SOBRE UNA PROPIEDAD DE LOS NUMEROS REALES

por

FERNANDO L. GASPAR

Rosario

En un trabajo anterior (1) hemos demostrado que dados n números reales cualesquiera a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ existe un sistema de polinomios $\{P_n(x)\}$ ortogonales en el conjunto de puntos formado por dichos números. Estos polinomios pueden ser siempre escritos en forma de determinantes (2). Normalizando los polinomios en forma que el término de mayor grado tenga por coeficiente la unidad positiva, e introduciendo en el sistema, como suele hacerse, el elemento de rango 0, $P_0(x)=1$, se tiene:

$$P_0(x)=1;\ \ P_1(x)=\frac{-1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} 1 & x \\ m_0 & m_1 \end{vmatrix};$$

$$P_2(x)=\frac{(-1)^2}{\Delta_2}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix};\ \ldots;$$

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{\Delta_n}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \ldots & m_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \ldots & m_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad [1]$$

(1) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre una propiedad de las ecuaciones algebraicas con raíces reales*, en Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. VIII, págs. 81-90, Buenos Aires, 1942.

(2) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre la finitud de los sistemas de polinomios ortogonales en dominio discontinuo y la ley de recurrencia que los define*, en Revista de la Facultad de Ciencias Económicas, etc. 3ª serie, T. VIII, Nº 2, pág. 9, mayo-agosto de 1939, Rosario.

$\Delta_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ es el menor complementario de x^i último elemento de la primera fila de cada determinante.

Los elementos m_s de los determinantes — llamados también *momentos brutos* de los n números a_i — se definen así:

$$m_s = \sum_{i=1}^{n} a_i^s. \qquad [2]$$

Como se ve, el sistema $\{P_n(x)\}$, está ordenado según las potencias crecientes de x, pero este orden no es el que, necesariamente, se está obligado a adoptar. Pongamos un ejemplo:

Sea el conocido sistema de polinomios de Hermite $\{H_n(x)\}$ ortogonales en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ con la función de ponderación de Laplace-Gauss que, escrita en su *forma reducida*, es:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Los polinomios de Hermite se escriben en forma de determinante como en [1]. En este caso, los elementos de los determinantes son los momentos de dicha función de Laplace-Gauss. Designaremos estos momentos, como se acostumbra, por q_s y resulta:

$$q_{2n+1} = 0; \qquad q_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n \,.\, n!}$$

y también

$$q_{2n} = (2n-1)\,q_{2n-2}.$$

Adoptado como orden de formación, del sistema de Hermite, el de las potencias crecientes de x, impuesta la condición de que el término de mayor grado tenga por coeficiente la unidad positiva e introduciendo el $H_0(x)=1$, se tiene el conocido repertorio:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1\\
H_1(x) &= x\\
H_2(x) &= -1+x^2\\
H_3(x) &= -3x+x^3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

El índice indica, a la vez, el grado del polinomio y el rango que le corresponde en la sucesión.

Estos polinomios verifican, como se sabe, la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, H_n(x)\, H_m(x)\, dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m. \end{cases} \qquad [3]$$

Supongamos, ahora, que el orden de formación, en vez de ser el de las potencias crecientes de x, sea este otro:

$$x^3,\ x,\ x^2,\ x^4,\ x^7,\ x^5,\ x^6,\ x^8,\ \ldots$$

Llamando $h_n(x)$ al polinomio de rango n en el nuevo sistema de Hermite así ordenado, e introduciendo el elemento de rango 0, como antes se hizo, se tiene:

$$h_0(x) = x^3;\quad h_1(x) = \frac{-1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} x^3 & x \\ q_6 & q_4 \end{vmatrix};$$

$$h_2(x) = \frac{(-1)^2}{\Delta_2}\begin{vmatrix} x^3 & x & x^2 \\ q_6 & q_4 & q_5 \\ q_4 & q_2 & q_3 \end{vmatrix};\quad h_3(x) = \frac{(-1)^3}{\Delta_3}\begin{vmatrix} x^3 & x & x^2 & x^4 \\ q_6 & q_4 & q_5 & q_7 \\ q_4 & q_2 & q_3 & q_5 \\ q_5 & q_3 & q_4 & q_6 \end{vmatrix};\ \ldots$$

