SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DONT LES VALEURS COUVRENT UN DOMAINE D'AIRE BORNEE

par

PAUL MONTEL
Université de Paris

1. - La répartition en familles des fonctions analytiques peut donner lieu, pour chacune de ces familles, à un groupe de théorèmes énonçant des propriétés semblables et formant ce qu'on est convenu d'appeler un cycle. Le plus connu est le cycle de Picard relatif aux familles de fonctions holomorphes ne prenant jamais deux valeurs exceptionnelles fixes, 0 et 1 par exemple, que nous appellerons familles de Picard. Les théorèmes fondamentaux du cycle de Picard sont:

a) un *théorème d'impossibilité,* dû à E. Picard: il est impossible qu'une fonction holomorphe autour d'un point singulier essentiel isolé ne prenne pas deux valeurs exceptionnelles dans le voisinage de ce point.

b) un *théorème de limitation,* dû à Schottky: toute fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$ où elle admet deux valeurs exceptionnelles fixes 0 et 1, telle que $f(0)=a_0$, a un module borné par un nombre $\Omega(a^0, r)$, ne dépendant que de a_0 et de r pour les valeurs z du cercle $|z|\leqq r<1$.

c) un *théorème d'extension,* dû à Landau: soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z|<R$ où elle admet deux valeurs exceptionnelles fixes 0 et 1, telle que $f(0)=a_0$, $f'(0)=a_1 \neq 0$; le nombre R ne peut dépasser une valeur $R_0(a_0, a_1)$ ne dépendant que de a_0 et a_1.

Ces théorèmes et d'autres qui leur sont liés résultent du fait que toute famille de Picard est une famille normale. On les retrouvera pour toutes les familles normales dont le critère de normalité ne fait intervenir que les valeurs de chaque fonction de la famille et on peut en donner des démonstrations, du point de vue qualitatif, indépendantes de la nature de ce critère. Mais, au point de vue quantitatif, ce critère intervient pour la détermination des constantes telles que $\Omega(a_0, r)$ ou $R_0(a_0, a_1)$.

Dans le cas des familles de Picard, ces constantes sont déterminées au moyen de la fonction modulaire. Pour d'autres familles normales, leur détermination fait appel à des fonctions élémentaires. Il en est ainsi par exemple pour les familles de fonctions bornées dans un domaine que l'on peut appeler famille de Liouville. Il en est encore ainsi pour les familles des fonctions dont les valeurs couvrent un domaine dont l'aire est bornée, sans que ces domaines eux-mêmes soient bornés.

2.- Soit donc $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine (D). Les points représentatifs des valeurs $Z = f(z)$ couvrent une ou plusieurs fois un domaine dont nous désignerons l'aire totale par $S(f)$ ou S; l'expressión «aire totale» signifiant que chaque élément du domaine couvert est compté autant de fois qu'il est recouvert. Si l'on représente les valeurs Z sur différants feuillets plans superposés au plans Z, on peut dire encore que S désigne l'aire couverte sur tous ces feuillets. On sait que $S(f) = \iint |f'(z)|^2 \, d\sigma$, $d\sigma$ désignant l'élément d'aire du plan Z.

Lorsque le domaine (D) est le cercle $|z| \leqq r$, la fonction étant holomorphe dans la région (D), c'est-à-dire dans le domaine fermé, on a

$$S = \pi r^2 (|a_1|^2 + 2|a_2|^2 r^2 + \ldots + n|a_n|^2 r^{2n-2} + \ldots) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n},$$

si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Considérons les fonctions holomorphes dans un domaine (D), telles que l'aire $S(f)$ soit inférieure ou égale à la valeur fixe $\pi \rho^2$. Je dis que la famille de ces fonctions est normale dans le domaine (D), c'est-à-dire dans tout domaine (D') complètement intérieur à (D). Soit en effet z_0 un point de (D') et r, un nombre fixe inférieur à la distance de (D') à la frontière de (D); l'aire totale couverte par $f(z)$, lorsque z décrit le cercle $|z - z_0| \leqq r$, est supérieure à $\pi |f'(z_0)| r^2$ et inférieure à $\pi \rho^2$. Donc,

