

Un modelo de potencialidad climática para la trufa negra (*Tuber melanosporum*) en Teruel (España)

R. Alonso Ponce*, B. Águeda, T. Ágreda, M. P. Modrego,
J. Aldea y F. Martínez-Peña

*Departamento de Investigación y Experiencias Forestales de Valonsadero. Consejería de Medio Ambiente.
Junta de Castilla y León. Apdo. de Correos 175. 42080 Soria. España*

Resumen

La trufa negra (*Tuber melanosporum*) es un hongo ectomicorrícico comestible cuyo cultivo supone en la actualidad una alternativa económica viable para zonas rurales afectadas gravemente por la despoblación. En la provincia de Teruel (España) hay más de 4.500 ha de plantaciones truferas, instaladas sin ningún proceso de planificación orientado a alcanzar un territorio rural ordenado. Los modelos territoriales de potencialidad o aptitud para las especies son herramientas que permiten a los gestores, agricultores y selvicultores desarrollar dicha planificación y tomar decisiones fundamentadas en un conocimiento científico lo más riguroso posible.

Utilizando un método basado en la teoría de campos aplicada a la ecología, habitual para elaborar las áreas potenciales de especies forestales vegetales, se ha determinado el territorio climáticamente apto para *T. melanosporum* en la provincia Teruel. Para construir este modelo se han utilizado 924 localizaciones de la ecorregión Catalano-Aragonesa. Elaborando ocho parámetros climáticos trascendentes para la fructificación de la trufa negra, se han construido sus correspondientes hábitats.

El modelo de potencialidad climática elaborado, completado con una corrección litológica, ha permitido identificar algo más de 8.000 km² como aptos para la recolección de la trufa negra en Teruel, casi el 55% de la provincia, de los cuales 3.000 corresponden a la clase óptima y están distribuidos por las comarcas de Gúdar-Javalambre, Comunidad de Teruel y Maestrazgo. La adaptación del modelo ha permitido identificar más de 4.000 km² como aptos para la instalación de plantaciones truferas, 1.150 de los cuales tienen potencialidad óptima.

El modelo generado en el presente trabajo permitirá la adecuada planificación territorial de la truficultura en la provincia de Teruel.

Palabras clave: modelos de distribución de especies, autoecología, truferas naturales, plantaciones truferas.

Abstract

A climatic potentiality model for black truffle (*Tuber melanosporum*) in Teruel (Spain)

Black truffle (*Tuber melanosporum*) is an edible ectomycorrhizal mushroom whose cultivation is an economically-viable alternative in rural areas affected by depopulation. In the province of Teruel (Spain), truffle plantations occupy nowadays more than 4,500 ha, but no land use planning guidelines have been available. Species distribution models are tools that allow managers, farmers and foresters to plan ahead and make decisions with a scientific basis.

The territory climatically suitable for *T. melanosporum* in Teruel has been predicted using a method based on the ecology field theory, previously tested in the development of distribution models for forest species. A dataset of 924 locations where black truffle has been collected in the *Catalano-Aragonesa* ecoregion and eight climatic parameters deeply influencing the presence and fructification of the black truffle have been considered and their corresponding habitats have been built.

The distribution model, corrected under lithological criteria, has identified more than 8,000 km² as suitable for black truffle fructification in Teruel, almost 55% of the province, belonging 3,000 of them to the optimal class. This land is mainly distributed over the regions of Gúdar-Javalambre, Comunidad de Teruel and Maestrazgo. A further correction based on land-use criteria has identified more than 4,000 km² as suitable for truffle plantations, being 1,150 of them optimal.

The model here presented will help to a proper planning for truffle cultivation in the province of Teruel.

Key words: species distribution models, autoecology, natural truffle area, truffle plantations.

* Autor para la correspondencia: ces-aloponra@jcyl.es

Recibido: 18-03-10; Aceptado: 31-05-10.

Introducción

La trufa negra (*Tuber melanosporum* Vittad.) es un hongo ascomicete hipógeo. Se considera endémico de áreas de la zona mediterránea al sur de Europa con suelo calizo y vive en asociación simbiótica con frondosas, principalmente robles y encinas (*Quercus* sp.) y avellanos (*Corylus avellana* L.) (Delmas, 1978; Olivier *et al.*, 2002). Habitualmente, aparece en bosques muy abiertos con suelos bien drenados de pH elevado y clima marcadamente continental, con inviernos muy fríos y periodos de intensa sequía.

Su área de distribución natural está restringida al centro-norte de Italia, sur de Francia y este de España, aunque, de forma puntual, se han encontrado carpóforos de esta especie en los países del centro y el este de Europa y en Portugal (Reyna, 2007). Esta distribución tan restringida parece ser consecuencia de la expansión de pequeñas poblaciones de la especie desde Italia y España, donde se refugió en la última glaciación, hace unos 16.000-10.000 años (Murat *et al.*, 2004).

Desde los años 70 del siglo pasado, la trufa negra ha sido cultivada con éxito en Francia, Italia y España, expandiéndose posteriormente su cultivo a Marruecos, Australia, Nueva Zelanda, Canadá, Estados Unidos, Argentina, Chile e Israel (Murat *et al.*, 2004).

Desde 1987 se han plantado en la comarca de Gúdar-Javalambre de la provincia de Teruel más de 4.500 ha de árboles micorrizados con trufa negra, principalmente encinas. El progreso del cultivo de la trufa a través de las subvenciones del Gobierno de Aragón y la Diputación Provincial de Teruel, con la colaboración de los bancos locales, una comprometida asociación de cultivadores de trufa y un creciente interés por parte de los agricultores locales, ha supuesto la conservación y la potenciación de este aprovechamiento forestal junto con la mejora de la economía de esta comarca turolense, una de las más despobladas de España (Samils *et al.*, 2008).

Sin embargo, la tarea de identificar los ambientes aptos para el cultivo y de esta manera evitar errores en la selección de terrenos adecuados ha sido sólo parcialmente afrontada y aún no alcanzada (Bencivenga, 2000). Es por ello que la instalación de nuevas plantaciones no ha sido un proceso planificado, sino más bien basado en experiencias previas por parte de los truferos. De hecho, hasta ahora, la truficultura en España ha sido una actividad complementaria a la agricultura y la ganadería, que en los últimos años se ha visto potenciada por las ayudas a la reforestación de la Unión Europea.

Por consiguiente, resulta imprescindible desarrollar una adecuada planificación orientada a alcanzar un territorio rural ordenado que aproveche racionalmente sus recursos. Esto requiere obligadamente contar con herramientas que permitan a gestores, selvicultores y agricultores tomar decisiones fundamentadas en un conocimiento científico lo más riguroso posible. Una de estas herramientas la constituyen los modelos territoriales de potencialidad o aptitud para las especies, que ya han sido abordados para la trufa negra en otros territorios españoles en los últimos años (Domínguez *et al.*, 2003; Colinas *et al.*, 2007; Alfaro, 2008; Aguirre *et al.*, 2009; González Armada, 2009). Sin embargo, ninguno de estos trabajos han aprovechado las ventajas (robustez, integración de la correlación entre parámetros, control estadístico, modelo en forma de probabilidad de ocurrencia, etc.) que los modelos de distribución de especies (*SDM, species distribution models*), desarrollados profusamente desde hace dos décadas (Guisan y Thuiller, 2005), ofrecen a diversos ámbitos de la ecología tales como la conservación de especies (Carroll *et al.*, 1999; Suárez-Seoane *et al.*, 2002; Cabeza *et al.*, 2004; Peterson *et al.*, 2006; Falcucci *et al.*, 2009), la adaptación al cambio climático (Peterson *et al.*, 2001; Peterson *et al.*, 2002; Pearson y Dawson, 2003; Thuiller, 2003; Hijmans y Graham, 2006; Trivedi *et al.*, 2008) o la invasión de especies alóctonas (Peterson y Vieglais, 2001; Peterson, 2003; Broennimann y Guisan, 2008), entre otros. A pesar de esta versatilidad, su uso en planes de reforestación ha sido mucho más escaso (Felicísimo, 2003), aunque en nuestro país ya se plantearon para dicho objetivo modelos de este tipo desde hace casi una década (Gandullo y Sánchez Palomares, 2000; Rubio y Sánchez Palomares, 2006; Alonso Ponce *et al.*, 2010). En cualquier caso, no tenemos conocimiento de ningún trabajo que haya aplicado este tipo de técnicas a hongos ectomicorrícicos comestibles, cuyo cultivo es una realidad solamente en el caso de la trufa negra (Wang y Hall, 2004).