de donde el siguiente repertorio:

$$h_0(x) = x^3$$

$$h_1(x) = -0{,}2\, x^3 + x$$

$$h_2(x) = x^2$$

$$h_3(x) = -5\, x^2 + x^4$$

$$h_4(x) = -105\, x^3 + 210\, x + x^7$$

$$h_5(x) = -\frac{125}{23} x^3 + \frac{135}{23} x - \frac{1}{23} x^7 + x^5$$

....

y es inmediato constatar que los $h_n(x)$ verifican la misma propiedad de ortogonalidad de los $H_n(x)$ que expresa [3].

Como se pueden establecer infinitos ordenamientos distintos, existen, por tanto, infinitos sistemas ponderados de polinomios de Hermite ortogonales, en $(-\infty, +\infty)$, con la función de Laplace-Gauss como función de ponderación (3).

Se ve, también, la impropiedad de la definición de ortogonalidad que suele darse, diciendo que es nula la integral del producto de dos polinomios de distinto grado cuando, aún en el caso de una variable, expresándose con propiedad, debiera hablarse de *rango* y no de *grado*, pues puede darse el caso que sea nula la integral del producto de dos polinomios de igual grado. Tal ocurre, por ejemplo, con los $h_n(x)$ en los casos siguientes, entre otros:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h_0(x)\, h_1(x)\, dx = 0; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h_4(x)\, h_5(x)\, dx = 0$$

a pesar de que $h_0(x)$ y $h_1(x)$ son de tercer grado; $h_4(x)$ y $h_5(x)$ son de grado séptimo.

Ello se explica porque el polinomio de rango superior contiene todas las potencias de x del de rango inferior. Por tanto, la propiedad de ortogonalidad que expresa [3], es consecuencia de esta otra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h_n(x)\, x^p\, dx = 0$$

siempre que en el orden de formación escogido la potencia *p-ésima* de la variable sea de rango inferior a n; entonces la nulidad se constata, sencillísimamente escribiendo, en la integral anterior, $h_n(x)$ en forma de determinante y efectuando la integración. Resultará un determinante de orden $n+1$ cuya primera fila será igual a una de las n siguientes y, por tanto, nulo con lo cual se anula la integral.

Volviendo al sistema $\{P_n(x)\}$ definido en [1], supongamos que en vez de estar ordenado según las potencias crecientes de x, lo fuera de la siguiente manera:

$$x^p, \; x^q, \; x^r, \; x^s, \; \ldots, \; x^n$$

siendo $p, q, r, s, \ldots, n$ números naturales cualesquiera.

(3) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre la existencia de infinitos sistemas de polinomios de Hermite*, Rosario, 1945, donde el tema está tratado con más detalle y mayor generalidad.

Llamando $p_n(x)$ a los polinomios así ordenados, normalizándolos en forma de que el último término de cada polinomio tenga por coeficiente la unidad positiva e introduciendo, como antes, el elemento de rango 0, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0(x) = x^p; \quad p_1(x) = \frac{-1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} x^p & x^q \\ m_{2p} & m_{p+q} \end{vmatrix}; \\
&p_2(x) = \frac{(-1)^2}{\Delta_2}\begin{vmatrix} x^p & x^q & x^r \\ m_{2p} & m_{p+q} & m_{p+r} \\ m_{p+q} & m_{2q} & m_{q+r} \end{vmatrix}; \\
&p_3(x) = \frac{(-1)^3}{\Delta_3}\begin{vmatrix} x^p & x^q & x^r & x^s \\ m_{2p} & m_{p+q} & m_{p+r} & m_{p+s} \\ m_{p+q} & m_{2q} & m_{q+r} & m_{q+s} \\ m_{p+r} & m_{q+r} & m_{2r} & m_{r+s} \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad [4]$$

y así sucesivamente.