$$|f'(z_0)| < \frac{\rho}{r},$$

et la famille des fonctions $f'(z)$ est bornée, donc normale dans (D'). Il en est de même de la famille $f(z)$: soit en effet α un point fixe interieur à (D'); on a, dans un petit cercle (γ) de centre α et de rayon r,

$$f(z) - f(\alpha) = \int_\alpha^z f'(z)\, dz,$$

d'où

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq \rho,$$

si l'on intègre le long du rayon. La famille $f(z) - f(\alpha)$ est donc normale dans (γ), puisqu'elle est bornée. Soit une suite $f_n(z)$ de fonctions de la famille. De la suite $f_n(z) - f_n(\alpha)$, on peut extraire une suite partielle convergente $f_{n'}(z) - f_{n'}(\alpha)$; de la suite $f_{n'}(\alpha)$, on peut extraire une suite partielle $f_{n''}(\alpha)$ ayant pour limite une valeur finie ou infinie A. Or, $f_{n''}(Z) - f_{n''}(\alpha)$ a pour limite, comme $f_{n'}(z) - f_{n'}(\alpha)$, une fonction finie $g(z)$; donc la suite $f_{n''}(z)$ a pour limite $g(z) + A$, fonction holomorphe finie ou identique à la constante infinie, suivant que A est fini ou non. La famille $f(z)$ est donc normale au point α arbitraire dans (D), elle est donc normale dans l'intérieur de (D), d'après un théorème connu(1).

Nous pouvons donc énoncer la proposition fondamentale suivante: *Les fonctions holomorphes dans un domaine* (D) *dont les valeurs couvrent des domaines d'aires bornées par un nombre fixe forment une famille normale dans l'intérieur du domaine* (D).

3. - Nous en déduirons d'abord un théorème d'impossibilité: L'aire couverte par les valeurs d'une fonction entière est infinie. En effet, dans le cas contraire, en chaque point z_0 du plan, on aurait

(1) Paul Montel, *Sur les familles des fonctions analytiques, qui admettent des valeurs excepcionnelles dans un domaine*. Annales Ec. Normale (3) 29-1912.

$$|f'(z_0)| < \frac{\rho}{r},$$

r désignant une longueur arbitraire et $\pi\rho^2$ designant la limite superieure de l'aire. En faisant croître r indéfiniment, on voit que $f'(z_0)$ est nul et, comme z_0 est arbitraire, $f(z)$ est une constante.

On peut préciser cette proposition comme dans les familles de Picard. Les fonctions $f_n(z) = f(2^n z)$, holomorphes dans le cercle $|z| \leqq 1$, ne peuvent former une famille normale si $f(z)$ est une fonction entière non constante. Il y a donc dans le cercle-unité des points où la famille n'est pas normale. Comme aucun de ces points ne peut être isolé, il en existe une infinité. Soit ω l'un d'eux, distinct de l'origine 0. Dans un cercle (γ) de centre ω et de rayon arbitrairement petit, les aires couvertes par les fonctions $f_n(z)$ augmentent indéfiniment d'après notre théorème fondamental. Or, les valeurs prises par $f_n(z)$, lorsque z est dans (γ), sont les valeurs prises par $f(z)$ dans le cercle homothétique de (γ) dans le rapport 2^n, le centre d'homothétie étant à l'origine 0. Menons la demidroite $0\,\omega$ ou Δ: dans tout angle, si petit soit-il, bissecté par Δ, l'aire couverte par les valeurs de $f(z)$ est infinie.

Examinons maintenant le cas d'une fonction holomorphe $f(z)$ autour d'un point singulier essentiel isolé que l'on peut supposer placé à l'origine 0. Supposons que les valeurs de $f(z)$, lorsque z est voisin de l'origine, couvrent un domaine dont l'aire ne dépasse pas $\pi\rho^2$. Traçons un cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans la région considérée pour z et soit z_0 un point du cercle concentrique de rayon $\frac{2}{3}R$. Dans un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon $\frac{1}{2}|z_0|$, les valeurs prises par $f(z)$ couvrent une aire ne dépassant pas $\pi\rho^2$. Donc

$$|z_0 f'(z_0)| \leqq 2\rho.$$

Il résulte de celà que la fonction $zf'(z)$, bornée autour de l'origine, régulière en ce point. On a donc, pour z voisin de zéro,

$$f'(z) = \frac{C_0}{z} + C_1 + C_2 z + \ldots$$

d'où

$$f(z) = C_0 \log z + C + C_1 z + \ldots,$$

et, comme $f(z)$ est uniforme, $C_0 = 0$. L'origine ne serait donc pas un point singulier pour $f(z)$.

