Matemáticas y Estadística

Una aplicación de las bases SAGBI - Igualdad de Subálgebras (caso cuerpo)

An application of the bases SAGBI-Equality of Subalgebras (case body)

Lezama, O.[I]; Marín, V.[II]

Resumen. De esta nota se muestra una aplicación de las bases SAGBI (Análogo de las bases de Gröbner de Ideales para Subálgebras), la cual consiste en determinar si dos subálgebras del álgebra de polinomios con coeficientes en un cuerpo son iguales. Se enuncian y demuestran algunas propiedades de las formas residuales, y se ilustran los resultados con numerosos ejemplos.

Palabras y frases clave: Álgebras, subálgebras, forma residual, bases SAGBI, bases de Gröbner.

Abstract. We show an application of the SAGBI bases (Subalgebra Analogues of Gröbner Bases for Ideals), in order to determine whether two subalgebras of the algebra of polynomials with coefficients in a field are equal. In addition we show some properties of residual forms, and illustrate the results with many examples.

Key words and phrases: Algebras, subalgebras, residual form, SAGBI bases, Gröbner bases.

Clasificación de materias (AMS): 53A35,58A05,53A35.

1. INTRODUCCIÓN

Las bases SAGBI (análogo de las bases de Gröbner de ideales para subálgebras) fueron introducidas por Robbiano y Sweedler (1988, véase [7]), e independientemente por Kapur y Madlener (1989, véase [3]), en el caso clásico en que los coeficientes del álgebra de polinomios se consideran en un cuerpo k. Dicho concepto es una adaptación del de base de Gröbner para ideales del anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo, pero para subálgebras. Si A es una subálgebra del álgebra de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ y si F es un subconjunto no vacío de A, se dice que F es una base SAGBI para A si $Lt(F)$ genera el monoide multiplicativo $Lt(A)$, es decir, $k[Lt(S)] = k[Lt(G)]$, donde $Lt(F) = \{lt(f) : f \in F\}$ y $lt(f)$ es el producto de potencias principal del polinomio f. El desarrollo de las bases SAGBI es similar al de

[I]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. jolezamas@unal.edu.co

[II]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. marinchapu@hotmail.com

las bases de Gröbner, se estudian las definiciones de reducción, la caracterización de dichas bases, se presenta el algoritmo que las calcula y se exhiben algunas aplicaciones. En esta nota mostraremos una aplicación de las bases SAGBI caso cuerpo, la cual consiste en determinar si dos subálgebras son iguales.

2. PRELIMINARES

2.1. Orden de términos

Nuestro contexto es el álgebra de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ con k cuerpo. En esta parte se dan los conceptos básicos de bases de Gröbner como orden de términos ($Deglex$, $Degrevlex$), $lt(f)$, $lm(f)$, $lc(f)$, entre otros. Seguimos de cerca la exposición que hacen Adams y Loustaunau en [1].

Definición 2.1. *Sea* $n \geq 1$.

(i) *Un término o producto de potencias de* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *es un polinomio de la forma* $f = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *y* $\mathbb{N}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$. *El conjunto de todos los términos de* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *es denotado por* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$.

(ii) *Un polinomio* $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *se denota por* $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha t_\alpha$, *donde sólo un número finito de coeficientes* c_α *es diferente de cero. El conjunto* $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid c_\alpha \neq 0\}$ *es llamado el soporte de* f *y es denotado por* $Supp(f)$. *El conjunto de los términos de* f *se define por* $Ter(f) = \{t_\alpha \mid \alpha \in Supp(f)\}$.

(iii) *Para un término* $t = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$, *el número natural* $Deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *es llamado el grado de* t.

(iv) *Si* $f \neq 0$, *el natural* $\max\{\deg(t_\alpha) \mid \alpha \in Supp(f)\}$ *es llamado el grado de* f *y es denotado por* $Deg(f)$.

En lo que sigue un término $t = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ con $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se denotará $X^{\overrightarrow{\alpha}}$, con $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y S será una k-subálgebra finitamente generada de $k[x_1, \ldots, x_n]$, es decir, $S = k[f_1, \ldots, f_s]$ para algunos polinomios $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definición 2.2. *Un orden de términos sobre* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ *es un orden total* $<$ *sobre* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) $1 < X^{\overrightarrow{\beta}}$ *para todo* $X^{\overrightarrow{\beta}} \in \mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$, $X^{\overrightarrow{\beta}} \neq 1$.