El tipo de variables (climáticas, fisiográficas, edáficas, uso del suelo, etc.) que han de emplearse para construir el modelo depende en gran medida de la escala de trabajo (Pearson y Dawson, 2003) y, obviamente, de su disponibilidad. Es conocido que a grandes escalas el clima constituye el principal factor que gobierna la distribución de los seres vivos (Looman, 1983; Woodward y Williams, 1987), pero tampoco es menos cierto que en el ámbito regional, el uso del suelo (Thuiller *et al.*, 2004; Peterson *et al.*, 2006; Anadón *et al.*, 2007) e incluso las características edáficas co-

bran una importancia significativa (Schmidtlein y Ewald, 2003). Desgraciadamente, la información ambiental disponible sobre las propiedades edáficas con resolución regional o local es aún prácticamente inexistente en nuestro país, por lo que deberá ser sustituida por otra, generalmente de carácter geolitológico, a modo de filtro (Engler *et al.*, 2004), que generalmente mejora la capacidad predictiva del modelo (Gastón *et al.*, 2009).

Así pues, el objetivo del presente trabajo es definir las zonas potencialmente viables para las trufas naturales y la truficultura en la provincia de Teruel mediante el uso de un algoritmo robusto que tenga en cuenta las correlaciones entre variables abióticas.

Material y métodos

Área de estudio

Teruel es la más meridional de las tres provincias que componen la Comunidad Autónoma de Aragón, con una extensión de 14.809 km². El clima de la provincia de Teruel se caracteriza por escasas precipitaciones anuales, a pesar de su altitud, y de oscilaciones térmicas muy pronunciadas a lo largo del año, por lo que se puede encuadrar dentro de un clima mediterráneo continentalizado. La mayor parte de su superficie se encuentra sobre altos macizos del Sistema Ibérico meridional, que contrasta con las áreas de menor altitud conformadas sobre materiales oligomiocénicos horizontales de la depresión del Ebro. La depresión Calamocha-Teruel es un alto corredor entre los 850 y 1.000 m recorrida por el río Jiloca, que limita al oeste con altas parameras de pliegues calcáreos y Horst residuales del macizo de Albarracín cuyo relieve va desde los 900 a 1.800 m de altitud. La vegetación presente refleja la continentalidad del clima con series típicas del piso supramediterráneo como sabinas albares de *Juniperus thurifera* L. y encinares basófilos de *Quercus ilex* subsp. *rotundifolia* L. De acuerdo con el Tercer Inventario Forestal Nacional (2004-2005), la provincia de Teruel tiene una superficie forestal de 930.000 ha, siendo el 63% de ellas monte arbolado.

Datos de presencia de trufas

La identificación de las áreas naturales productoras de trufa negra se ha basado en dos fuentes de infor-

mación. Por un lado, la Consejería de Medio Ambiente del Gobierno de Aragón nos ha facilitado la relación de montes de utilidad pública que han tenido aprovechamiento comercial de trufa negra en el periodo 1992-2007 (Forcadell *et al.*, 2008) en la provincia de Teruel. Por otro, el trabajo de Domínguez *et al.* (2003) ha permitido añadir al colectivo anterior localizaciones de la vecina Comunidad Valenciana, siempre dentro de la ecorregión Catalano-Aragonesa (Elena *et al.*, 1997). Esta restricción se justifica por el hecho de que la distribución de las especies está limitada tanto por factores ecológicos como históricos (Peterson *et al.*, 2001; Peterson *et al.*, 2002), por lo que es altamente recomendable considerar la predicción de las áreas potencialmente aptas de manera separada para cada ecorregión. Además, la provincia de Teruel, objetivo de nuestro modelo, se encuentra casi en su totalidad dentro de dicha ecorregión.

Sobre las teselas seleccionadas se superpuso una malla de 1 km² de resolución que proporcionó un total de 924 puntos de presencia de la especie.

VARIABLES AMBIENTALES

Las variables climáticas básicas (precipitaciones y temperaturas mensuales) se han obtenido a partir del modelo de Sánchez Palomares *et al.* (1999), el cual proporciona sus estimaciones a partir de términos lineales y cuadráticos de la altitud, la latitud y la longitud mediante regresión múltiple, de manera independiente por cuencas hidrográficas. A partir de ellas se han elaborado ocho parámetros climáticos (Tabla 1) que se consideran trascendentes para la fructificación de *T. melanosporum* en Europa (Delmas y Poitou, 1973; Granetti, 1982; Le Tacon y Delmas, 1982; Bonet *et al.*, 2006; Reyna, 2007; Sáez y De Miguel, 2008), y cuyos hábitats paramétricos han sido calculados según la metodología de Alonso Ponce *et al.* (2010), salvo que el parámetro de localización de la distribución de cada variable es en esta ocasión la media 0,1-recortada.

Por otro lado, se empleó el Mapa Geológico de Aragón (CDITA, 2007) para eliminar del territorio climáticamente apto las teselas con alta probabilidad de no presentar condiciones edáficas adecuadas para la especie, principalmente aquellas teselas con materiales que originan suelos ácidos, yesíferos o de textura pesada (Callot, 1999; Reyna, 2007). Puesto que se trata de cartografía geológica y no litológica (ni por su-

Tabla 1. Definición y hábitat paramétrico de las ocho variables empleadas en el modelo de potencialidad climática

	PT	PV	PAG	TM	TMC	TMF	MMF	ISEQ
LI	447	97	24	7,6	16,9	-0,2	-4,6	0,000
UIC	463	98	24	7,6	16,9	-0,2	-4,6	0,000
UI	500	110	34	10,5	19,3	3,1	-1,9	0,007
M	578	121	37	11,7	20,6	4,4	-0,1	0,034
US	666	130	40	12,9	21,8	5,6	1,5	0,073
USC	954	137	44	14,4	23,1	7,1	3,2	0,170
LS	954	138	44	14,5	23,1	7,4	3,5	0,190

LI: límite inferior. UIC: umbral inferior de compensación. UI: umbral inferior. M: media 0,1-recortada. US: umbral superior. USC: umbral superior de compensación. LS: límite superior. PT: precipitación total anual (mm). PV: precipitación de verano (mm). PAG: precipitación de agosto (mm). TM: temperatura media anual (°C). TMC: temperatura media del mes más cálido (°C). TMF: temperatura media del mes más frío (°C). MMF: temperatura media de las mínimas del mes más frío (°C). ISEQ: intensidad de la sequía (tanto por uno) (Walter y Lieth, 1960).

puesto edáfica), esta exclusión ha de ser necesariamente laxa, con lo cual la supresión de unidades se ha circunscrito a aquéllas que por litologías y edad manifestaran estar integradas en su totalidad por materiales silíceos o yesíferos.

Por último, con el fin de precisar las zonas susceptibles, según el modelo, de albergar nuevas plantaciones para producción de trufa, se han escogido las teselas del Mapa Forestal de España (MFE200) (Ruiz de la Torre, 1990, 1999) no arboladas, sin presencia de halófitas, sin matorral gipsófilo, sin encharcamiento temporal y que no incluyeran roquedos compactos. Tanto las variables climáticas como las geológicas y de vegetación fueron transformadas a formato *ráster* de $0,5 \times 0,5$ km de resolución.