En résumé: *Dans le voisinage d'un point essentiel isolé, toute fonction holomorphe prend des valeurs couvrant un domaine d'aire infinie.*

On démontrerait aisément, comme ci-dessus, l'existence de demi-droites Δ issues de 0 possédant la proprieté énoncée précédemment. Il suffit de considérer la famille des fonctions $f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$, pour n assez grand, z variant dans l'anneau

$$\frac{1}{2} \leqq z \leqq 2.$$

4. - Passons au théorème de limitation. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, prenant à l'origine la valeur a_0. Supposons que les valeurs de $f(z)$ dans le cercle-unité couvrent un domaine dont l'aire totale ne dépasse pas $\pi \rho^2$. Il résulte de la théorie des familles normales que l'on a

$$|f(z)| < \Omega(a_0, r) \qquad |z| \leqq r \leqq 1.$$

Proposons-nous de déterminer la valeur exacte de Ω. On peut écrire

$$(1) \quad |f(z) - a_0| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \leqq \left[\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

en utilisant l'identité de Lagrange. La première somme dans le terme entre crochets est inféreure ou égale à ρ^2, car d'après l'hypothèse

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n} \leqq \rho^2$$

et la somme du premier membre croît avec r. Quant à la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} = \frac{r^2}{1} + \frac{r^4}{2} + \ldots + \frac{r^{2n}}{n} + \ldots,$$

elle est égale à $\log \frac{1}{1-r^2}$. Donc,

$$|f(z)| \leqq |a_0| + \rho \sqrt{\log \frac{1}{1-r^2}}. \tag{2}$$

Pour que ce maximum soit atteint il faut que toutes les inégalités (1) et (2) se transforment en égalités. Pour l'identité de Lagrange, il faut et il suffit que

$$\sqrt{n}|a_n| = \lambda \frac{r^n}{\sqrt{n}}, \quad |a_n| = \lambda \frac{r^n}{n};$$

et pour l'inégalité qui la precède, il faut que tous les a_n aient le même argument. Donc

$$a_n = \lambda e^{i\varphi} \frac{r^n}{n}.$$

Il faut en outre que l'aire couverte par les valeurs de la fonction dans le cercle-unité soit ρ^2, d'où

$$\Sigma n \lambda^2 \frac{r^{2n}}{n^2} = \lambda^2 \log \frac{1}{1-r^2} = \rho^2$$

et

$$= \lambda \frac{\rho}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r^2}}}.$$

$f - a_0$ a pour argument φ; comme

$$|f(z)| \leqq |a_0| + |f - a_0|,$$

il faut, pour l'égalité que φ soit l'argument de a_0.

On obtient finalment la fonction

$$f_0(z)=a_0+\lambda e^{i\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(rz)^n}{n}=a_0+\lambda e^{i\varphi}\log\frac{1}{1-rz},$$

$$f_0(z)=e^{i\varphi}\left[|a_0|+\frac{\rho}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r^2}}}\log\frac{1}{1-rz}\right],$$

$$(a_0=|a_0|e^{i\varphi}).$$

On vérifie que

$$|f_0(r)|=|a_0|+\rho\sqrt{\log\frac{1}{1-r^2}}\,.$$

Le second membre représente bien la valeur exacte de $\Omega\,(a_0,r)$.

5.-Un théorème d'extension se déduit aisement des résultats précédents. Soit

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots$$

le développement en série de Mac-Laurin d'une fonction holomorphe pour $|z|<R$ et vérifiant l'inégalité $S(f)\leqq\pi\rho^2$. Les coefficients a_0 et a_1 sont donnés et a_1 est différent de zéro.