(ii) *Si* $X^{\overrightarrow{\alpha}} < X^{\overrightarrow{\beta}}$, *entonces* $X^{\overrightarrow{\alpha}} X^{\overrightarrow{\gamma}} < X^{\overrightarrow{\beta}} X^{\overrightarrow{\gamma}}$, *para todo* $X^{\overrightarrow{\gamma}} \in \mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 2.1. *El orden lexicográfico (lex) sobre* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ *con* $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ *definido de la siguiente manera es un orden de términos. Para*

$$\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$$

se define

$$X^{\overrightarrow{\alpha}} < X^{\overrightarrow{\beta}} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{la primera coordenada } \alpha_i \textit{ y } \beta_i \textit{ en } \overrightarrow{\alpha} \textit{ y } \overrightarrow{\beta} \textit{ desde la} \\ \textit{izquierda, tales que } \alpha_i \neq \beta_i, \textit{ satisfacen } \alpha_i < \beta_i. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. *El orden lexicográfico con grado denotado Deglex sobre* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ *con* $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ *definido de la siguiente manera es un orden de términos. Para*

$$\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$$

se define

$$X^{\overrightarrow{\alpha}} < X^{\overrightarrow{\beta}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \\ \textit{ó} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \textit{ y } X^{\overrightarrow{\alpha}} < X^{\overrightarrow{\beta}} \\ \textit{con respecto al orden lex con } x_1 > x_2 > \cdots > x_n. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3. *El orden lexicográfico reverso con grado (Degrevlex) sobre* $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ *con* $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ *definido de la siguiente manera es un orden de términos. Para*

$$\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$$

se define

$$X^{\overrightarrow{\alpha}} < X^{\overrightarrow{\beta}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \\ \textit{ó} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \textit{ y la primera coordenada } \alpha_i \textit{ y} \\ \beta_i \textit{ en } \overrightarrow{\alpha} \textit{ y } \overrightarrow{\beta} \textit{ desde la derecha, las cuales son dife-} \\ \textit{rentes satisfacen } \alpha_i > \beta_i. \end{cases}$$

Definición 2.3. *Dados un orden de términos sobre* $k[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \neq f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *y* $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, *se define:*

(i) $lt(f) =$ *el término principal de* f.
(ii) $lc(f) =$ *el coeficiente principal de* f.
(iii) $lm(f) = lc(f)lt(f) =$ *el monomio principal de* f.
(iv) $Lm(S) = \{lm(s) \mid s \in S\}$.

Nota 2.1. $Lc(S)$ *y* $Lt(S)$ *se definen en forma similar, además,* $lm(0) = lc(0) = lt(0) = 0$.

2.2. Nociones básicas de bases SAGBI

En esta parte damos algunas definiciones básicas como lo son las de reducción y bases SAGBI. Además, se presenta un teorema que caracteriza las bases SAGBI. Lo que sigue es tomado de [5].

Definición 2.4. *Sean* $G \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \backslash \{0\}$ *y* $f_1, f_2 \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

(i) *Se dice que* f_1 *se reduce a* f_2 *en un paso por medio de* G, *y se nota* $f_1 \xrightarrow{G} f_2$, *si existen* $c \in k$, $g_1, \ldots, g_s \in G$ *y* $t \in k[y_1, \ldots, y_s]$ *un término, tales que*
$$f_2 = f_1 - ct(g_1, \ldots, g_s),$$
con $t(lt(g_1), \ldots, lt(g_s)) \notin Ter(f_2)$.

(ii) *Se dice que* f_1 *se reduce a* f_2 *en más de un paso por medio de* G, *denotado*
$$f_1 \xrightarrow{G}_+ f_2,$$
si existe una sucesión de polinomios $h_1, \ldots, h_t \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *tales que*
$$f_1 \xrightarrow{G} h_1 \xrightarrow{G} h_2 \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} h_{t-1} \xrightarrow{G} f_2.$$

(iii) f_1 *es reducido si no existe* $f_2 \neq f_1$ *tal que* $f_1 \xrightarrow{G} f_2$.

Definición 2.5. *Sea* S *una subálgebra de* $k[x_1, \ldots, x_n]$, *un subconjunto no vacío* G *de* S *de polinomios no nulos es llamado una base SAGBI de* S *con respecto a un orden de términos, si* $k[Lt(S)] = k[Lt(G)]$.

