en sí mismo, no como un medio para resolver un problema o graficar una función.

En cuanto a los contenidos, el concepto de límite aparece como estructurador de los demás conceptos del curso: los textos comienzan con un capítulo dedicado a la estructuración y propiedades de los números reales, otro dedicado a la definición y propiedades del concepto de función, y a continuación se desarrolla el concepto de límite, que sirve de cimiento para el resto de los conceptos tratados: continuidad, derivada, integrabilidad, etc. Belcredi et al. (2001) trabajan previamente con sucesiones y límite de sucesiones para dar después paso al concepto de límite en funciones de variable real.

En Giovannini (2001) el capítulo de límite comienza con una serie de ejemplos, a partir de los cuales se introduce la definición de límite. La denomina "introducción intuitiva" (p. 58) a la definición formal verbal:

"Se dice que el límite de f(x) es b para x tendiendo al valor a y lo notaremos $lim_{x \to a} f(x)$ *si para todo entorno de centro b, existe un entorno reducido de centro a, inluido en su dominio, tal que: si x pertenece a ese entorno reducido los correspondientes valores funcionales pertenecen al entorno de centro b".*

Giovannini, 2001, p. 58

A continuación se presentan diversas versiones de la misma definición escrita con lenguaje simbólico, utilizando cuantificadores. Después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo o la necesidad de introducir el concepto en el curso.

5.3.3. Apuntes de Profesor

Hemos comentado que los profesores prefieren elaborar sus propios apuntes. Ello da cuenta por sí mismo de la complejidad de la situación de la enseñanza del Cálculo en Uruguay: ¿Por qué es necesario confeccionar apuntes para un curso dado que existen tantos textos para el mismo? Una de las razones es la falta de disponibilidad de textos en el país, por un lado, pero también la disconformidad del grupo de profesores con los textos existentes. Éstos son producidos por autores que no son necesariamente profesores, para ser utilizados por docentes en prácticas de aula ajenas a los autores. Por su parte, los apuntes escritos por el profesor del curso de Profesorado son especialmente diseñados para su utilización por parte del mismo profesor en sus clases (o de colegas con quienes trabaja en estrecha vinculación).

Tomando en cuenta esta característica del contexto uruguayo, se analizaron los apuntes que un profesor del Instituto de Profesores de Montevideo confeccionó para sus estudiantes (De Olivera, 2008)

Si bien el autor explicita en la *Introducción* que se espera del lector una actitud activa, en definitiva se traduce la misma concepción de Matemática que en los libros analizados previamente: la de una Matemática ya concebida, externa al sujeto que aprende y la de un estudiante cuyo rol se circunscribe a comprender y aplicar. En este caso también se opta por trabajar primero con sucesiones, límite de sucesiones y series numéricas, para introducir después el trabajo en límite de funciones a través de los teoremas de pasaje.

A diferencia de los libros para Secundaria, en estos apuntes los ejercicios propuestos son de tipo no rutinario, lejos de enfatizarse el aspecto algorítmico del concepto, se promueve la reflexión sobre los conceptos relativos al de límite con actividades intramatemáticas. A modo de ejemplo se transcribe el siguiente ejercicio:

13. Considere el siguiente error tipográfico en la definición de límite: $f : X \to R$, $a \in X'$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in X \cap E^*_{a,\varepsilon} \Rightarrow f(x) \in E_{L,\delta}$. *Probar que f cumple esta condición si y sólo si es acotada en cualquier intervalo acotado de centro a. En caso afirmativo, probar que L puede ser cualquier número real.*

De Olivera, 2008, p. 205.

Tampoco en este caso se introduce el concepto ni se presentan aplicaciones en situaciones extramatemáticas.

5.4. La entrevista

Recomendar o trabajar con libros de texto en el aula es una práctica poco frecuente entre docentes de Matemática en Uruguay. Los docentes que respondieron el cuestionario dieron cuenta de ello.

Evidentemente, este hecho hace más difícil el "rastreo" de los procesos de institucionalización del concepto de límite en el sistema educativo uruguayo, por lo que se decidió completar el análisis hecho hasta el momento con una entrevista a un docente con cincuenta años de experiencia con el fin de conocer sus creencias acerca de la construcción de la vida escolar del concepto, más allá de lo que puedan indicarnos documentos oficiales o libros de texto. Este profesor dictó clases en Secundaria, Formación Docente y Universidad durante su carrera, por lo que conoce sobre el funcionamiento y evolución de los tres sistemas. Además varios estudiantes de profesorado han sido practicantes suyos por lo que pudieron haberlo considerado como un ejemplo a seguir por su vasta experiencia[4].