On a, comme on l'a vu au paragraphe 2,

$$|a_1|<\frac{\rho}{R},$$

donc

$$R<\frac{\rho}{|a_1|}=R_0.$$

Cette limitation est exacte, car elle est atteinte pour la fonction

$$f_1(z)=a_0+a_1z.$$

On a, en effet, pour $|z| \leqq R_0$,

$$S[f_1] = |a_1|^2 \pi R_0^2 = \pi \rho^2;$$

de même, si on fixe les coefficients a_0 et $a_p \neq 0$, on a

$$\pi p |a_p|^2 R^{2p} \leqq S[f] \leqq \pi \rho^2$$

d'où

$$R \leqq p \sqrt[p]{\frac{\rho}{p^{1/2} |a_p|}} = R_p.$$

Cette limite est atteinte pour la fonction

$$f_p(z) = a_0 + a_p z^p;$$

en effet, lorsque z décrit le cercle $|z| \leqq R_p$, le point $f_p(z)$, recouvre p fois le cercle de centre l'origine et de rayon $|a_p| R_p{}^p$ et l'on a

$$S[f_p] = p \pi |a_p|^2 R_p{}^{2p} = \pi \rho^2.$$

La condition $a_1 \neq 0$, ou $a_p \neq 0$ exprime que la fonction $f(z)$ ne peut être une constante. Toute autre condition entraînant la même conséquence donnera lieu à un théorème d'extension de même nature. Supposons par exemple que l'on ait

$$f(0) = a_0, \quad f(\alpha) = C_0, \quad (C_0 \neq a_0),$$

α designant un nombre fixe que l'on peut supposer réel et positif, $f(z)$ ne peut être constante: il existe une limite supérieure pour le rayon R du cercle $|z| < R$ dans lequel la fonction est holomorphe et satisfait à la condition $S(f) \leqq \pi \rho^2$.

En effet, l'inégalité (1), dans laquelle on fait $z = \alpha$ donne

$$|C_0 - a_0| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \alpha^n \leqq \left[\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\alpha^{2n}}{R^{2n}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$|C_0 - a_0| \leqq \rho \sqrt{\log \frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{R^2}}},$$

d'où

$$R \leqq \frac{\alpha}{\sqrt{1-e^{-|C_0-a_0|^2:\rho^2}}} = R_\alpha;$$

on voit que $R_\alpha > \alpha$. Cette limite est exacte et se trouve atteinte par la fonction

$$f_\alpha(z) = a_0 + e^{i\varphi}\rho \ \log \frac{1}{1-\frac{\alpha z}{R_\alpha^2}} : \sqrt{\log \frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{R_\alpha^2}}}$$

φ désignant l'argument de $C_0 - a_0$, fonction que l'on détermine en suivant même marche que pour le calcul de $f_0(z)$ au paragraphe précédent.

Supposons que α tende vers zéro, ainsi que $C_0 - a_0$; le quotient $\frac{C_0-a_0}{\alpha}$ a pour limite $f'(0) = a_1$ et l'argument de α devient celui de a_1. Cherchons les limites de R_α et de $f_\alpha(z)$. On peut écrire

$$R_\alpha = \frac{\alpha}{\frac{|C_0-a_0|}{\rho}(1+\varepsilon)}$$

ε désignant un infiniment petit avec α. Donc

$$\lim_{\alpha=0} R_\alpha = \frac{\rho}{|a_1|} = R_0.$$

De même,

$$\lim_{\alpha=0} f_\alpha(z) = a_0 + e^{i\varphi}\,\rho\, \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha z}{R_\alpha{}^2} : \frac{\alpha}{R_\alpha} = a_0 + \rho \frac{a_1}{|a_1|}\frac{z}{R_0} = a_0 + a_1 z.$$

6. - Lorsque des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) appartiennent à une famille normale dans l'interieur

de (D) et prennent en un point fixe du domaine une même valeur ou des valeurs de modules bornés, ces fonctions sont uniformément bornées en module dans tout domaine intérieur à (D) par un nombre Ω ne dépendant que du domaine et de la valeur au point fixe ou de la borne supérieure des modules des valeurs en ce point fixe. Nous avons déterminé Ω dans le cas oú le domaine (D) est le cercle-unité, le point fixe, le centre de ce cercle, et la famille normale constituée par les fonctions $f(z)$ pour lesquelles $S(f)$ est bornée pour le cercle-unité.