La caracterización de las bases de Gröbner es fundamental para presentar un algoritmo que las calcule, y $aposteriori$ permite mostrar algunas aplicaciones elementales. Para el caso de bases SAGBI esta caracterización se utilizará para mostrar una aplicación. Dicha caracterización se presenta en [5] de la siguiente forma.

Teorema 2.1. *Sean* $G \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \backslash \{0\}$ *y* $S = k[G]$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(A-1) *Para cada* $f \in S \backslash \{0\}$, *existen* $g_1, \ldots, g_s \in G$ *y* $h \in k[y_1, \ldots, y_s]$ *con* $f = h(g_1, \ldots, g_s)$ *y* $Deg(lt(f)) \geq Deg(lt(t(g_1, \ldots, g_s)))$ *para todo* $t \in Ter(h)$.

(A-2) *Para cada* $f \in S \backslash \{0\}$, *existen* $g_1, \ldots, g_s \in G$ *y* $h \in k[y_1, \ldots, y_s]$ *con* $f = h(g_1, \ldots, g_s)$ *y* $Deg(lt(f)) = \max\{Deg(lt(t(g_1, \ldots, g_s))) \mid t \in Ter(h)\}$.

(B-1) *El conjunto* G *es una base SAGBI de* S, *es decir,* $k[Lt(S)] = k[Lt(G)]$.

(B-2) *El monoide* $\{lt(f) \mid f \in S \backslash \{0\}\}$ *es generado por* $\{lt(g) \mid g \in G\}$.

(C-1) *Para un elemento* $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f \xrightarrow{G}_+ 0$ *si y sólo si* $f \in S$.

(C-2) *Si* f *es reducido, entonces* $f = 0$.

(C-3) *Para cada elemento* $f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *existe un único elemento* $f_2 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *para el cual* $f_1 \xrightarrow{G}_+ f_2$ *y* f_2 *reducido.*

(D-1) *Para cada conjunto finito de polinomios* $g_1, \ldots, g_s$ *de* G, *se tiene que cada elemento homogéneo de* $I(lm(g_1), \ldots, lm(g_s))$ *con respecto al grado inducido tiene un levantamiento en* $I(g_1, \ldots, g_s)$.

(D-2) *Para cada conjunto finito de polinomios* $g_1, \ldots, g_s$ *de* G*, existe un sistema de generadores de* $I(lm(g_1), \ldots, lm(g_s))$ *conformado por elementos que son homogéneos con respecto al grado inducido y tienen un l evantamiento en* $I(g_1, \ldots, g_s)$*.*

(D-3) *Para cada conjunto finito de polinomios* $g_1, \ldots, g_s$ *de* G*, existe un sistema finito de generadores de* $I(lm(g_1), \ldots, lm(g_s))$ *que consta de elementos que son homogéneos con respecto al grado inducido y tienen un levantamiento en* $I(g_1, \ldots, g_s)$*.*

3. IGUALDAD DE SUBÁLGEBRAS

En esta sección presentamos una aplicación de las bases SAGBI sobre cuerpos, la cual consiste en determinar si dos subálgebras del álgebra de poliniomios son iguales. En [5], Robbiano y Kreuzer plantean una variación de formas normales y bases de Gröbner reducidas (véase [4]) en el contexto SAGBI.

Definición 3.1. *Sea* S *una k-álgebra. Se dice que* S *es una subálgebra monomial de* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *si existe un conjunto de generadores de álgebra que consta de términos.*

Proposición 3.1. *Sea* $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ *una subálgebra monomial, y sea G un conjunto de términos que generan la* k*-álgebra* S*. Entonces,*

(i) *Cada término en el soporte de un polinomio en* S *es un producto de potencias de términos en* G*.*

(ii) *Entre todos los conjuntos de términos que generan la k-álgebra S, existe un único elemento minimal con respecto a la inclusión. Éste se denomina el sistema monomial minimal de generadores del álgebra* S*.*

Corolario 3.1. *Sea* S *una* k*-subálgebra de* $k[x_1, \ldots, x_n]$*. Entonces, existe una base SAGBI finita de* S *si, y sólo si, el sistema monomial minimal de generadores de álgebra es finito.*

Proposición 3.2. *Para cada* $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *existe un único polinomio* $f_G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *con la propiedad que* $f - f_G \in S$ *y* $Ter(f_G) \cap k[Lt(G)] = \emptyset$*.*