Elaboración del modelo

La metodología utilizada se basa en la teoría de campos en ecología (Wu *et al.*, 1985) aplicada a un hiperespacio definido por los parámetros ecológicos. La distancia empleada para evaluar la similitud ecológica es la de Mahalanobis, debido a su eficacia para manejar las correlaciones existentes entre parámetros (Legendre y Legendre, 1998). Dicha técnica utiliza un índice de aptitud de carácter aditivo (IPA), apoyado únicamente en datos de presencia, la cual se detalla en Alonso Ponce *et al.* (2010). En el presente trabajo, no obstante, se introduce una mejora relativa a un aspecto del modelo denominado *alcance*, que constituye la clave para asignar distintos pesos a las distintas observaciones en función de su mayor o menor marginalidad dentro del conjunto de presencias, puesto que permite aumentar o reducir el valor de IPA

para una misma distancia ecológica (Fig. 1). La redefinición del parámetro *alcance* (denotado por la letra *b*) persigue ponerlo en función del número de observaciones y de parámetros empleados en la definición del hábitat, apoyándonos en el concepto de continuo (Austin, 1985) y su relación con la respuesta de las especies a los gradientes ecológicos (Austin y Gaywood, 1994). Los pormenores de esta modificación se exponen en un anexo al final de este trabajo.

Con el fin de facilitar la visualización y el análisis de los resultados, se han definido tres clases de potencialidad en función de la distribución del IPA, a saber, potencialidad óptima (tercil superior de la distribución), potencialidad condicionada (tercil medio) y potencialidad dudosa (tercil inferior). Esta división se basa en los resultados de Mezquida *et al.* (2010).

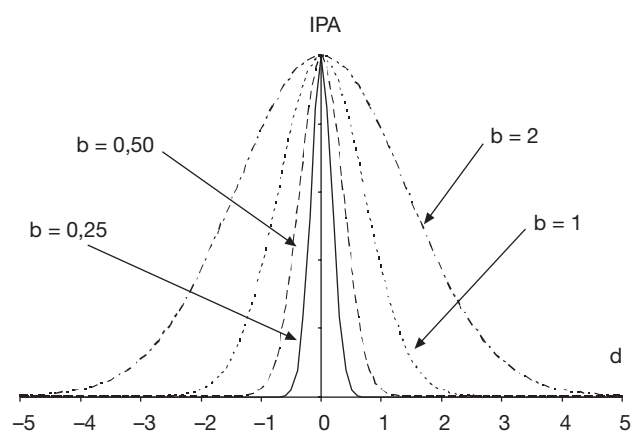


Figura 1. Influencia del *alcance* (*b*) en el valor del índice de aptitud (IPA, ordenadas) para distintos valores de distancia ecológica (*d*, abscisas).

Validación del modelo

La muestra de 924 localizaciones de trufas fue dividida aleatoriamente en un subconjunto de calibración (70%) y otro de validación (30%) (Fielding y Bell, 1997). Esta partición se repitió en 100 ocasiones, calculándose otras tantas veces el IPA en todo el área de estudio y adjudicando a cada celda el valor promedio, así como el valor predicho de IPA para cada muestra de validación. Para este procedimiento se utilizó SAS9.0 (Sas Institute, 2002). A continuación, además de calcular el valor medio de la sensibilidad se empleó la generalización robusta del test de Wilcoxon-Mann-Whitney, mediante R2.9.2) (Mee, 1990; García Pérez, 2005) para comparar la distribución de los valores de IPA predichos para las 100 muestras de validación y para las 100 de calibración.

Resultados

Hábitat climático

En la Tabla 1 se resume el hábitat paramétrico de las ocho variables empleadas en la elaboración del modelo de potencialidad. Los valores de todos ellos se mueven en los rangos aceptados como normales para la especie en España salvo para TMF, que resulta algo menor (su límite inferior cae hasta $-0,2^{\circ}\text{C}$) y PAG, que es algo escasa (su límite superior no alcanza los 45 mm). Los hábitats marginales de compensación son francamente amplios (lo cual reduce los

marginales estrictos muy severamente, llegando a desaparecer en muchos casos). De ello se deriva que el hábitat central multivariable resulta mucho más amplio que el univariable, fruto de la compensación entre parámetros.

Modelo de potencialidad climática y corrección litológica

La extensión a todo el territorio provincial del índice de aptitud climática y su posterior corrección mediante la información litológica disponible ha permitido identificar algo más de 8.000 km² (54,8% del total provincial) hipotéticamente aptos para la trufa negra, de los cuales unos 3.000 km² corresponden a la clase óptima (20,4% de la provincia) (Tabla 2 y Fig. 2). Este territorio se distribuye fundamentalmente por las comarcas de Gúdar-Javalambre, Comunidad de Teruel y Maestrazgo, cuya superficie es, en alrededor de tres cuartas partes, apta para el hongo. De ellas, destaca la primera, con más de la mitad de su extensión clasificable como de potencialidad óptima.

Validación del modelo

Los resultados tanto de sensibilidad como de la comparación de las distribuciones de los valores predichos de IPA entre las muestras de validación y de calibración, para las 100 repeticiones efectuadas, se detallan en la Tabla 3. Los valores de sensibilidad oscilaron en

Tabla 2. Distribución comarcal de las tres clases de potencialidad climática, con corrección litológica, definidas para *Tuber melanosporum* en Teruel. Se presenta tanto la superficie (km²) como el porcentaje que ésta representa respecto de la extensión de la comarca

Comarca	Óptima		Condicionada		Dudosa		Total
	km ²	%	km ²	%	km ²	%	%
Andorra-Sierra de Arcos	85	12,6	83	12,3	64	9,5	34,3
Bajo Aragón	115	8,8	135	10,3	72	5,5	24,6
Bajo Martín	0	0,0	1	0,1	5	0,7	0,8
Comunidad de Teruel	590	21,1	881	31,6	577	20,7	73,4
Cuencas Mineras	46	3,3	585	42,1	152	10,9	56,3
Gúdar-Javalambre	1.208	51,3	362	15,4	182	7,7	74,5
Jiloca	0	0,0	71	3,6	847	43,4	47,1
Maestrazgo	443	36,8	255	21,1	132	10,9	68,8
Matarraña	194	20,8	217	23,2	77	8,2	52,2
Sierra de Albarracín	337	23,9	319	22,6	83	5,8	52,3
Teruel	3.017	20,4	2.908	19,6	2.190	14,8	54,8