Mais la conclusion s'applique aussi à toutes les derivées de la fonction $f(z)$. En d'autres termes, si $f(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$ et si

$$f(0)=a_0, \quad S(f)\leqq \pi \rho^2$$

on a

$$|f^{(p)}(z)|\leqq \Omega_p(a_0, r) \quad (|z|\leqq r<1).$$

Nous allons voir qu'il est possible de trouver la valeur exacte de $\Omega_p(a_0, r)$. Si l'on remarque que les valeurs des dérivées et celle de l'aire couverte ne dépendent pas de a_0 et que, d'ailleurs, la limitation supérieure de cette aire entraîne le fait que toutes les dérivées sont bornées, on voit que les nombres Ω_p ne dépendront pas de a_0.

On a

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\, a_n z^{n-p};$$

$$|f^{(p)}(z)|\leqq \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\,|a_n|\, r^{n-p}\leqq \tag{3}$$

$$[\sum_{n=p}^{\infty} n|a_n|^2 . \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)^2\ldots(n-p+1)^2\, r^{2n-2p}]^{1/2}$$

Or

$$\sum_{n=p}^{\infty} n|a_n|^2\leqq \rho^2.$$

Soit

$$\sum_{\mu n=p}^{\infty} n(n-1)^2 \dots (n-p+1)^2 \, r^{2n-2p} = M_p.$$

Partons de

$$\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) \, u^{n-p} = \frac{p!}{(1-u)^{p+1}};$$

on en tire

$$\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)^2 \dots (n-p+1)^2 \, u^{n-p} = \frac{d^{p-1}}{du^{p-1}} \cdot \frac{p! \, u^{p-1}}{(1-u)^{p+1}}.$$

Donc, en posant $u = r^2$,

$$M_p = p! \, \frac{d^{p-1}}{du^{p-1}} \, \frac{u^{p-1}}{(1-u)^{p+1}} = \frac{d^{p-1}}{du^{p-1}} \, u^{p-1} \, \frac{d^{p+1}}{du^{p+1}} \left(\log \frac{1}{1-u}\right).$$

Le maximum est atteint lorsque toutes les inégalités (3) deviennent des identités. Cela exige d'abord

$$|a_n| = \lambda n \, (n-1) \dots (n-p+1) \, r^{n-p} \qquad (n \geqq p),$$

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n = \lambda \, e^{i\varphi} \sum_{n=p}^{\infty} n \, (n-1) \dots (n-p+1) \, r^{n-p} z^n = \lambda \, e^{i\varphi} \, \frac{\partial^p}{\partial r^p} \left(\log \frac{1}{1-rz}\right).$$

On doit avoir en outre

$$\sum_{n=p}^{\infty} n |a_n|^2 = \rho^2$$

ce qui entraîne $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = 0$ et

$$\lambda^2 \sum n(n-1)^2 \dots (n-p+1)^2 \, r^{2n-2p} = \lambda^2 M_p = \rho^2,$$

d'où $\lambda = \dfrac{\rho}{\sqrt{M_p}}$. On en déduit la fonction pour laquelle $f_p(z)$ atteint sa limite supérieure

$$f_p(z) = a_0 + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{M_p}} \, \frac{\partial^p}{\partial r^p} \left(\log \frac{1}{1-rz}\right)$$

ou

$$f_p(z)=a_0+\frac{(p-1)!\,e^{i\varphi}}{\sqrt{M_p}}\,\frac{z^p}{(1-rz)^p},$$

On vérifie bien que

$$f_p^{(p)}(z)=\lambda^2 e^{i\varphi}\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)^2\dots(n-p+1)^2\,(rz)^{n-p}$$

donne, pour $z=r$,

$$|f_p^{(p)}(z)|=M_p=\rho\sqrt{M_p}.$$

Par exemple, pour $p=1$, on a $M_1=\dfrac{1}{(1-u)^2}$,

$$|f'(z)|\leqq\frac{\rho}{1-r^2},$$

$$f_1(z)=a_0+\rho\,e^{i\varphi}\,\frac{(1-r^2)z}{1-rz}$$

Pour $p=2$, $$M_2=\frac{2(1+2u)}{(1-u)^4}$$

$$|f''(z)|\leqq\rho\,\frac{2(1+2r^2)}{(1-r^2)^2},$$

$$f_2(z)=a_0+\frac{\rho e^{i\varphi}}{\sqrt{2(1+2r^2)}}\,\frac{(1-r^2)^2z^2}{(1-rz)^2}.$$