Prueba. La parte (C-3) del Teorema 2.1 garantiza la existencia de un único elemento $f_G \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f \longrightarrow_+ f_G$, es decir, existen $g_1, \ldots, g_s \in G$, $t_1, \ldots, t_r \in k[y_1, \ldots, y_s]$ y $c_1, \ldots, c_r \in k$ tales que

$$f_G = f - \sum_{i=1}^{r} c_i t_i(g_1, \ldots, g_s),$$

es decir, $f - f_G = \sum_{i=1}^{r} c_i t_i(g_1, \ldots, g_s) \in S$ y además $t_i(lt(g_1), \ldots, lt(g_s)) \notin Ter(f_G)$, para $i = 1, \ldots, r$; esto quiere decir que el conjunto de términos de f_G no tiene elementos en común con $k[Lt(G)]$. La unicidad se sigue del hecho de que para dos elementos f_G y f_H, el conjunto de términos de $f_G - f_H \in S$ no tiene elementos en común con $k[Lt(G)]$, y esto por la condición (C-2) del Teorema 2.1 solo es posible si $f_G - f_H = 0$. $\square$

Definición 3.2. *Sea* $S = k[G]$*,* $G = \{g_1, \dots g_s\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \backslash \{0\}$ *un conjunto de polinomios mónicos. El elemento* f_G *de la proposición anterior se denomina la forma residual del polinomio* f *respecto a* S*. Este es denotado por* $RF_S(f)$*.*

Proposición 3.3. *Sean* $f, f_1, f_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$*. Entonces,*

(i) $RF_S(RF_S(f)) = RF_S(f)$
(ii) $RF_S(f_1 - f_2) = RF_S(f_1) - RF_S(f_2)$
(iii) $RF_S(f_1 f_2) = RF_S(RF_S(f_1) RF_S(f_2))$

Prueba. (i) Nótese que $RF_S(f) - RF_S(f) = 0 \in S$ y $RF_S(f)$ es reducido, y por la unicidad de la forma residual se debe tener que $RF_S(RF_S(f)) = RF_S(f)$.

(ii) Nótese que $f_1 - f_2 - (RF_S(f_1) - RF_S(f_2)) = (f_1 - RF_S(f_1)) - (f_2 - RF_S(f_2)) \in S$ y $RF_S(f_1) - RF_S(f_2)$ es reducido, puesto que $RF_S(f_1)$ y $RF_S(f_2)$ son reducidos, y por la unicidad de la forma residual se debe tener que $RF_S(f_1 - f_2) = RF_S(f_1) - RF_S(f_2)$.

(iii) $RF_S(f_1 f_2) = RF_S(RF_S(f_1 f_2))$ por parte i). Ahora,

$$RF_S(f_1 f_2) - RF_S(RF_S(f_1) RF_S(f_2)) = \\ RF_S(f_1 f_2 - RF_S(f_1) RF_S(f_2)) = 0,$$

además $f_1 f_2 - RF_S(f_1) RF_S(f_2) \in S$, en efecto, por hipótesis se tiene que

$$f_1 \xrightarrow{G} RF_S(f_1) \quad \text{y} \quad f_2 \xrightarrow{G} RF_S(f_2),$$

es decir,

$$RF_S(f_1) = f_1 - \sum_\delta t_\delta \quad \text{y} \quad RF_S(f_2) = f_2 - \sum_\epsilon t_\epsilon,$$

de donde,

$$(\sum_\delta t_\delta)(\sum_\epsilon t_\epsilon) = f_1 f_2 - f_2 RF_S(f_1) - f_1 RF_S(f_2) \\ + RF_S(f_1) RF_S(f_2). \tag{3.1}$$

Ahora, se tiene que

$$f_1 f_2 \xrightarrow{G} f_2 RF_S(f_1) \quad \text{y} \quad f_1 f_2 \xrightarrow{G} f_1 RF_S(f_2),$$

es decir,

$$f_2 RF_S(f_1) = f_1 f_2 - \sum_\alpha t_\alpha \quad \text{y} \quad f_1 RF_S(f_2) = f_1 f_2 - \sum_\beta t_\beta,$$

y reemplazando estas identidades en la ecuación (3.1) obtenemos

$$(\sum_\delta t_\delta)(\sum_\epsilon t_\epsilon) = f_1 f_2 - f_1 f_2 + \sum_\alpha t_\alpha - f_1 f_2 + \sum_\beta t_\beta + RF_S(f_1) RF_S(f_2),$$

luego

$$\sum_{\alpha} t_\alpha + \sum_{\beta} t_\beta - (\sum_{\delta} t_\delta)(\sum_{\epsilon} t_\epsilon) = f_1 f_2 - RF_S(f_1)RF_S(f_2)$$

