SOBRE LAS FUNCIONES CONTINUAS SIN DERIVADA

por

ELBA RAIMONDI

A pesar de la numerosa bibliografía sobre el tema, queda mucho por estudiar sobre él, y algunos prejuicios por deshacer. En primer lugar es preciso reconocer que la gran mayoría de los trabajos se ocupan exclusivamente del problema restringido, esto es, la construcción de funciones que carecen de derivada *finita* en todo punto, pero pueden tenerla infinita, y por tanto dan curvas con tangentes, si bien estas son paralelas a las ordenadas. Así resulta que los escasos ejemplos conocidos de curvas sin tangente en ningún punto escapan a los métodos generales de formación de tales funciones, como es el de Knopp, el cual solamente es aplicable a la demostración de la inexistencia de derivada bilateral única, o sea la no coincidencia de los cuatro números derivados, pero cabe la existencia de puntos angulosos con derivadas laterales finitas y de puntos cuspidales con derivadas infinitas de signo opuesto a ambos lados.

En los trabajos de Seminario de 1940 el Dr. Rey Pastor, dió un método más general que permite demostrar la inexistencia de derivadas laterales o sea la desigualdad de los dos números derivados a un mismo lado, quedando incluídas en este criterio general todas las funciones conocidas que satisfacen al problema estricto. Su método se basa en el lema siguiente:

Si existe derivada finita D a la derecha del punto a, y se conserva $\frac{k+h}{k-h}<A$ para $h>0$ $k>0$, también existe el doble límite:

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a+h)}{k-h} = D.$$

De este lema se deduce sin dificultad este teorema:

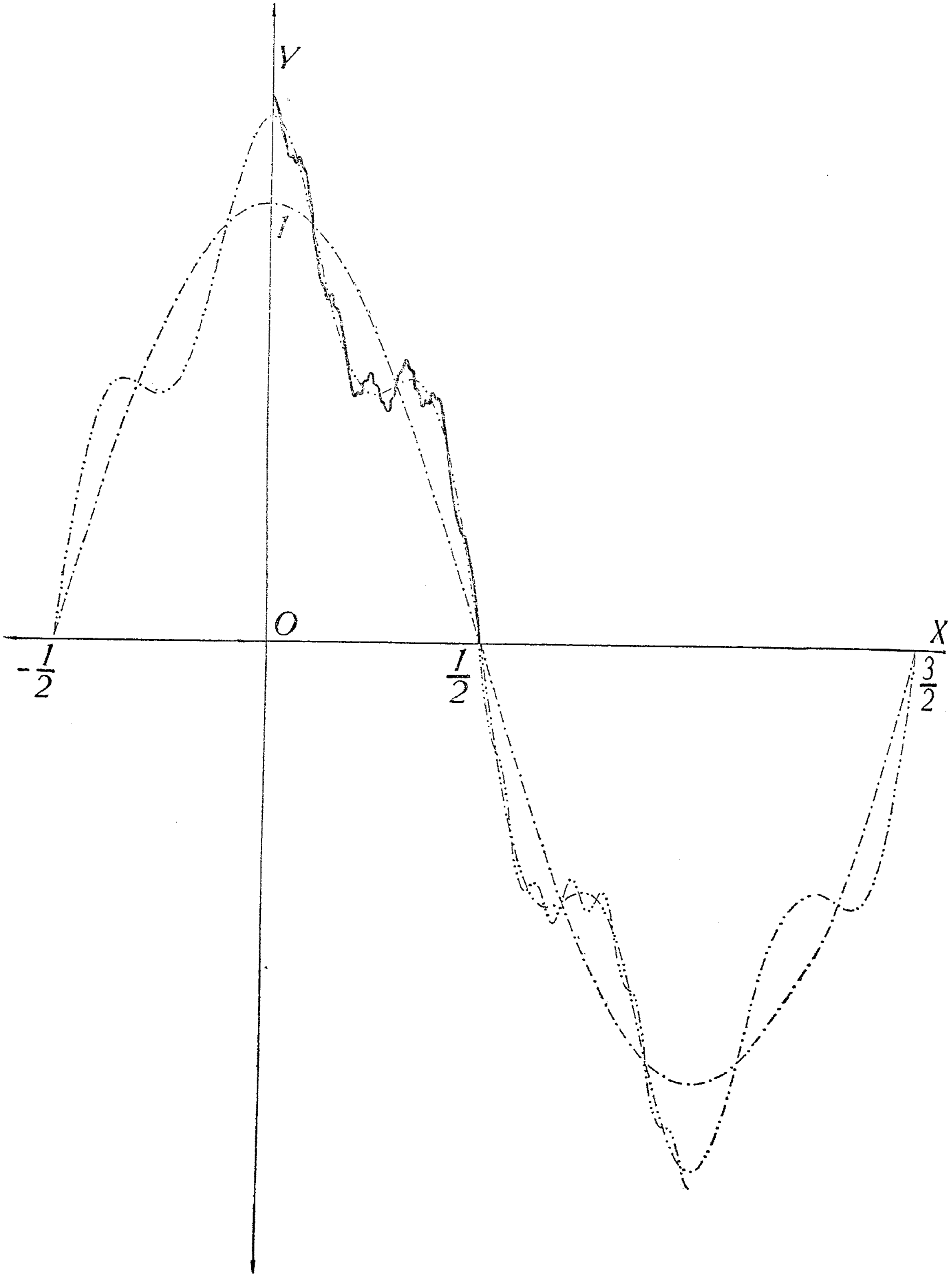

Fig. 1

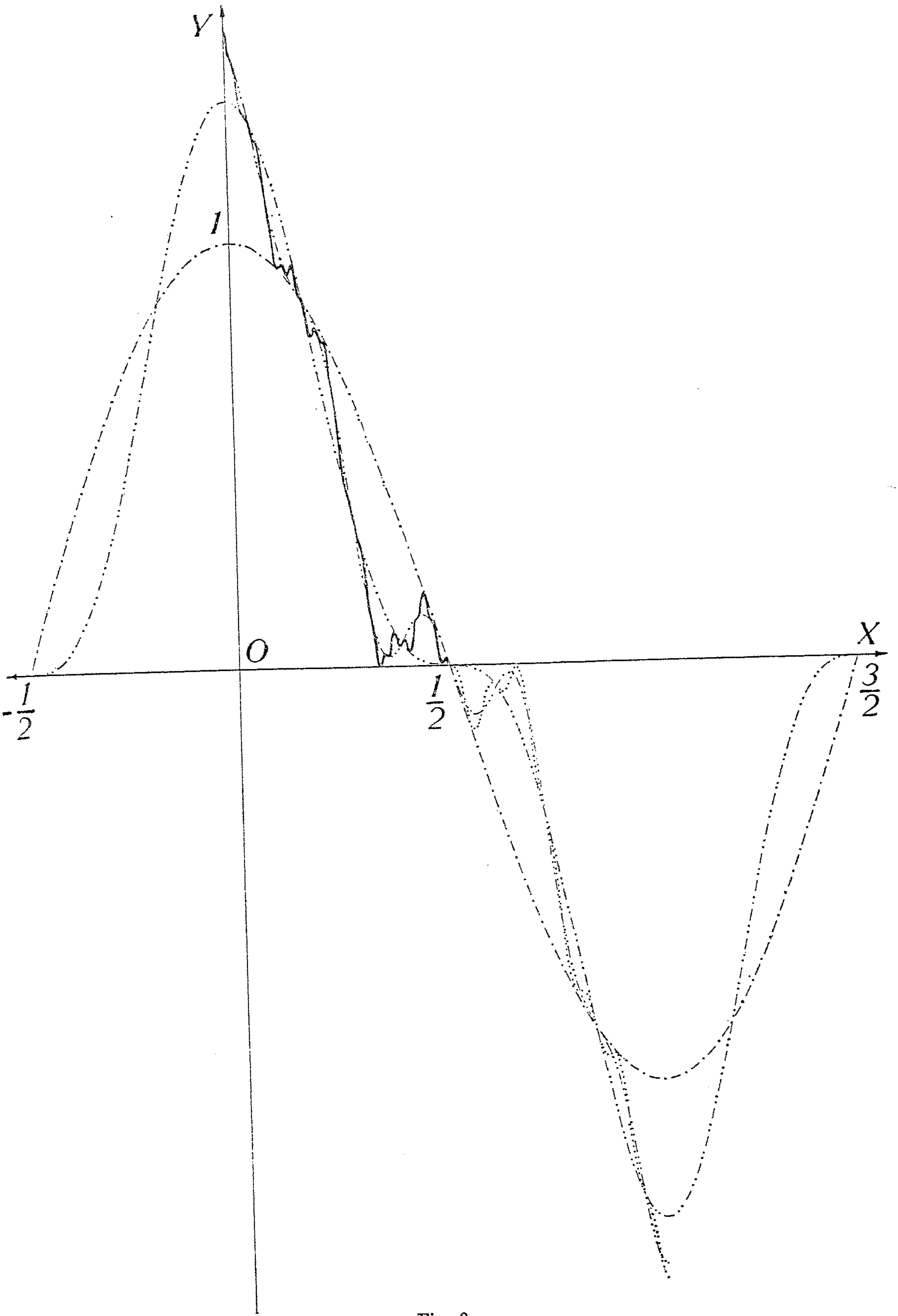

Fig. 2

Condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ carezca de derivada finita a la derecha del punto a es que existan cuerdas a la derecha del punto a cuyas abscisas extemas $a+h$, $a+k$ tiendan hacia a conservándose acotada la razón $\frac{k+h}{k-h}$, y tales que sus pendientes tengan diferencia superior a un número positivo.

Mediante este método resulta demostrado muy sencillamente el esencial perfeccionamiento de la función de Weierstrass que fué iniciado por Hadamard y rigurosamente logrado por Hardy en su importante memoria de las Transactions of the American mathematical Society, vol. 17. Consiste en sustituir las clásicas condiciones para la inexistencia de derivada en todo punto de la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cos \pi a^n x \qquad [1]$$

por otras mucho más amplias, gracias al uso de medios más potentes que los elementales utilizados por Weierstrass. Es sabido que las condiciones impuestas por éste fueron:

$$0 < c < 1; \quad a \text{ número natural impar}; \quad a\,c > 1 + \frac{2}{3}\pi$$

mientras que Hardy suprime la restricción de que a sea entero y en lugar de la acotación anterior adopta esta menos restrictiva: $a\,c \geqq 1$.

La demostración de Hardy se apoya en seis lemas especialmente preparados para ella y utiliza delicados recursos de la teoría de aproximaciones diofánticas antes obtenidas por Littlewood. Las dificultades del método impidieron a Knopp tomarlo en cuenta en su excelente memoria antes citada, en la cual sistematiza los diversos tipos conocidos de funciones continuas no derivables. No habiendo sido impresa la memoria del Dr. Rey