Se demuestra, fácilmente, que los menores complementarios del último término de estos polinomios son todos positivos o nulos (4), es decir,

$$\Delta i \geqq 0.$$

La nulidad puede producirse, en ciertos casos, por la ley

(4) Gaspar, Fernando L., *Sobre algunas series funcionales*, en Publicaciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. Nº 10, pág. 33, Rosario, 1937. Esta propiedad resulta también simplemente observando que cualquier determinante

$$\begin{vmatrix} m_{2p} & m_{p+q} & m_{p+r} & \cdots \\ m_{p+q} & m_{2q} & m_{q+r} & \cdots \\ m_{p+r} & m_{q+r} & m_{2r} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

es el cuadrado de una matriz rectangular (o, en particular, cuadrada):

$$\begin{Vmatrix} a_1^p & a_2^p & \cdots\cdots & a_n^p \\ a_1^q & a_2^q & \cdots\cdots & a_n^q \\ a_1^r & a_2^r & \cdots\cdots & a_n^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

de recurrencia a que obedecen los elementos m_s de los determinantes (5).

Se tiene, por tanto,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{2p} & m_{p+q} \\ m_{p+q} & m_{2q} \end{vmatrix} = m_{2p}\, m_{2q} - (m_{p+q})^2 \geqq 0$$

de donde, la desigualdad

$$m_{2p}\, m_{2q} \geqq (m_{p+q})^2 \qquad [5]$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_{2p} & m_{p+q} & m_{p+r} \\ m_{p+q} & m_{2q} & m_{q+r} \\ m_{p+r} & m_{q+r} & m_{2r} \end{vmatrix} = m_{2p}\, m_{2q}\, m_{2r} + 2 m_{p+q}\, m_{q+r}\, m_{p+r} -$$
$$[(m_{p+r})^2\, m_{2q} + (m_{p+q})^2\, m_{2r} + (m_{q+r})^2\, m_{2p}] \geqq 0$$

de donde:

$$m_{2p}\, m_{2q}\, m_{2r} + 2\, m_{p+q}\, m_{q+r}\, m_{p+r} \geqq$$
$$(m_{p+r})^2\, m_{2q} + (m_{p+q})^2\, m_{2r} + (m_{q+r})^2\, m_{2p}. \qquad [6]$$

En el caso particular de que sea $p = 0$, $q = 1$, o recíprocamente, resulta la conocida desigualdad

$$m_0\, m_2 \geqq m_1{}^2 \qquad [7]$$

que es, pues, sólo un caso particular de la [5]. Así podría seguirse.

Puesto que los a_i son números reales cualesquiera, p, q, r, s, números naturales cualesquiera, las desigualdades [5] y [6], así como todas las que por análogo procedimiento pueden determinarse, expresan una propiedad que subsiste, sean cuales fueren los números a_i.

Hasta ahora hemos considerado conjuntos finitos de números reales cuyos elementos están formados por un solo número real.

(5) GASPAR, FERNANDO L., Op. cit. (2), pág. 17.

En el caso de tratarse de conjuntos finitos de números reales cuyos elementos fueran pares de números, habría que considerar polinomios de dos variables ortogonales en el conjunto de puntos definido por dichos pares de números.