$\square$

Ejemplo 3.1. *Vamos a calcular la forma residual de los siguientes polinomios con el orden* $Deglex$. *Éstos son,*

1) $f = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$ *y* $G = \{g_1 = x_1^2 - 1, g_2 = x_2^2 - 1\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$,
2) $f = x_1^3 + x_1^2 x_2$ *y* $G = \{g_1 = x_1 + x_2, g_2 = x_1 x_2\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$.

Consideremos el caso 1), para encontrar la forma residual procedemos a realizar reducción sobre el polinomio f *por medio de* G *hasta que no se pueda reducir más.*

$$f \xrightarrow{G} f_1$$

$t_1(y_1, y_2) = y_1^2 y_2$, *así* $t_1(g_1, g_2) = x_1^4 x_2^2 - x_1^4 - 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 + x_2^2 - 1$ *y* $c_1 = 1$.

$$f_1 = f - c_1 t_1(g_1, g_2)$$
$$f_1 = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - x_1^4 x_2^2 + x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 + 1$$
$$f_1 = x_1^2 x_2^4 + x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 + 1$$

$$f_1 \xrightarrow{G} f_2$$

$t_2(y_1, y_2) = y_1 y_2^2$, *así* $t_2(g_1, g_2) = x_1^2 x_2^4 - 2x_1^2 x_2^2 - x_2^4 + x_1^2 + 2x_2^2 - 1$ *y* $c_2 = 1$.

$$f_2 = f_1 - c_2 t_2(g_1, g_2)$$
$$f_2 = x_1^2 x_2^4 + x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 + 1 - x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - x_1^2 - {}$$
$$- 2x_2^2 + 1$$
$$f_2 = x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 2$$

$$f_2 \xrightarrow{G} f_3$$

$t_3(y_1, y_2) = y_1^2$, *así* $t_3(g_1, g_2) = x_1^4 - 2x_1^2 + 1$ *y* $c_3 = 1$.

$$f_3 = f_2 - c_3 t_3(g_1, g_2)$$
$$f_3 = x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - x_1^4 + 2x_1^2 - 1$$
$$f_3 = 4x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - x_1^2 - 3x_2^2 + 1$$

$$f_3 \xrightarrow{G} f_4$$

$t_4(y_1, y_2) = y_1 y_2$, *así* $t_4(g_1, g_2) = x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 + 1$ *y* $c_4 = 4$.

$$f_4 = f_3 - c_4 t_4(g_1, g_2)$$
$$f_4 = 4x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - x_1^2 - 3x_2^2 + 1 - 4x_1^2 x_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4$$
$$f_4 = x_2^4 + 3x_1^2 + x_2^2 - 3$$

$$f_4 \xrightarrow{G} f_5$$

$t_5(y_1, y_2) = y_2^2$, *así* $t_5(g_1, g_2) = x_2^4 - 2x_2^2 + 1$ *y* $c_5 = 1$.

$$f_5 = f_4 - c_5 t_5(g_1, g_2)$$
$$f_5 = x_2^4 + 3x_1^2 + x_2^2 - 3 - x_2^4 + 2x_2^2 - 1$$
$$f_5 = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4$$

$$f_5 \xrightarrow{G} f_6$$

$t_6(y_1, y_2) = y_1$, *así* $t_6(g_1, g_2) = x_1^2 - 1$ *y* $c_6 = 3$.

$$f_6 = f_5 - c_6 t_6(g_1, g_2)$$
$$f_6 = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4 - 3x_1^2 + 3$$
$$f_6 = 3x_2^2 - 1$$

$$f_6 \xrightarrow{G} f_7$$

$t_7(y_1, y_2) = y_2$, *así* $t_7(g_1, g_2) = x_2^2 - 1$ *y* $c_7 = 3$.

$$f_7 = f_6 - c_7 t_7(g_1, g_2)$$
$$f_7 = 3x_2^2 - 1 - 3x_2^2 + 3$$
$$f_7 = 2$$

$$f_7 \xrightarrow{G} f_8$$

$t_8(y_1, y_2) = 1$, *así* $t_8(g_1, g_2) = 1$ *y* $c_8 = 2$.