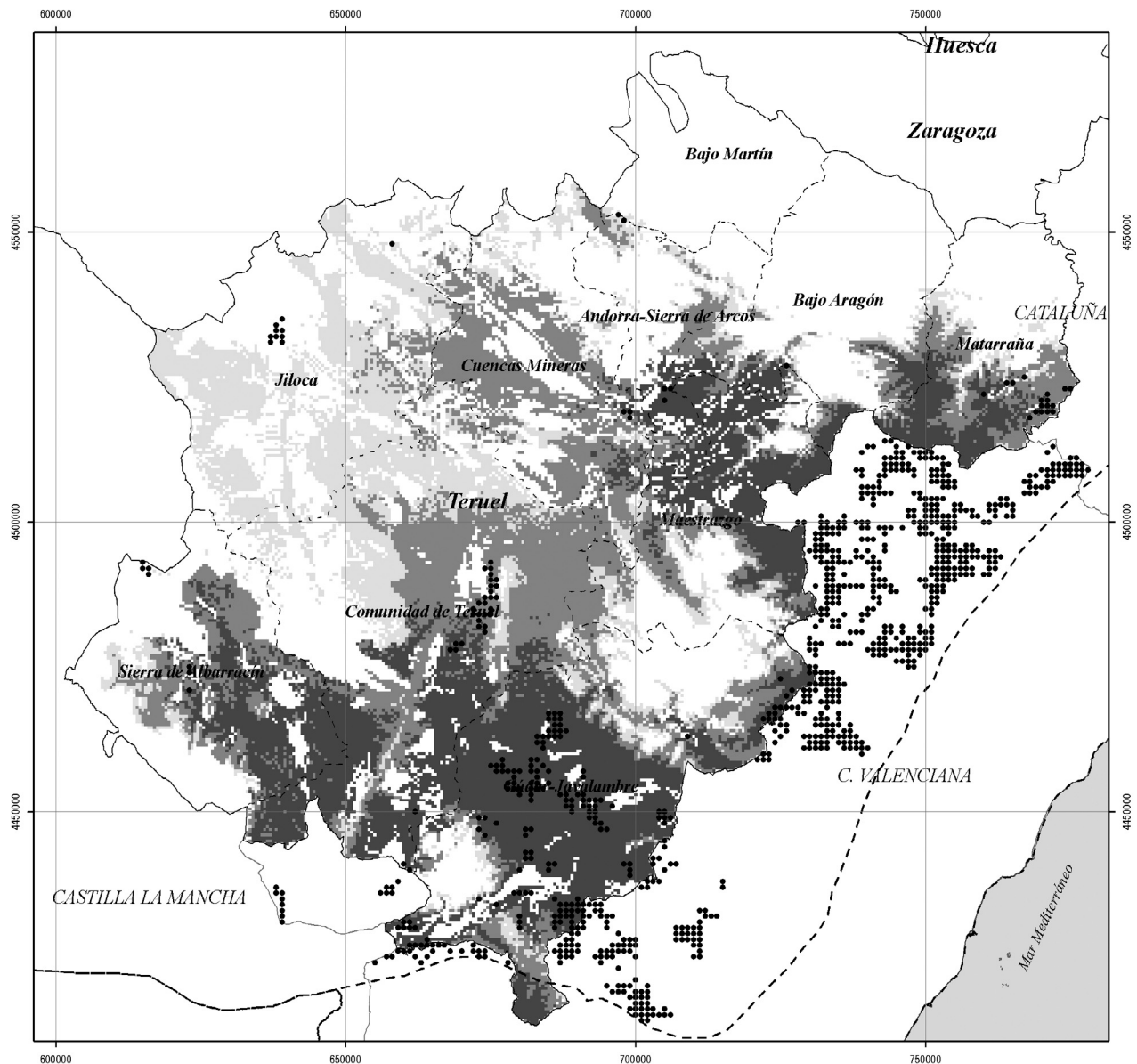


Figura 2. Mapa de potencialidad climática con corrección litológica para *Tuber melanosporum* en la provincia de Teruel. Se presenta dividido en tres clases de potencialidad, siendo el gris más oscuro la mayor potencialidad; el blanco, nula potencialidad. Los puntos negros se corresponden con las localizaciones de zonas productoras de *T. melanosporum*. La línea discontinua gruesa delimita las regiones bioclimáticas. El área de estudio se encuentra casi en su totalidad dentro de la ecorregión Catalano-Aragonesa. Las líneas continuas y las discontinuas finas marcan las fronteras administrativas (provincias y comarcas). Las coordenadas UTM se facilitan en metros referidos al huso 30N (ED50).

tre el 92,1% y 100,0%, con un valor medio del 94,4%. Por su parte, el estadístico de Mee para la generalización robusta de la prueba de Wilcoxon-Mann-Whitney obtuvo un valor medio de 0,500, con un máximo de 0,580 y un mínimo de 0,404. Únicamente en un 4% de las repeticiones dicho estadístico resultó significativamente distinto de 0,5, lo que implica a su vez la diferencia significativa entre las distribuciones compa-

radas. Por consiguiente queda demostrada la robustez del modelo elaborado.

Áreas de interés para plantaciones truferas

El modelo de potencialidad climática con corrección litológica fue a su vez modificado con el fin de identi-

Table 3. Valor medio, con su intervalo de confianza ($\alpha = 0,05$) (IC95), máximo y mínimo de la sensibilidad y del estadístico de Mee (p) para la prueba robusta de Wilcoxon-Mann-Whitney, para las 100 repeticiones efectuadas. En esta última prueba se incluyen además los extremos inferior (*ici*) y superior (*ics*) del intervalo de confianza de p para $\alpha = 0,05$, así como el porcentaje de repeticiones que arrojaron un valor de p significativamente distinto de 0,5 (% signif.)

	Sensibilidad (%)	Prueba robusta de Wilcoxon-Mann-Whitney			
			p	<i>ici</i>	<i>ics</i>
Media	97,4	Media	0,500	0,420	0,581
IC95	(96,9-98,0)	IC95	(0,488-0,512)	(0,408-0,431)	(0,569-0,593)
Mínimo	92,1	Mínimo	0,404	0,328	0,484
Máximo	100,0	Máximo	0,580	0,497	0,658
		% signif.	4,0		

ficar zonas susceptibles de albergar plantaciones trufas, según el uso del suelo actual. Más de 4.000 km² del territorio turolense son clasificados como aptos para plantaciones productoras de *T. melanosporum* (1.150 km² de la clase óptima de potencialidad) (Tabla 4 y Fig. 3), si bien su distribución comarcal es en cierta medida diferente a la que se obtuvo sin tener en cuenta el uso del suelo. Así, la comarca de Gúdar-Javalambre, debido a su carácter netamente forestal, posee, en términos relativos, menos terreno disponible para posibles plantaciones, con lo que cae a un 17% de superficie de potencialidad óptima (poco más de 400 km²). A pesar de ello, sigue siendo la comarca con mayor capacidad en términos absolutos para nuevas plantaciones. Por el contrario, tanto la Comunidad de Teruel como el Maestrazgo mantienen mayores porcentajes de territorio apto, si bien la primera ve netamente reducida su área de potencialidad óptima (menos de 300 km², apenas un 10% de su territorio).

Discusión y conclusiones

La metodología empleada en este trabajo ha permitido identificar el territorio climáticamente idóneo en la provincia de Teruel para la fructificación de *T. melanosporum* tanto en masas naturales como en plantaciones, introduciendo una drástica corrección litológica a falta de modelos territoriales de propiedades edáficas suficientemente precisos. El método, que tiene en cuenta las correlaciones (a veces muy fuertes) entre los predictores ambientales así como la existencia de *outliers* en la base de datos de presencias del taxón considerado (Alonso Ponce *et al.*, 2010), permite una predicción más robusta y por lo tanto fiable. La validación de los resultados así lo confirma, con una elevada sensibilidad y un muy reducido porcentaje de réplicas significativamente distintas de la distribución de valores de IPA de la muestra de calibración del modelo. La mera superposición de capas de información

Tabla 4. Territorio apto para plantaciones productoras de *Tuber melanosporum* según el modelo de potencialidad climática, con corrección litológica y selección por usos del suelo definidas. Se presenta tanto la superficie (km²) como el porcentaje que ésta representa respecto de la extensión de la comarca, para las tres clases de potencialidad definida.