Fué, precisamente, en el estudio de la ortogonalidad al pasar al caso de dos variables, que se nos presentó, de manera natural, la cuestión de la ordenación del sistema, pues los polinomios se podían ordenar según las potencias crecientes de x, es decir, según este cuadro:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & \swarrow & x & \swarrow & x^2 & \swarrow & x^3 & \swarrow & x^4 & \swarrow & x^5 & \swarrow & x^6 & \swarrow & x^7 \;\ldots \\
y & \swarrow & xy & \swarrow & x^2y & \swarrow & x^3y & \swarrow & x^4y & \swarrow & x^5y & \swarrow & x^6y & & x^7y \;\ldots \\
y^2 & \swarrow & xy^2 & \swarrow & x^2y^2 & \swarrow & x^3y^2 & \swarrow & x^4y^2 & \swarrow & x^5y^2 & & x^6y^2 & & x^7y^2 \ldots \\
y^3 & \swarrow & xy^3 & \swarrow & x^2y^3 & \swarrow & x^3y^3 & \swarrow & x^4y^3 & & x^5y^3 & & x^6y^3 & & x^7y^3 \ldots \\
y^4 & \swarrow & xy^4 & \swarrow & x^2y^4 & \swarrow & x^3y^4 & & x^4y^4 & & x^5y^4 & & x^6y^4 & & x^7y^4 \ldots \\
y^5 & \swarrow & xy^5 & \swarrow & x^2y^5 & & x^3y^5 & & x^4y^5 & & x^5y^5 & & x^6y^5 & & x^7y^5 \ldots \\
y^6 & \swarrow & xy^6 & & x^2y^6 & & x^3y^6 & & x^4y^6 & & x^5y^6 & & x^6y^6 & & x^7y^6 \ldots \\
y^7 & & xy^7 & & x^2y^7 & & x^3y^7 & & x^4y^7 & & x^5y^7 & & x^6y^7 & & x^7y^7 \ldots \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & . & & . \;\ldots \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & . & & . \;\ldots \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & . & & . \;\ldots
\end{array}
$$

o, inversamente, según las potencias crecientes de y, o según este otro cuadro:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & x & & x^2 & & x^3 & & x^4 & & x^5 \;\ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y & \leftarrow & xy & & x^2y & & x^3y & & x^4y & & x^5y \;\ldots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y^2 & \leftarrow & xy^2 & \leftarrow & x^2y^2 & & x^3y^2 & & x^4y^2 & & x^5y^2 \ldots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y^3 & \leftarrow & xy^3 & \leftarrow & x^2y^3 & \leftarrow & x^3y^3 & & x^4y^3 & & x^5y^3 \ldots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
y^4 & \leftarrow & xy^4 & \leftarrow & x^2y^4 & \leftarrow & x^3y^4 & \leftarrow & x^4y^4 & & x^5y^4 \ldots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow \\
y^5 & \leftarrow & xy^5 & \leftarrow & x^2y^5 & \leftarrow & x^3y^5 & \leftarrow & x^4y^5 & \leftarrow & x^5y^5 \ldots
\end{array}
$$

Lo mismo se hubiera podido adoptar cualquier otra ordenación.

Estos polinomios de dos variables, ortogonales en un conjunto discreto de puntos del plano, están estudiados en otro trabajo nuestro, al que nos remitimos para abreviar esta exposición [6]. Adoptado como orden de formación el de las potencias crecientes de x, siendo

$$\frac{(m+n+1)(m+n)+2(n+1)}{2}=N \qquad (N=\text{número natural})$$

el número de pares de números $a_i\, b_i$ dados, existe un sistema ortogonal $\{V_{r,s}(x,y)\}$ y un polinomio de grado $m+n$ perteneciente al sistema que contiene las potencias x^m, y^n y todas las anteriores. Impuesta, como antes, la condición de que el último término del polinomio tenga por coeficiente la unidad positiva y escrito en forma de determinante, un polinomio genérico $V_{r,s}(x,y)$ se expresa así:

$$V_{r,s}(x,y)=\frac{(-1)^{s+\sum\limits_{v=1}^{r+s} v}}{\Delta_{r,s}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & \ldots\, x^{r+1}\,y^{s-1} & x^r\,y^s \\ m_{0,0} & m_{1,0} & m_{0,1} & \ldots\, m_{r+1,\,s-1} & m_{r,s} \\ m_{1,0} & m_{2,0} & m_{1,1} & \ldots\, m_{r+2,\,s-1} & m_{r+1,\,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ m_{r+1,\,s-1} & m_{r+2,\,s-1} & m_{r+1,\,s} & \ldots\, m_{2(r+1),\,2(s-1)} & m_{2r+1,\,2s-1} \end{vmatrix} \qquad [8]$$

El índice r,s indica el grado del último término del polinomio.