$$f_8 = f_7 - c_8 t_8(g_1, g_2)$$
$$f_8 = 2 - 2$$
$$f_8 = 0$$

Por tanto la forma residual del polinomio $f = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$ *es* 0, *es decir* $RF_S(f) = 0$.
Encontremos la forma residual del ejemplo 2).

$$f \xrightarrow{G} f_1$$

$t_1(y_1, y_2) = y_1^3$, *así* $t_1(g_1, g_2) = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3$ *y* $c_1 = 1$.

$$f_1 = f - c_1 t_1(g_1, g_2)$$
$$f_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 - x_2^3$$
$$f_1 = -2x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 - x_2^3$$

$$f_1 \xrightarrow{G} f_2$$

$t_2(y_1, y_2) = y_1 y_2$, *así* $t_1(g_1, g_2) = x_1^2 x_2 + x_2^3$ *y* $c_2 = 1$.

$$f_2 = f_1 - c_2 t_2(g_1, g_2)$$
$$f_2 = -2x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 - x_2^3 + 2x_1^2 x_2 + 2x_2^3$$
$$f_2 = -x_1 x_2^2 - x_2^3.$$

Por tanto la forma residual del polinomio $f = x_1^3 + x_1^2 x_2$ *es* $-x_1 x_2^2 - x_2^3$*, es decir* $RF_S(f) = -x_1 x_2^2 - x_2^3$.

Definición 3.3. *Sean* S *una subálgebra de* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *y* $G \subseteq S \setminus \{0\}$ *una base SAGBI de* S*. Se dice que* G *es una base SAGBI reducida de* S *si*

(i) $\{lt(g_1), \ldots, lt(g_s)\}$ *es el sistema monomial minimal de generadores de álgebra de* $k[Lt(G)]$.
(ii) *Para* $i = 1, \ldots, s$, $Ter(g_i - lt(g_i)) \cap k[Lt(G)] = \emptyset$.

Proposición 3.4. *Sea* $S = k[G]$ *la* k*-subálgebra de* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *generada por la base SAGBI* G*. Entonces, existe una única base SAGBI reducida de* S.

Prueba. Probemos existencia. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base SAGBI de S. Por condición (B-1) del Teorema 2.1 $k[Lt(S)] = k[Lt(G)]$. Por Proposición 3.1 parte ii) existe un sistema minimal de generadores de $k[Lt(G)]$. Supóngase que el sistema minimal de generadores de dicha subálgebra monomial es $M = \{lt(m_1), \ldots, lt(m_t)\}$, con $t \leq s$. Ahora, nótese que $k[Lt(M)] = k[Lt(G)] = k[Lt(S)]$, es decir, el conjunto $G' = \{m_1, \ldots, m_t\}$ es una base SAGBI de S la cual satisface i) de la Definición 3.3. Sean $m_i = lt(m_i) + h_i$ y $m'_i = lt(m_i) + RF_S(h_i)$; para $i = 1, \ldots, t$, consideremos el conjunto $G'' = \{m'_1, \ldots, m'_t\}$ y veamos que G'' es una base SAGBI reducida de S. Como $m'_i = m_i - (h_i - RF_S(h_i))$, por la Proposición 3.2 se tiene que $m'_i \in S$ para $i = 1, \ldots, t$. Además, como $k[Lt(M)] = k[Lt(S)]$ el conjunto G'' es una base SAGBI de S. Para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$, ningún término en $Ter(RF_S(h_i))$ está en $k[Lt(G)]$, ya que $RF_S(h_i)$ es reducido, lo cual prueba la parte ii) de la Definición 3.3.
Ahora, probemos la unicidad. Supongamos que $G = \{g_1, \ldots g_t\}$ y $H = \{h_1, \ldots, h_s\}$ son dos bases SAGBI reducidas de S. Por Proposición 3.1 parte ii), se debe tener que $s = t$ y se pueden renombrar los elementos de H tal que $lt(g_i) = lt(h_i)$ para $i = 1, \ldots, s$. Además, para $i = 1, \ldots, s$, $g_i - h_i \in S$ y $g_i - h_i$ es reducido por la condición ii) de la Definición 3.3. Por la propiedad (C-2) del Teorema 2.1 se tiene que $g_i - h_i = 0$ para $i = 1, \ldots, s$. □