La misma fue realizada por correo electrónico: en una primera instancia, después de describir sucintamente el objetivo de la investigación, se le cuestionó acerca de cuáles fueron los libros de texto que utilizados como

[4] En Uruguay la carrera de Profesorado de Matemática consta de cuatro años. En el segundo y tercer año los estudiantes deben asistir durante todo el año a un curso de Secundaria como "practicantes" para observar las clases que da el profesor titular.

referencia en los cursos de Cálculo a lo largo de su experiencia como docente y en los diferentes ámbitos en los que se ha desempeñado. A partir de la respuesta brindada por el docente, se creyó necesaria una segunda instancia con dos nuevas preguntas: ¿Por qué los profesores del momento insistían tanto con cursos tan "fuertes"[5]que ni siquiera los libros de texto que había en el momento se adecuaban a esos cursos? y ¿en qué se basaban esos apuntes, es decir qué los inspiraba: alguna influencia de la manera de enseñar en algún otro país, por ejemplo, o qué?

Según este profesor, "en la década del '50 (y muy posiblemente también en la del '40) se dictaban regularmente cursos en Facultad de Ingeniería y en Preparatorios para Ingeniería (dependientes de Secundaria) en los cuales se usaba sistemáticamente la definición épsilon-delta para límites". Menciona más adelante que incluso desde fines de la década del '30 los cursos eran más "fuertes" que ahora: "allí no se daba límite de sucesiones ni funciones reales, sino funciones de varias variables, funciones de variable compleja y ecuaciones diferenciales; el cálculo diferencial de una variable se dejaba para Preparatorios (actualmente Bachillerato preuniversitario)".

Dado que en ese momento muchos de los profesores del denominado Preparatorios, actual Bachillerato, eran también profesores de universidad, o habían sido formados en ella, tendían a dar cursos que precisamente prepararan para esos cursos de Universidad. Influyen aquí otros factores: la cantidad de alumnos –extremadamente reducida con respecto a la actual- y el objetivo que se perseguía con los cursos de Bachillerato –fines propedéuticos para determinadas carreras universitarias y no objetivos de formación general del ciudadano, perseguidos actualmente-. Así, el cuerpo de docentes requerido para dictar Matemática en cursos de Preparatorio o Universidad de la carrera de Ingeniería era reducido y homogéneo, existían acuerdos implícitos más fácilmente llevables a la práctica. Y uno de ellos era el de "demostrar todo", lo que da cuenta del gran énfasis que se ponía sobre la estructuración rigurosa de la Matemática en general y en particular del Cálculo. Esto fue transmitido a alumnos –futuros docentes- como una gran virtud del sistema escolar uruguayo.

Según este profesor: "la baja matrícula y lo homogéneo de los cuerpos docentes permitió un logro que no podrá volver a ocurrir, a saber: aprovechar la edad de los 16 y 17 años, cuando el estudiante es ya capaz de *abstraer* y de *comprender una teoría formal*, para obtener de él, en un momento de su vida en que su capacidad de aprendizaje está en un máximo, una importantísima formación e información. Cuando la matrícula estudiantil creció y se empezaron a dictar cursos de 5º y 6º [de Educación Secundaria, los correspondientes a Bachillerato] en todos los liceos del país sin disponer de docentes adecuados, toda la situación anterior decayó y ahora estamos en el pantano que todos conocemos".

Con respecto a los libros de texto, las dificultades para el acceso a ellos provocó que las herramientas que tenían para estudiar los alumnos eran básicamente los "apuntes teóricos" de clase y "juegos de apuntes a mimeógrafo de algunos de los principales profesores del IAVA[6]" Además, según escribe el propio profesor, nadie recurría a los libros de texto porque "eran bastante diferentes al desarrollo de los cursos".