Comarca	Óptima		Condicionada		Dudosa		Total
	km ²	%	km ²	%	km ²	%	%
Andorra-Sierra de Arcos	34	5,1	59	8,7	37	5,5	19,3
Bajo Aragón	41	3,1	69	5,3	44	3,4	11,8
Bajo Martín	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0,0
Comunidad de Teruel	276	9,9	725	26,0	471	16,9	52,8
Cuencas Mineras	27	1,9	392	28,2	107	7,7	37,7
Gúdar-Javalambre	402	17,1	112	4,8	34	1,5	23,3
Jiloca	0	0,0	56	2,8	683	35,0	37,9
Maestrazgo	241	20,0	161	13,4	78	6,4	39,8
Matarraña	42	4,5	66	7,0	46	4,9	16,4
Sierra de Albarracín	87	6,2	99	7,0	23	1,6	14,8
Teruel	1.150	7,8	1738	11,7	1.522	10,3	29,8

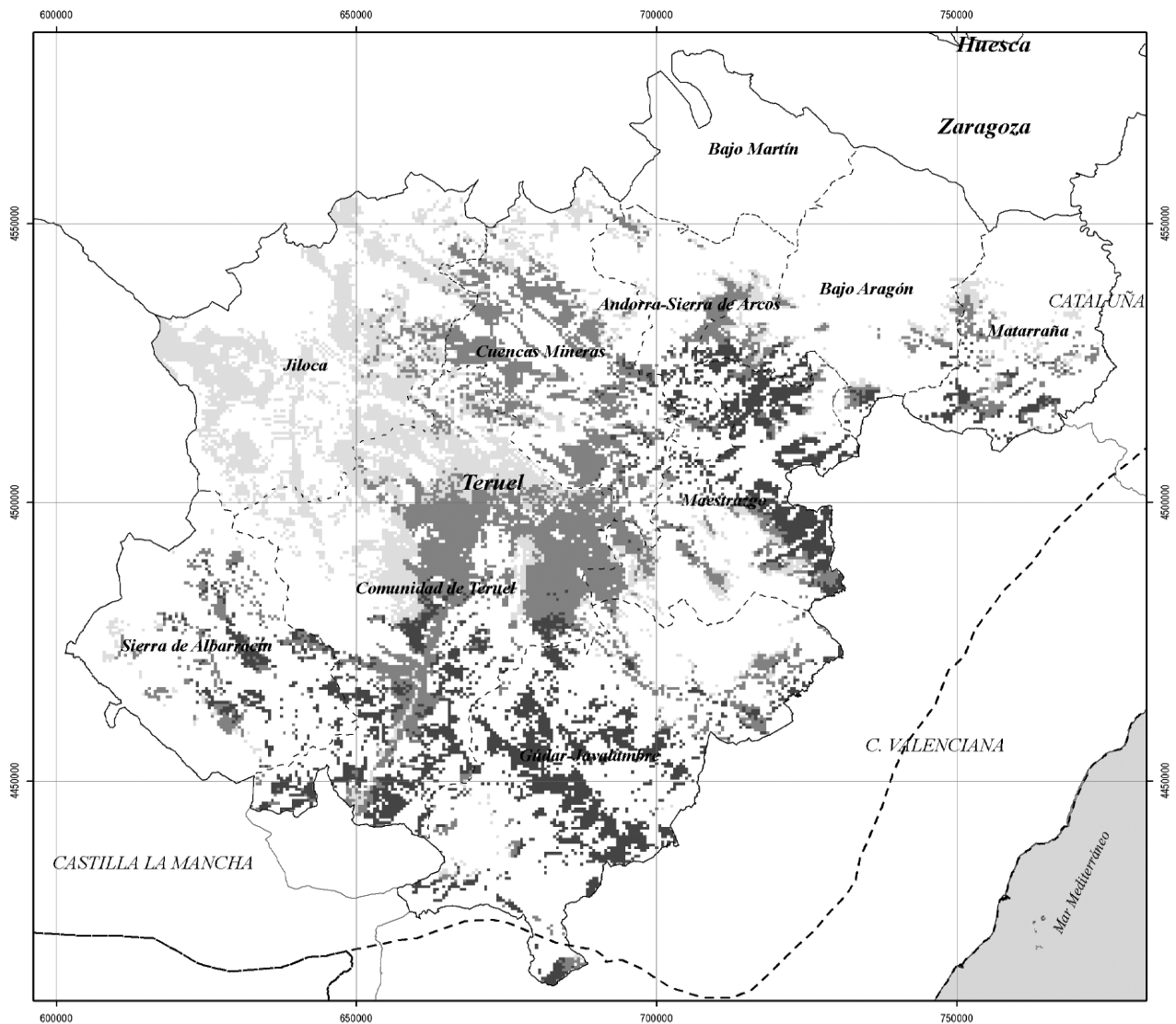


Figura 3. Áreas de interés desde una perspectiva climática para la instalación de plantaciones productoras de *Tuber melanosporum* en la provincia de Teruel. Se presenta dividido en tres clases de potencialidad, siendo el gris más oscuro la mayor potencialidad; el blanco, nula potencialidad. La línea discontinua gruesa delimita las regiones bioclimáticas. El área de estudio se encuentra casi en su totalidad dentro de la ecorregión Catalano-Aragonesa. Las líneas continuas y las discontinuas finas marcan las fronteras administrativas (provincias y comarcas). Las coordenadas UTM se facilitan en metros referidos al huso 30N (ED50).

ambiental, acotadas para los requerimientos ecológicos de la trufa negra, puede conducir a infraestimar el territorio potencialmente apto en localidades donde la compensación entre variables climáticas permite su fructificación y por el contrario a sobreestimarla allí donde se conjuguen valores extremos de esas mismas variables. El enfoque planteado en este trabajo, análogo al de otros algoritmos internacionalmente aceptados como MaxEnt (Phillips *et al.*, 2006), GARP (Stockwell y Peters, 1999) o ENFA (Hirzel *et al.*, 2002), tratan de solventar estos inconvenientes.

Por otro lado, los rangos de los parámetros climáticos empleados en la construcción del modelo son homologables, en general, a los considerados en otros trabajos de potencialidad para *T. melanosporum* en España, lo cual apoya la validez de los datos de presencia de fructificación empleados. Siguiendo las revisiones de Colinas *et al.* (2007) y Reyna (2007), en las que se resumen las variables climáticas de los lugares en los que fructifica la trufa negra en España, encontramos que la precipitación anual (PT) oscila entre los 300-500 y los 900 mm/año, la precipitación estival

(PV) en torno a los 100 mm y la de agosto (PAG) por encima de 40-50 mm. Con respecto a las temperaturas, la temperatura media anual (TM) se sitúa entre 8,6 y 14,8°C, la del mes más cálido (TMC) entre 23 y 32°C, la del mes más frío (TMF) entre 2,3 y 8,2°C y la de las mínimas del mes más frío (MMF) entre -2 y -6°C. Así pues las discrepancias más destacables se derivan de la menor termicidad del territorio turolense, que propicia la existencia de trufas naturales con precipitaciones del mes de agosto del orden de 25 mm, así como con temperaturas medias del mes más frío negativas, por debajo incluso del límite (1,0°C) considerado por Colinas *et al.* (2007) en Cataluña. Por otro lado, resulta relevante que el parámetro ISEQ presente un valor medio de apenas el 3,4%, lo cual pone cifras a la tesis ampliamente aceptada sobre la querencia de la trufa por climas con sequía estival notablemente atenuada por fenómenos tormentosos (Reyna, 2007; Sáez y De Miguel, 2008).

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten postular que el positivo impacto socioeconómico que el cultivo de *T. melanosporum* ha tenido en el municipio de Sarrión y su entorno (Samils *et al.*, 2008) puede ser exportado a amplias zonas de la provincia, principalmente de las comarcas de Gúdar-Javalambre, Maestrazgo y Comunidad de Teruel. Si bien es cierto que las más de 100.000 ha climáticamente óptimas para su cultivo han de verse necesariamente reducidas al incorporar los requerimientos edáficos (principalmente los relativos a textura y permeabilidad) y fisiográficos (fundamentalmente la pendiente), también lo es que se trata de una extensión suficientemente importante como para ser considerada seriamente en los planes de desarrollo provincial.