Ejemplo 3.2. *Para la siguiente base SAGBI con el orden* $Deglex$ *encontremos la base SAGBI reducida. Sea*

$$G = \{x_2 x_3 - x_3^2, x_1^4 - x_2^2 x_3^2\} \text{ una base SAGBI de } S = \mathbb{Q}[G].$$

Utilizando las propiedades de la forma residual obtenemos

$$\begin{aligned} RF_S[x_2x_3 - x_3^2] &= RF_S[x_3(x_2 - x_3)] = RF_S[RF_S(x_3)RF_S(x_2 - x_3)] \\ &= RF_S[x_3(x_2 - x_3)] = RF_S(x_2x_3) - RF_S(x_3^2) \\ &= x_2x_3 - x_3^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} RF_S[x_1^4 - x_2^2x_3^2] &= RF_S[(x_1^2 - x_2x_3)(x_1^2 + x_2x_3)] \\ &= RF_S[RF_S(x_1^2 - x_2x_3)RF_S(x_1^2 + x_2x_3)] \\ &= RF_S\{[RF_S(x_1^2) - RF_S(x_2x_3)][RF_S(x_1^2)+ \\ &+ RF_S(x_2x_3)]\} \\ &= RF_S[(x_1^2 - x_3^2)(x_1^2 + x_3^2)] = RF_S[x_1^4 - x_3^4] \\ &= RF_S(x_1^4) - RF_S(x_3^4) = x_1^4 - x_3^4. \end{aligned}$$

Por tanto la base SAGBI reducida de S *es* $\{x_2x_3 - x_3^2, x_1^4 - x_3^4\}$.

Corolario 3.2. *Dos subálgebras* S *y* T *son iguales si, y sólo si,* S *y* T *tienen la misma base SAGBI reducida.*

Ejemplo 3.3. *Determinemos si las siguientes dos subálgebras son o no iguales. Sean* $G_1 = \{x_2x_3 - x_3^2, x_1^4 - x_2^2x_3^2\}$ *una base SAGBI de la* $\mathbb{Q}$*-subálgebra* $S_1 = \mathbb{Q}[G_1]$ *y* $G_2 = \{x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, x_3^2 - 1\}$ *una base SAGBI de la* $\mathbb{Q}$*-subálgebra* $S_2 = \mathbb{Q}[G_2]$, *y el orden* $Degrevlex$.
La base SAGBI reducida de la $\mathbb{Q}$*-subálgebra* S_1 *es* $\{x_2x_3 - x_3^2, x_1^4 - x_3^4\}$ *y la base SAGBI reducida de la* $\mathbb{Q}$*-subálgebra* S_2 *es* $\{x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, x_3^2 - 1\}$. *Como la base SAGBI reducida de* S_1 *es diferente de la base SAGBI reducida de* S_2, *las dos subálgebras* S_1 *y* S_2 *son diferentes*

BIBLIOGRAFÍA

1. Adams, W. W. and Loustaunau, P. (1994). *An Introduction to Gröbner Bases*(Graduate Studies in Mathematics, vol. 3). Providence, R.I.: American Mathematical Society.
2. Hungerford T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
3. Kapur D. and Madlener K. (1989). *A completion procedure for computing a canonical basis of a k-subalgebra*. In: Kaltofen E. and Watt S. (eds.). Proc. Conf. Computers and Mathematics 1989. Cambridge: MIT Press.
4. Kreuzer M. and Robbiano L. (2000). *Computational Commutative Algebra 1*. Berlin: Springer-Verlag.
5. Kreuzer M. and Robbiano L. (2005). *Computational Commutative Algebra 2*, Berlin: Springer-Verlag.
6. Marín V. (2008) *Análogo de las Bases de Gröbner de Ideales para Subálgebras sobre Anillos Conmutativos*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

7. Robbiano L. and Sweedler M. (1990). *Subalgebra bases*. In: Bruns W. and Simis A. (eds.). Commutative algebra. Proc. Commutative Algebra Salvador 1988. Lectures Notes in Mathematics vol. 1430 (61-87). Berlin: Springer.

Referencia	Recepción	Aprobación
Lezama, O. y Marín, V. Una aplicación de las bases SAGBI - Igualdad de Subálgebras (caso cuerpo). Revista *Tumbaga* (2009).	01/06/2009	03/09/2009