"La principal herramienta de estudio para el [curso] teórico eran los apuntes individuales que sacábamos cada uno de nosotros. Los apuntes de ciertos docentes se recomendaban como complemento de lo dado en clase. Algunos de esos apuntes ni siquiera fueron confeccionados por el docente en cuestión. Por ejemplo existían unos 'Apuntes del Prof. Forteza' que fueron confeccionados por un grupo de estudiantes que sacó apuntes del curso de Forteza, luego los pasó en limpio y Forteza le hizo una revisación final, y así se imprimieron."

"[…] los mismos no fueron redactados con una intención especialmente didáctica sino como resumen de los temas dictados. Creo que lo mismo se puede decir de los denominados 'Apuntes del Prof. Ciganda' (creo que de calidad inferior a los anteriores). Existían también los 'Apuntes de Vales'. Estos son anteriores a los demás (probablemente de los comienzos de los 50') y fueron redactados por el propio Vales (no con intención didáctica sino para incorporar temas que no se encontraban fácilmente en los libros)."

Estos extractos de la entrevista dan cuenta de la importancia de la tradición oral-escrita en las prácticas de aula propiamente dicha y transmitida de docentes a profesores sucesivamente para los procesos de institucionalización del Cálculo en general y particularmente del concepto de límite en el sistema educativo uruguayo. Dado que estos apuntes no eran necesariamente escritos por los docentes, sino que en su mayoría eran escritos por los estudiantes que asistían a sus clases, este tipo de documentos involucra esos dos aspectos: lo que expresa *oralmente* (o eventualmente escribe en el pizarrón) el docente y lo que el estudiante rescata en sus apuntes *escritos*).

Sin embargo, sí existían en el país algunos –pocos- ejemplares que fueron construyendo las bases para esos cursos en el IAVA o en Universidad en función de los cuales fueron estructurándose los demás cursos. El profesor menciona: *Elementos de Análisis Algebraico* (Rey Pastor, 1962, Primera edición: 1917), *Elementos de la teoría de Funciones* (Rey Pastor, 1967, Primera edición: 1918), *Análisis Matemático* (Rey Pastor et al.,1952), *Lecciones de Análisis Matemático (*Hardy, 1962, Primera edición: 1908*)*. Y más adelante, libros que tuvieron influencia sobre el sistema educativo uruguayo desde la década de los '70: *Calculus* (Apostol, 1967), *Fundamentos de Análisis Moderno*

[5] Con el término "fuerte" el profesor se refiere a la formalidad y rigurosidad en los cursos y al nivel de profundización en los contenidos tratados.

[6]Primer Instituto de Educación Secundaria del país que albergaba en el momento a la mayoría de estudiantes que cursaban Ingeniería.

(Dieudonné, 1966) y *Principios de Análisis Matemático* (Linés, 1991), así como traducciones de libros rusos, americanos, etc. Resaltó entre ellos a dos de los de Rey Pastor por su difundida utilización en la preparación de cursos y como referencia de los estudiantes. Ello condujo a la decisión de analizarlos en el apartado correspondiente (5.3.1, Análisis de textos de antaño).

CONCLUSIONES

En el desarrollo del presente trabajo se han presentado elementos para comenzar a describir los procesos de institucionalización del límite. Para ello tomamos dos aspectos: el desarrollo al seno de la comunidad matemática (grupos científicos) y la situación actual en el ámbito escolar.

Con respecto al primero de los aspectos, el análisis socio-histórico dio cuenta de las etapas que transcurrió el concepto de límite desde sus inicios hasta lo que se conoce actualmente. Pero más allá de las etapas, importa cómo y por qué se dio la transición entre ellas: las prácticas asociadas al concepto y a su rol en la estructuración del Cálculo en general en cada momento histórico dan respuesta a esas preguntas. Básicamente, la búsqueda de una *fundamentación* rigurosa de los conceptos que permitían resolver problemas de Cálculo Diferencial e Integral, su *difusión* a un público creciente, la *generalización* de dichos conceptos a nuevas funciones y la *extensión* de los mismos a nuevos contextos de aplicación jugaron un rol decisivo en la transición mencionada.

Con respecto a la manera en que el tratamiento escolar del concepto de límite se introduce dentro del Cálculo Escolar Uruguayo, el cuestionario realizado a docentes permitió percatarse de cuán arraigada está la idea de que es este concepto el que permite estructurar toda la teoría, y construir conceptos como el de continuidad o derivabilidad. Los profesores coinciden en que es un contenido necesario en todo curso de Cálculo, algunos por convicción personal y otros entienden que debe ser así porque así lo exige el programa curricular o la tradición.