El modelo climático (con las correcciones introducidas) presenta sin embargo varias limitaciones que deben ser tenidas en cuenta. Por un lado, la amplitud del territorio analizado y la ya mencionada falta de modelos territoriales de propiedades edáficas implica que cualquier iniciativa encaminada a la plantación trufera ha de apoyarse en un análisis edafológico detallado de cada caso. De hecho, en el marco del mismo proyecto que financia este trabajo se han estudiado 78 plantaciones trufas turolenses (tanto productoras como no productoras, mayores de 10 años) (Ágreda *et al.*, 2009) y no se han encontrado diferencias significativas ($p > 0,20$; resultados no mostrados) en cuanto a su índice de potencialidad climática. Este hecho apoya la hipótesis planteada en dicho proyecto de que son causas fundamentalmente edáficas o, en

menor medida, de manejo y del propio origen de la planta micorrizada introducida, las que influyen en que una plantación llegue a ser productora o no de carpóforos.

Otra limitación se deriva de la larga duración del ciclo productivo de las plantaciones trufas, lo cual obliga a introducir en futuros trabajos modelos climáticos que contemplen alguno de los escenarios de cambio climático (IPCC, 2007). Por último, la más que probable existencia de autocorrelación espacial en las variables ambientales puede tener un efecto nocivo en la capacidad predictiva del modelo. Aunque el algoritmo empleado se basa en el concepto de similitud ecológica y no realiza ningún ajuste y por consiguiente el efecto de la mencionada autocorrelación será menor, este extremo debería ser analizado en futuros trabajos.

Como conclusión, el modelo de potencialidad climática con corrección litológica presentado en este trabajo ha permitido constatar la elevada aptitud del territorio turolense para la fructificación de trufa negra, tanto naturalmente como en plantaciones, principalmente en las comarcas de Gúdar-Javalambre, Comunidad de Teruel y Maestrazgo. Aun con las limitaciones del modelo ya expuestas y las futuras mejoras planteadas, debe además contribuir a una adecuada planificación de la truficultura, actividad que se está convirtiendo en una alternativa económica viable en amplias zonas de Teruel, donde la agricultura no es rentable y la despoblación es un problema acuciante.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el INIA (Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España) dentro del proyecto PET2007-013-C07.

Los autores desean agradecer sinceramente a D. Sergi García Barreda (Fundación CEAM), a D. Sergio Sánchez Durán (CITA, Gobierno de Aragón) y al Dr. Alfonso Domínguez Núñez (Universidad Politécnica de Madrid) por la excelente disposición a compartir información sobre trufas naturales. Asimismo, agradecemos a la Dra. Ana de Miguel y a D.^a Begoña González-Armada (Universidad de Navarra), a D. Gustavo Díaz (Cátedra de Medio Ambiente, Universidad de Alcalá) y al Dr. Mario Honrubia (Universidad de Murcia) por facilitarnos la información referente a modelos de potencialidad para trufa negra.

Referencias bibliográficas

- ÁGREDA T., ÁGUEDA B., MODREGO M.P., MARTÍNEZ-PEÑA F., ALONSO PONCE R., 2009. Ecología de las plantaciones de trufa negra en Teruel: método de muestreo para su caracterización. In: SECF-Junta de Castilla y León (Ed). Actas del 5º Congreso Forestal Español-Montes y sociedad: saber qué hacer, Ávila, [REF 5CFE01-0129]. Sociedad Española de las Ciencias Forestales. Pontevedra.
- AGUIRRE J.L., DÍAZ G., BUSTAMANTE B., CANALES M., APARICIO A., TALABANTE C., LARRÁN A., 2009. Estudio de la potencialidad de la truficultura en las comarcas de Molina de Aragón-Alto Tajo y Serranía de Cuenca. Universidad de Alcalá. 55 pp.
- ALFARO R., 2008. Caracterización ecológica de las truferas de trufa negra (*Tuber nigrum* Bull.) en la Región de Murcia. Universidad de Murcia. 118 pp.
- ALONSO PONCE R., LÓPEZ SENESPLEDA E., SÁNCHEZ PALOMARES O., 2010. A novel application of the ecological field theory to the definition of physiographic and climatic potential areas of forest species. *Eur J Forest Res* 129(1), 119-131. doi: 10.1007/s10342-008-0254-2.
- ANADÓN J.D., GIMÉNEZ A., MARTÍNEZ M., PALAZÓN J.A., ESTEVE M.A., 2007. Assessing changes in habitat quality due to land use changes in the spur-thighed tortoise *Testudo graeca* using hierarchical predictive habitat models. *Diversity and Distributions* 13(3), 324-331.
- AUSTIN M.P., 1985. Continuum concept, ordination methods and Niche theory. *Annu Rev Ecol Syst* 16, 39-61.
- AUSTIN M.P., GAYWOOD M.J., 1994. Current problems of environmental gradients and species response curves in relation to continuum theory. *J Veg Sci* 5(4), 473-482.
- BENCIVENGA M., 2000. Experiencias italianas en truficultura: problemática, perspectivas y expectativas. In: I Jornadas internacionales sobre truficultura en Aragón (Palazón C.F., Delgado I., Vilas J., Barriuso J., eds). Gobierno de Aragón, Zaragoza. pp. 35-47.
- BONET J.A., FISCHER C.R., COLINAS C., 2006. Cultivation of black truffle to promote reforestation and land-use stability. *Agron Sustain Dev* 26, 69-76.
- BROENNIMANN O., GUISAN A., 2008. Predicting current and future biological invasions: both native and invaded ranges matter. *Biol Lett* 4(5), 585-589.
- CABEZA M., ARAUJO M.B., WILSON R.J., THOMAS C.D., COWLEY M.J.R., MOILANEN A., 2004. Combining probabilities of occurrence with spatial reserve design. *Journal of Applied Ecology* 41(2), 252-262.
- CALLOT G., 1999. La truffe, la terre, la vie. INRA editions, Paris, France. 210 pp.
- CARROLL C., ZIELINSKI W.J., NOSS R.F., 1999. Using presence-absence data to build and test spatial habitat models for the fisher in the Klamath region, USA. *Conservation Biology* 13(6), 1344-1359.
- CDITA, 2007. Mapa geológico de Aragón. Centro de Documentación e Información Territorial, Gobierno de Aragón. <http://sitar.aragon.es/descargas/>.
- COLINAS C., CAPDEVILA J.M., OLIACH D., FISCHER C., BONET J.A., 2007. Mapa de aptitud para el cultivo de la trufa negra (*Tuber melanosporum* Vitt.) en Cataluña. Centre Tecnològic Forestal de Catalunya, Solsona, 134 pp.
- DELMAS J., 1978. *Tuber* spp. In: The biology and cultivation of edible mushrooms (Chang S.T., Hayes W.A., eds). Academic Press, New York. pp. 645-681.
- DELMAS J., POITOU N., 1973. Contribution a la connaissance de l'ecologie de *Tuber melanosporum*: la truffe du Périgord. Académie d'Agriculture de France, Alençon, France. 9 pp.
- DEVLIN K., 1998. The language of mathematics: making the invisible visible. WH Freeman. 344 pp.
- DOMÍNGUEZ J.A., LÓPEZ LEIVA C., RODRÍGUEZ BARRREAL J.A., SAIZ DE OMEÑACA J.A., 2003. Caracterización de rodales truferos en la comunidad valenciana. *Ecología* 17, 181-190.
- ELENA R., CASTEJÓN M., SÁNCHEZ SERRANO F., TELLA G., 1997. Clasificación biogeoclimática de España peninsular y balear. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, Madrid.
- ENGLER R., GUISAN A., RECHSTEINER L., 2004. An improved approach for predicting the distribution of rare and endangered species from occurrence and pseudo-absence data. *Journal of Applied Ecology* 41(2), 263-274.
- FALCUCCI A., CIUCCI P., MAIORANO L., GENTILE L., BOITANI L., 2009. Assessing habitat quality for conservation using an integrated occurrence-mortality model. *Journal of Applied Ecology* 46(3), 600-609.
- FELICÍSIMO A.M., 2003. Uses of spatial predictive models in forested areas territorial planning. CIOT 2003. IV International Conference on Spatial Planning, Zaragoza, Spain.
- FIELDING A.H., BELL J.F., 1997. A review of methods for the assessment of prediction errors in conservation presence/absence models. *Environmental Conservation* 24, 38-49.
- FORCADELL R., GARCÍA-BARRERA S., REYNA S., 2008. Evolución del aprovechamiento trufero en montes públicos de Teruel entre 1992 y 2007. Informe inédito del CEAM.
- GANDULLO J.M., SÁNCHEZ PALOMARES O., 2000. Programa pinares. Montes 60, 5-9.
- GARCÍA PÉREZ A., 2005. Métodos avanzados de estadística aplicada. Métodos robustos y de remuestreo. UNED, Madrid. 255 pp.
- GASTÓN A., SORIANO C., GÓMEZ-MIGUEL V., 2009. Lithologic data improve plant species distribution models based on coarse-grained occurrence data. *Invst Agrar: Sist Recur For* 18(1), 42-49.
- GONZÁLEZ ARMADA M.B., 2009. Delimitación de áreas de producción potencial de trufa negra (*Tuber melanosporum* Vitt.) en Navarra mediante GIS. Universidad Pública de Navarra. 157 pp.
- GRANETTI B., 1982. Aspecti scientifici, problemi organizzativi e legislative della tartuficoltura con particolare riferimento all'Umbria. *L'Observatore Agrario* 38, 1-8.
- GUISAN A., THULLER W., 2005. Predicting species distributions: offering more than simple habitat models. *Ecol Lett* 8, 993-1009.