Pastor ni el trabajo de aquel seminario, nos hemos permitido mencionar al menos su fundamento, así como también el segundo de los problemas resueltos, en cierto modo opuesto al primero; demostrar la existencia de derivada infinita de ciertos tipos de funciones por el simple examen de la función generatriz con la que se forma la serie $\Sigma\, u_r(x)$. Basta, en efecto, el crecimiento uniforme hacia la derecha y la divergencia de la serie de derivadas a la derecha, para asegurar la existencia de derivada infinita a la derecha.

Interesan ambos teoremas en el estudio elemental de las funciones de Hardy y como cuestión interesante previa abordamos en aquel seminario de 1940 el problema de la construcción exacta de la curva para comprobar los resultados teóricos en caso límite $ac = 1$.

Es curioso que al tratar este punto de las funciones no derivables, los tratadistas las consideran como no representables gráficamente, por la imposibilidad de dibujar las infinitas oscilaciones; y eminentes autores como Klein, se limita a dibujar varias de las curvas componentes, renunciando a dar siquiera idea de la curva resultante; y el inolvidable profesor Birkhoff se complacía en sus lecciones en trazar una anchísima zona meramente esquemática para indicar simplemente la imposibilidad de dibujarla. Sin embargo, el problema de la representación gráfica no es en esencia distinto del de las curvas con tangentes. En efecto, lo único que cabe en éstas, es dar una estrecha zona dentro de la cual está la curva teórica, y el dibujo debe considerarse perfecto si tal acontece, es decir. si el error de cada uno de los bordes de la línea dibujada es menor que la inevitable anchura de esta línea, que en verdad es una zona.