Si en vez de ordenar según las potencias crecientes de x, como lo hemos hecho, se lo efectuara en un orden cualquiera, como ser este:

$$x^m\,y^n,\;\; x^p\,y^q,\;\; x^r\,y^s,\;\; x^t\,y^u,\;\; \ldots,\;\; x^v\,y^z$$

designando los polinomios así ordenados por $V_n(x,y)$, en que

(6) GASPAR, FERNANDO L., *La interpolación en el caso de varias variables*, obras editadas por la Facultad de Ciencias Económicas, etc. T. I, Vol. II, Rosario, 1938.

el índice indica, ahora, el número de orden del polinomio en la sucesión, resulta, normalizándolos igual que antes e introduciendo el elemento de rango 0:

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = x^m y^n; \quad V_1(x,y) = \frac{-1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} x^m y^n & x^p y^q \\ m_{2m,2n} & m_{m+p,n+q}\end{vmatrix}; \\ &V_2(x,y) = \frac{(-1)^2}{\Delta_2}\begin{vmatrix} x^m y^n & x^p y^q & x^r y^s \\ m_{2m,2n} & m_{m+p,n+q} & m_{m+r,n+s} \\ m_{m+p,n+q} & m_{2p,2q} & m_{p+r,q+s}\end{vmatrix} \\ &V_3(x,y) = \frac{(-1)^3}{\Delta_3}\begin{vmatrix} x^m y^n & x^p y^q & x^r y^s & x^t y^u \\ m_{2m,2n} & m_{m+p,n+q} & m_{m+r,n+s} & m_{m+t,n+u} \\ m_{m+p,n+q} & m_{2p,2q} & m_{p+r,q+s} & m_{p+t,q+u} \\ m_{m+r,n+s} & m_{p+r,q+s} & m_{2r,2s} & m_{r+t,s+u}\end{vmatrix}; \ \ldots \end{aligned}\right\} [9]$$

Los elementos de los determinantes se definen, ahora, así:

$$m_{p,q} = \sum_i \sum_j a_i{}^p b_j{}^q.$$

Se demuestra que todos los Δ tienen el mismo signo y al ser $\Delta_1 = m_{2m,2n} > 0$ por ser la suma del producto de potencias pares, resulta que todos los Δ son positivos.

En particular es:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{2m,2n} & m_{m+p,n+q} \\ m_{m+p,n+q} & m_{2p,2q}\end{vmatrix} = m_{2m,2n}\, m_{2p,2q} - (m_{m+p,n+q})^2 \geqq 0$$

de donde:

$$m_{2m,2n}\, m_{2p,2q} \geqq (m_{m+p,n+q})^2 \qquad [10]$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_{2m,2n} & m_{m+p,n+q} & m_{m+r,n+s} \\ m_{m+p,n+q} & m_{2p,2q} & m_{p+r,q+s} \\ m_{m+r,n+s} & m_{p+r,q+s} & m_{2r,2s}\end{vmatrix} =$$

$$= m_{2m,2n}\, m_{2p,2q}\, m_{2r,2s} + 2 m_{m+p,n+q}\, m_{p+r,q+s}\, m_{m+r,n+s} - [(m_{m+r,n+s})^2 m_{2p,2q} + (m_{m+p,n+q})^2 m_{2r,2s} + (m_{p+r,q+s})^2 m_{2m,2n}] \geqq 0$$

de donde:

$$m_{2m,\,2n}\, m_{2p,\,2q}\, m_{2r,\,2s} + 2m_{m+p,\,n+q}\, m_{p+r,\,q+s}\, m_{m+r,\,n+s} \geqq$$

$$(m_{m+r,\,n+s})^2\, m_{2p,\,2q} + (m_{m+p,\,n+q})^2\, m_{2r,\,2s}$$

$$+ (m_{p+r,\,q+s})^2\, m_{2m,\,2n} \qquad [11]$$

y así podría seguirse.