- HIJMANS R.J., GRAHAM C.H., 2006. The ability of climate envelope models to predict the effect of climate change on species distributions. *Glob Change Biol* 12(12), 2272-2281.
- HIRZEL A.H., HAUSSER J., CHESSEL D., PERRIN N., 2002. Ecological-niche factor analysis: how to compute habitat-suitability maps without absence data? *Ecology* 83(7), 2027-2036.
- IPCC, 2007. Climate change 2007. Climate change impacts, adaptation and vulnerability. Working Group II contribution to the Intergovernmental Panel on Climate Change. Fourth assessment report.
- LE TACON F., DELMAS J., 1982. Influence du régime hydrique du sol et de la fertilisation sur la fructification de la truffe noire du Périgord (*Tuber melanosporum* Vitt.) dans le sud-est de la France. *Acta Oecologica* 3, 291-306.
- LEGENDRE P., LEGENDRE L., 1998. Numerical ecology. Elsevier Science BV Amsterdam. 853 pp.
- LOOMAN J., 1983. Distribution of plant-species and vegetation types in relation to climate. *Vegetatio* 54(1), 17-25.
- MEE R.W., 1990. Confidence-intervals for probabilities and tolerance regions based on a generalization of the Mann-Whitney statistic. *Journal of the American Statistical Association* 85(411), 793-800.
- MEZQUIDA E., RUBIO A., SÁNCHEZ PALOMARES O., 2010. Evaluation of the potential index model to predict habitat suitability of forest species: the potential distribution of mountain pine (*Pinus uncinata*) in the Iberian peninsula. *Eur J Forest Res* 129(1), 133-140. doi: 10.1007/s10342-009-0275-5.
- MOORE P.D., 2000. Plant ecology: alien invaders. *Nature* 403, 492-493.
- MURAT C., DÍEZ J., LUIS P., DELARUELLE C., DUPRÉ C., CHEVALIER G., BONFANTE P., MARTIN F., 2004. Polymorphism at the ribosomal DNA ITS and its relation to postglacial recolonization routes of the Perigord truffle *Tuber melanosporum*. *New Phytologist* 164, 401-411.
- OLIVIER J.M., SAVIGNAC J.C., SOUZART P., 2002. Truffe et trufficulture. Editions Fanlac, Paris.
- PETERSON R.G., DAWSON T.P., 2003. Predicting the impacts of climate change on the distribution of species: are bioclimate envelope models useful? *Global Ecology and Biogeography* 12(5), 361-371.
- PETERSON A.T., 2003. Predicting the geography of species' invasions via ecological niche modeling. *Quarterly Review of Biology* 78(4), 419-433.
- PETERSON A.T., ORTEGA-HUERTA M.A., BARTLEY J., SÁNCHEZ-CORDERO V., SOBERON J., BUDDEMEIER R.H., STOCKWELL D.R.B., 2002. Future projections for Mexican faunas under global climate change scenarios. *Nature* 416(6881), 626-629.
- PETERSON A.T., SÁNCHEZ-CORDERO V., MARTÍNEZ-MEYER E., NAVARRO-SIGÜENZA A.G., 2006. Tracking population extirpations via melding ecological niche modeling with land-cover information. *Ecol Model* 195(3-4), 229-236.
- PETERSON A.T., SÁNCHEZ-CORDERO V., SOBERÓN J., BARTLEY J., BUDDEMEIER R.W., NAVARRO-SIGÜENZA A.G., 2001. Effects of global climate change on geographic distributions of Mexican Cracidae. *Ecol Model* 144(1), 21-30.
- PETERSON A.T., VIEGLAIS D.A., 2001. Predicting species invasions using ecological niche modeling: new approaches from bioinformatics attack a pressing problem. *Bioscience* 51(5), 363-371.
- PHILLIPS S.J., ANDERSON R.P., SCHAPIRE R.E., 2006. Maximum entropy modeling of species geographic distributions. *Ecol Model* 190(3-4), 231-259.
- REYNA S. (ed), 2007. Truficultura. Fundamentos y técnicas. Mundi-Prensa, Madrid.
- RUBIO A., SÁNCHEZ PALOMARES O., 2006. Physiographic and climatic potential areas for *Fagus sylvatica* L. based on habitat suitability indicator models. *Forestry* 79(4), 439-451.
- RUIZ DE LA TORRE J., 1990-1999. Mapa forestal de España. Ministerio de Medio Ambiente, Madrid.
- SÁEZ R., DE MIGUEL A.M., 2008. La trufa. Guía de trufficultura. Instituto Técnico y de Gestión Agrícola, Estella, Navarra.
- SAMILS N., OLIVERA A., DANELL E., ALEXANDER S.J., FISCHER C., COLINAS C., 2008. The socioeconomic impact of truffle cultivation in rural Spain. *Economic Botany* 62(3), 331-340.
- SÁNCHEZ PALOMARES O., SÁNCHEZ SERRANO F., CARRETERO M.P., 1999. Modelos y cartografía de estimaciones climáticas termopluviométricas para la España peninsular. INIA, Madrid, España. 192 pp.
- SAS INSTITUTE I., 2002. SAS9 help and documentation. SAS Institute, Cary, NC.
- SCHMIDTLEIN S., EWALD J., 2003. Landscape patterns of indicator plants for soil acidity in the Bavarian Alps. *J Biogeogr* 30(10), 1493-1503.
- STOCKWELL D., PETERS D., 1999. The GARP modelling system: problems and solutions to automated spatial prediction. *International Journal of Geographic Information Science* 13, 143-158.
- SUÁREZ-SEOANE S., OSBORNE P.E., ALONSO J.C., 2002. Large-scale habitat selection by agricultural steppe birds in Spain: identifying species-habitat responses using generalized additive models. *Journal of Applied Ecology* 39(5), 755-771.
- THUILLER W., 2003. BIOMOD - optimizing predictions of species distributions and projecting potential future shifts under global change. *Glob Change Biol* 9(10), 1353-1362.
- THUILLER W., ARAÚJO M.B., LAVOREL S., 2004. Do we need landcover data to model species distributions in Europe? *J Biogeogr* 31(3), 353-361.
- TRIVEDI M.R., BERRY P.M., MORECROFT M.D., DAWSON T.P., 2008. Spatial scale affects bioclimate model projections of climate change impacts on mountain plants. *Glob Change Biol* 14(5), 1089-1103.
- WALTER H., LIETH H., 1960. Klimadiagramm weltatlas. Gustav Fischer, Jena. 253 pp.
- WANG Y., HALL I., 2004. Edible ectomycorrhizal mushrooms: challenges and achievements. *Can J Bot* 82, 1063-1073.