7. - Les calculs précédents conduisent à deux expressions de la fonction $\Omega_p(r)$. On a

$$\Omega_p(r)=\rho\sqrt{M_p}$$

avec

$$M_p=\frac{d^{p-1}}{du^{p-1}}\left[u^{p-1}\frac{d^{p+1}}{du^{p+1}}\left(\log\frac{1}{1-u}\right)\right]=\left[\frac{\partial^{2p}}{\partial r^p\,\partial z^p}\left(\log\frac{1}{1-rz}\right)\right]_{z=r}.$$

Cette egalité peut être obtenue directement sans difficulté.

Supposons qu'elle soit vérifiée pour une valeur de p et pour une fonction $\varphi(u)$ du produit $rz = u \,.\, M_p(u)$ peut être considéré comme une fonction $M_p(rz)$ de ce produit et l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z}$ donne

$$M_{p+1}(u) = M'_p(u) + u\, M''_p(u).$$

D'autre part, en posant

$$g(u) = \frac{d^{p+1}\varphi(u)}{du^{p+1}},$$

on a

$$\frac{d^p}{du^p}\left[u^p \frac{d^{p+2}\varphi(u)}{du^{p+2}}\right] = \frac{d^p}{du^p}\left[u \,.\, u^{p-1} g'(u)\right] =$$
$$= \frac{d^p}{du^p}\left[u\,(u^{p-1}\, g)' - (p-1)\, u^{p-1} g\right],$$

$$\frac{d^p}{du^p}\left[u\,(u^{p-1}\, g)'\right] = u \frac{d^{p+1}}{du^{p+1}}\left[u^{p-1} g(u)\right] + p \frac{d^p}{du^p}\left[u^{p-1} g(u)\right];$$

donc

$$\frac{d^p}{du^p}\left[u^p \frac{d^{p+2}\varphi(u)}{du^{p+2}}\right] = u \frac{d^{p+1}}{du^{p+1}}\left[u^{p-1} g(u)\right] + \frac{d^p}{du^p}\left[u^{p-1} g(u)\right]$$
$$= u\, M''_p(u) + M'_p(u) = M_{p+1}.$$

Donc, si la formule est vraie pour une valeur p, elle est vraie pour les entiers supérieurs à p. Pour qu'elle soit générale, il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée pour $p = 1$. La condition est

$$\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial r\ \partial z} = \frac{d\,\varphi(u)}{du} + u \frac{d^2\varphi(u)}{du^2}$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(u) = C \log \frac{1}{1-u} + C',$$

C et C' désignant des constantes. On retrouve ainsi la fonction $\log \frac{1}{1-u}$ qui permet la détermination de tous les Ω_p, à partir de $\Omega_0 = \Omega(a_0, r)$.

8. - La plupart des calculs précédents s'appuient à l'identité de Lagrange. La même méthode s'appliquerait à toute famille de fonctions pour laquelle une inégalité semblable à l'inégalité $S(f) \leqq \pi \rho^2$ serait vérifiée. Par exemple, avec fonctions holomorphes $f(z)$, vérifiant dans le cercle-unité une inégalité de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, |a_n|^p < \rho^p,$$

ρ désignant un nombre fixe, p un nombre positif supérieur à l'unité, $P(n)$ un polynome entier de la variable n.

On obtiendrait aussi le même cycle de théorèmes pour la famille des fonctions pour lesquelles l'aire simple du domaine couvert est bornée; l'expression «aire simple» signifiant que chaque élément d'aire du domaine couvert n'est compté qu'une fois même s'il est couvert plusieurs fois. Mais, dans ce cas la détermination des constantes ne paraît pas pouvoir être obtenue par une voie aussi élémentaire.

17 Septembre 1943.