La entrevista realizada y el análisis de los libros de texto utilizados desde la década del '50 (mencionados por el profesor entrevistado) permiten explicar en parte esa rigurosidad y formalización que existe aún hoy en las prácticas educativas relativas al concepto de límite y del Cálculo en general en Uruguay. Los cursos impartidos en la primera mitad del siglo XX marcaron una gran influencia sobre dichas prácticas actuales, dada la importancia otorgada a la referencia a "apuntes de clase" más que a libros de texto, y dadas también las características de los libros de texto utilizados. Esos apuntes de clase perpetuaron una tradición oral transmitida entre las diferentes generaciones de estudiantes y docentes.

Por último, los libros de texto utilizados actualmente constatan esa perpetuación pues si bien con una presentación visual totalmente diferente, aún mantienen características similares: comparten la concepción de la Matemática como una ciencia ya escrita y ajena a quien la aprende, así como el rol pasivo otorgado al estudiante en la construcción de conocimiento.

El análisis del desarrollo socio-histórico arroja herramientas para pensar que la definición formal del concepto de límite surge por una necesidad interna de la estructura de la matemática, que es la de formalizar para, entre otras cosas, generalizar –a nuevas funciones y a nuevos contextos- y estructurar otros conocimientos preexistentes pero con otra forma: a partir de la definición de límite se reformulan el concepto y la definición de derivada, integral, continuidad, entre otros. A partir del análisis del discurso matemático escolar actual puede pensarse que el hecho de que sea enseñado en el aula de la manera en que se hace en la mayoría de los cursos de Cálculo en Uruguay, responde a esa necesidad de la comunidad matemática, y no a una decisión didáctica de la comunidad de profesores y mucho menos a una necesidad de los estudiantes.

Esos vínculos que entretejen la compleja relación entre la comunidad matemática y la matemática escolar son los que evidencian que para comprender cómo y por qué el concepto de límite es tratado actualmente de la forma en que se hace, es necesario reconocer que esa evolución está inmersa en un conjunto de procesos de institucionalización. En este escrito se ha llevado a cabo la identificación de dichos procesos a través del análisis de las prácticas sociales presentes en la constitución del saber como un saber institucionalizado, tanto en el ámbito académico como en su tratamiento escolar.

Se espera que este trabajo promueva una reflexión colectiva acerca de por qué cada docente prepara y lleva a la práctica los cursos de la manera en que lo hace y ello permita la búsqueda de propuestas alternativas y el compromiso con ellos. No solamente en la forma en que se enseña el concepto de límite sino especialmente en el rol que este contenido juega en la estructuración de los cursos de Cálculo: su relación y aplicación para la construcción de otros conceptos como el de derivada o integral.

REFERENCIAS

Aizpuru, A. y Pérez-Fernández, F. (1999). El Cours d'Analyse de Cauchy. *Suma,* 30, 5-25.

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Alanís, J. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de cálculo. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 233-246). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apostol, T. (1967). *Calculus*. Massachusetts: Blaisdell Publishing Company.

Bagni, G. (2005). Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 5(4), 453-468.

Belcredi, L.; Deferrari, M. y Zambra, M. (2001). *Introducción al análisis matemático*. Montevideo, Uruguay: Ediciones de la Plaza.

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones*. Tesis de Licenciatura en Matemática no publicada, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Bills, L. y Tall, D. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: the case of the Least Upper Bound. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 22(*2), 104 – 111. Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), 189-209.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 37(5), 515–526.

Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield Eds. y Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Bucari, N., Bertero, F. y Trípoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo. Recuperado el 5 de abril de 2009 de http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/bucari.pdf.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon,* 42 (3), 854-856

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. Martínez-Sierra, G. (2006) Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Número especial*, 83-102.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), 253-265.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie royale.

Chevallard*,* Y. (1991). *La transposición didáctica: del* saber sabio *al* saber *enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica. En Cantoral et al. (ed.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10* (1), pp. 7-38.

Cornu, B. (1986). Les principaux obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM – APMEP,* 352*,* 55- 63.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura may*a. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investivación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

De Olivera, F. (2008). *Análisis en una variable real. Nivel terciario*. Apuntes confeccionados para estudiantes del curso de Análisis I de la carrera de Profesorado de Matemática. Montevideo, material no publicado.

Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno*. Barcelona-Buenos Aires: Reverté.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Matemátical Thinking. En Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000) A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. *Research reports in mathematics education,* 1, Umea University, 1-18.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2009). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 11(3), 309-354.

García-Torres, E. y Cantoral, R. (2007). Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. En G. Buendía y G. Montiel (eds.) *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 483 – 494). Mérida, Yucatán: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Giovannini, E. (2001). *Matemática A para 6º año. Funciones reales*. Montevideo, Uruguay: Editorial Tradinco.

Hardy, G. H. (1962). *Curso de Análisis Matemático.* Buenos Aires: Librería y Nigar.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), *Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual* (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical thinking and learning,* 8(4), pp. 407 – 431.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I y II.* Madrid: Alianza Universidad.

Linés, E. (1991). *Principios de Análisis Matemático.* Barcelona: Reverté.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8 (2), 195-218.

Rey Pastor, J. (1962) *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Herederos de Julio Rey Pastor (Ed.).

Rey Pastor, J. (1967). *Elementos de la teoría de funciones.* Madrid: Nuevas gráficas.

Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P. Trejo, C. A. (1952). *Análisis matemático*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Sánchez, C. y Contreras, A. (2000) Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX . En Cantoral, R. (ed) *El futuro del cálculo infinitesimal (*pp 211-231*)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Tall, D. (1980). Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 170 – 176. Berkeley.

Tall, D. (1991). The psycology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching andLearning.* New York: Macmillan, pp. 495–511.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151–169.

Van Dijk, T. (Ed.) (2000). *El discurso como interacción social. Estudios sobre el discurso II. Una introducción multidisciplinaria.* Barcelona-Buenos Aires: Gedisa.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65 - 81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Youschkevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Arch. Hist. Exact. Sci. 16, 37-85. Traducción tomada de Farfan, R. (Ed.) (1997) Serie: Antologías, 1, 81-98. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

ANEXO

Cuestionario a profesores de Matemática de 6º año de Educación Secundaria:

Las siguientes preguntas se refieren al tratamiento del concepto de límite finito de una función en un punto. Agradezco que las responda remitiéndose lo más estrictamente posible a su práctica educativa cotidiana, ya que el objetivo del cuestionario es conocer más acerca de las prácticas educativas entorno al concepto de límite en su primera aproximación, en el ámbito de la Educación Secundaria en Uruguay.

1. ¿Cree que es importante que esté este contenido en el programa de 6º? ¿Por qué?
2. ¿Qué definición presenta? ¿Es la única? ¿Trabaja con alguna equivalente?
3. ¿Presenta algún ejemplo? ¿En qué contextos: tabular, gráfico, situación extramatemática, analítico-algebraico?
4. ¿Propone alguna actividad en torno al concepto de límite previo a introducir la definición?
5. ¿Realiza alguna actividad para promover el uso de cuantificadores o símbolos lógicos en general?

Las preguntas 6 a 9 se refieren a la definición que propuso en la respuesta a la pregunta 2:

6. ¿Qué dificultades detecta en los estudiantes al trabajar con esta definición?
7. ¿Qué obstáculos debe afrontar un estudiante que no comprende la definición de límite? ¿En qué "fallaría" o qué otro concepto le imposibilitaría construir?
8. ¿Cuál es el tipo de pregunta que realiza habitualmente en evaluaciones orales o escritas que el estudiante no responde o lo hace erróneamente por no manejar la definición de límite?
9. ¿Con qué problemática cree que se encontraría en el transcurso del curso si en lugar de la definición utilizara un acercamiento intuitivo al concepto?
10. ¿Qué libro de texto recomienda? ¿Lo utiliza en clase para trabajar este tema o para proponer ejercicios referidos al mismo?

Muchas gracias por su colaboración.

Verónica Molfino Vigo

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México. Julio de 2006.

Doctorado en Matemática Educativa en Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México. Cuarto semestre aprobado. Examen predoctoral aprobado en julio de 2009.

Profesorado de Matemática egresada del Instituto de Profesores "Artigas", Montevideo. Diciembre de 2000.

Licenciatura de Matemática en la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, Montevideo. 2º año aprobado.

Actualmente se desempeña como docente e investigadora en Institutos de Formación Docente e Institutos de Educación Secundaria en Uruguay.