WOODWARD F.I., WILLIAMS B.G., 1987. Climate and plant-distribution at global and local scales. *Vegetatio* 69(1-3), 189-197.

WU H., SHARPE P.J.H., WALKER J., PENRIDGE L.K., 1985. Ecological field theory: a spatial analysis of resource interference among plants. *Ecol Model* 29, 215-243.

Anexo

El *alcance* debe tomar un valor tal que, con una sobrepredicción mínima, evite la aparición de *huecos* en el hiperespacio ecológico. Supongamos una situación ideal en las que las m observaciones se ubiquen ordenadamente en el espacio n -dimensional, de manera que sea más improbable que se produzcan huecos; esto será así cuanto más densidad de puntos haya, obviamente. Dos de las ordenaciones (empaquetamientos en terminología matemática) de puntos más compactas, en pocas dimensiones, son la cúbica y la tetraédrica. A más de ocho dimensiones no está demostrado cuál es el empaquetamiento más denso, pero es posible que no sea regular (Devlin, 1998). En todo caso, para nuestros objetivos resulta suficiente adoptar un criterio invariable para cualquier número de parámetros y de observaciones, por lo que consideraremos los dos empaquetamientos mencionados, el cúbico (EC) y el tetraédrico (ET).

Atendiendo a estas dos opciones, la disposición ideal (ideal en cuanto que sería más improbable que quedarán huecos) más «compacta» (y simple) sería que todas las m observaciones estuvieran ubicadas en alguno de los cuatro puntos a, b, c y d (EC, Fig. 4a, para dos dimensiones) o tres puntos a, b y c (ET, Fig. 4b)

más cercanos al punto O , que es el más alejado de las observaciones (dentro de la zona en la que se trata de evitar la presencia de huecos). Asumiendo que dichas observaciones están alejadas una distancia l unas de otras es inmediato calcular la distancia d desde cada

una de ellas al punto O : $\frac{l}{2}\sqrt{2}$ para EC y $\frac{l}{3}\sqrt{3}$ para

ET. Generalizando a n dimensiones se llega fácilmente a las siguientes expresiones:

$$d_{EC} = \frac{l}{2}\sqrt{n} \text{ y } d_{ET} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$$

Teniendo en cuenta que el valor umbral del potencial en un punto para que IPA no sea nulo es $1/m$ (Alonso Ponce *et al.*, 2010), es inmediato calcular b :

$$\frac{1}{m} \leq e^{-\left(\frac{d}{b}\right)^2}$$

Despejando:

$$b \geq \frac{d}{\sqrt{\ln m}}$$

Sustituyendo el valor de d para cada uno de los dos empaquetamientos:

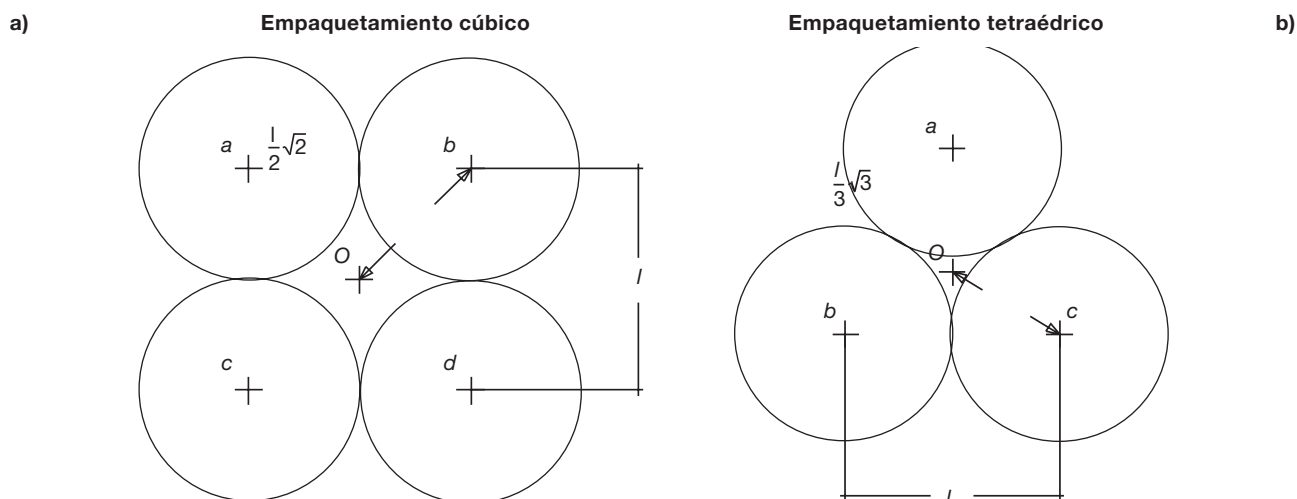


Figura 4. Esquema bidimensional de los dos empaquetamientos considerados (cúbico, izquierda; tetraédrico, derecha). Se muestra la distancia al punto de cálculo O desde las «observaciones» (puntos a, b, c y d) en función de la separación l entre estas últimas.

Tabla 5. Ámbito de existencia y comportamiento en el extremo de éste de las funciones que relacionan el alcance (b) con el número de observaciones (n) y de parámetros (m), para los dos tipos de empaquetamiento considerados (cúbico, EC, ecuación [1]; tetraédrico, ET, ecuación [2]).

Empaquetamiento cúbico		Empaquetamiento tetraédrico	
$b_{EC} \in [0, \infty) \in \mathfrak{R} , n \in (0, \infty) \in \aleph , m \in [1, \infty) \in \aleph$		$b_{ET} \in [0, \infty) \subset \mathfrak{R} , n \in (0, \infty) \subset \aleph , m \in [1, \infty) \subset \aleph$	
$\lim_{n \rightarrow 0} b_{EC} = 0$	$\lim_{m \rightarrow 1} b_{EC} = \infty$	$\lim_{n \rightarrow 0} b_{ET} = 0$	$\lim_{m \rightarrow 1} b_{ET} = \infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{EC} = \infty$	$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{EC} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{ET} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{2}{\ln m}}$	$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{ET} = 0$

$$b_{EC} \geq \frac{l}{2} \sqrt{\frac{n}{\ln m}} \tag{1}$$

$$b_{ET} \geq \frac{l}{2} \sqrt{\frac{2n}{(n+1) \ln m}} \tag{2}$$

Finalmente, se define l como

$$l = d_m + 2\sigma_d \tag{3}$$

Donde d_m es la distancia media de las observaciones al centro de gravedad y σ_d representa la desviación típica de dichas distancias. Aunque evidentemente existe cierto grado de arbitrariedad en la expresión [3], ésta es común para cualquier conjunto de datos para el que se calcule IPA y, además y más importante, el

cálculo de b depende exclusivamente de dichos datos (observaciones y parámetros)

Por último, la elección de un empaquetamiento u otro se apoya en el análisis de las características de las funciones [1] y [2] (Tabla 5). Como es natural, ambas se comportan de manera análoga: b crece cuando lo hace n y decrece cuando lo hace m . Sin embargo, hay una diferencia sustancial que resulta clave, y es que la función tetraédrica está acotada en n (ver Tabla 5 para la expresión de la asíntota), esto es, que cuando aumenta mucho el número de parámetros, b no aumenta indefinidamente, lo cual no parece deseable para los propósitos planteados. Así pues, se adopta la ecuación [1] (EC) para el cálculo del alcance y por extensión del IPA.