Las [10] y [11] son desigualdades para conjuntos de pares de números reales cualesquiera, análogas a las [5] y [6]. En particular, si se ordena por las potencias crecientes de x resultará en [10], $m=0$, $n=0$; $p=1$, $q=0$ (o $p=0$, $q=1$ si se ordena por las potencias crecientes de y) y se obtiene:

o bien
$$\left.\begin{array}{l} m_{0,0}\, m_{2,0} \geqq (m_{1,0})^2 \\ m_{0,0}\, m_{0,2} \geqq (m_{0,1})^2 \end{array}\right\} \qquad [12]$$

desigualdades para conjuntos de pares de números reales análogas a la [7].

Se ve pues, que el desarrollo de los Δ da lugar a una sucesión de desigualdades que verifican los conjuntos finitos de pares de números reales, desigualdades que subsisten para todo conjunto de pares de número $a_i\, b_i$ pues, sean ellos cuales fueren, la propiedad, siempre, se cumple.

De manera análoga se procedería con conjuntos de números reales cuyos elementos fueran ternas, cuaternas, etc., de números.

Surge, sin más, que es innecesario imponer a los conjuntos la restricción de que sus elementos tengan todos el mismo número de números reales.

Si se tuviera, por ejemplo, este conjunto:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1, b_1 \\ a_2 \\ a_3, b_3, c_3 \\ c_4 \end{array}\right.$$

al ser:

$$a_2{}^p = a_2{}^p \,.\, 1^q \,.\, 1^r$$

siendo p, q y r números naturales cualesquiera, a los efectos de nuestra teoría, el conjunto anterior es igual a este otro:

$$\begin{cases} a_1, b_1, 1 \\ a_2,\ 1,\ 1 \\ a_3,\ b_3,\ c_3 \\ 1,\ 1,\ c_4 \end{cases}$$

y resulta:

$$m_{p,\,q,\,r} = \sum_{k=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_i{}^p\, b_j{}^q\, c_k{}^r$$

donde se ha tomado:

$$c_1 = b_2 = c_2 = a_4 = b_4 = 1.$$

Entonces, dado un conjunto finito cualquiera de números reales cuyos elementos sean, a su vez, conjuntos finitos de números, es necesario considerar el elemento que tenga mayor número de números. Sea, por ejemplo, n dicho número; bastará, entonces, adoptar un orden de formación correspondiente a un sistema ortogonal de n variables, formar los determinantes Δ análogos a los menores de los últimos términos de [9]. De los desarrollos de estos Δ se obtendrá una sucesión de desigualdades que, sean cuales fueren estos números, siempre se verifican.

Con lo expuesto se ha demostrado, por lo tanto, una propiedad muy general de los números reales.

Pasando del campo discreto al continuo, se demuestra, de igual manera, que las mismas desigualdades verifican los momentos de las funciones de probabilidad de n variables ($n = 1$, $2, \ldots, n$), considerándose como tales las funciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq 0$, definidas en un dominio D — finito o infinito — de un espacio de n dimensiones tales que sea:

$$\iint_{\cdots}^{(n)} \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1$$

y existan los números:

$$\mu_{p,q,\ldots,r}^{(n)} =$$

$$\iint_{\ldots}^{(n)} \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\; x_1{}^p \,.\, x_2{}^q \ldots x_n{}^r \; dx_1 \; dx_2 \,.\,.\,, \; dx_n$$

y *a fortiori*, también verifican la propiedad los números

$$M_{p,q\ldots,r}^{(n)} = \iint_{\ldots}^{(n)} \int_D x_1{}^p \,.\, x_2{}^q \ldots x_n{}^r \; dx_1 \; dx_2 \ldots dx_n$$

pero, en este caso, D debe, necesariamente, ser un dominio finito (7) de un espacio de n dimensiones.

(7) GASPAR, FERNANDO L., *La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermite*, en Anales de la Sociedad Científica Argentina, T. CXXIV, E. III, pág. 10, Buenos Aires, 1937.