Este es el problema que hemos resuelto para la función de Weierstrass - Hardy. Mediante tablas especialmente calculadas con cinco cifras decimales, hicimos el cálculo de suficiente número de términos de la serie, determinando para cada uno los máximos, mínimos y algunos puntos intermedios. Aunque no era necesario representar las sumas parciales sucesivas, las hemos dibujado con toda exactitud en papel milimetrado, cuya reproducción adjunta, reducida a escala $\frac{2}{5}$, da idea del resultado.

En la primera figura se han adoptado los valores $a = 5$, $c = \frac{1}{5}$ y para lograr un error menor que un milímetro en el dibujo de unidad 18 cm, hemos tenido que calcular cinco términos con cuatro decimales exactas. De estas curvas intermedias que representan las sumas sucesivas de la serie solamente hemos dibujado tres en el segundo cuadrante $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y dos en los otros, para evitar confusión en el dibujo reducido. En éste el espesor de la línea puede calcularse en dos a tres décimos de mm., y puede asegurarse que la curva teórica queda totalmente dentro de esa línea dibujada, es decir, ésta tiene toda la *exactitud* que puede lograrse con cualquier función sencilla. En realidad, dada la exactitud numérica lograda en nuestro cálculo, podría haberse reducido el espesor de la franja en las porciones de mayor pendiente, para que su anchura medida verticalmente fuera la calculada como margen de error; pero siguiendo la costumbre de los dibujos corrientes hemos preferido adoptar espesor uniforme en sentido normal, lo que asegura todavía más que la curva teórica no sale de la línea dibujada.

En la segunda función hemos adoptado los valores $c = \frac{1}{3}$ $a = 2$, habiendo sido necesario tomar muchos más términos para no exceder la cota de error, pero solamente han sido dibujadas las primeras curvas parciales. Hemos elegido precisamente tales valores, a y c que no cumplen la condición de Hardy, para que resulte una curva que tiene tangente no horizontal en todo punto, es decir, derivada finita para todo valor de la variable, como resulta inmediatamente de la convergencia uniforme de la derivada, por ser $ac < 1$. Sin embargo, su construcción es más difícil que la de la primera función no derivable y su aspecto, no más sencillo que el de la primera, nada indica a simple vista sobre su carácter radicalmente distinto.

Queda así demostrado claramente cuán equivocado es el prejuicio tan difundido sobre las curvas sin tangente, y queda dicho cómo se pueden dibujar tan exactamente como las otras. Es claro que las sinuosidades de la curva crecen con el valor de a; pero la dificultad no reside en esto, sino en que el coeficiente c no sea bastante pequeño. Así por ejemplo, sería laborioso el dibujo de la curva de Weierstrass para $a = 5, c = \frac{1}{2}$, cuyas primeras componentes están representadas en la obra de Rey Pastor: *Funciones Reales* (primera edición, 1925, pág. 258), pero la dificultad no reside en a sino en c, pues exige tomar términos, lo mismo que sucede en nuestra segunda función que tiene tangente en todo punto y hasta tiene pendiente acotada, es decir, cumple la condición más simple de Lipschitz.

Sea o no derivable la función de tipo (1) su representación gráfica dependerá del valor c, que es decisivo, pues la complicación debida al a es insignificante disponiendo de tablas; y esta conclusión vale en todo caso, sea o no derivable y también aunque la serie se reduzca a un polinomio, pues si c se aproxima a 1, y el número de términos es considerable, la construcción será prácticamente imposible, mientras que es tarea muy factible la construcción de curvas sin tangentes, como la de la figura primera, si c es pequeño; por el contrario es mucho más penosa la construcción de la curva segunda; y esta sería prácticamente imposible para $c = 99...9$ aún en el caso del polinomio de gran número de términos, como ya hemos dicho, caso en que la función es analítica.

BIBLIOGRAFIA

G. H. HARDY, *Weierstrass no-differentiable function.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 17 (1916).

K. KNOPP. *Einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differentierbarer Funktionen.* Math. Zeits. vol. 2 (1918).

REY PASTOR. *Teoría de las Funciones reales.* 1ª ed. Madrid, 1925.

REY PASTOR. *Funciones continuas no derivables.* (Curso autografiado, 1940).