SOBRE CIERTAS FORMULAS DE INVERSION

por

A. González Domínguez
Seminario Matemático
Facultad de Ciencias Exactas
Buenos Aires

Resolvemos en esta nota un problema propuesto por el Prof. Rey Pastor (Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. VII, fasc. 1, pág. 6, problema 3), y otros más generales. Valga ella de modesto homenaje al querido maestro, introductor en el país de la Matemática moderna.

1. Teorema I. - *Sea $f(z)$ una función que se sabe admite la representación*

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{z}{z^2+\nu^2}, \quad z=x+iy, \quad x>0, \tag{1.1}$$

cumpliendo los coeficientes reales c_ν la condición

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|<\infty. \tag{1.2}$$

Estos pueden entonces calcularse por medio de la fórmula

$$c_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\nu t\,dt, \quad \nu=1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

donde

$$\varphi(t)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\lambda}^{x+i\lambda}\left[1-\frac{|y|}{\lambda}\right]e^{tz}f(z)\,dz, \qquad (x \text{ arbitrario}, >0). \tag{1.4}$$

Demostración. Partiendo de la fórmula conocida

$$\frac{z}{z^2+\nu^2}=\int_0^\infty e^{-zt}\cos\nu t\,dt,$$

válida para $x>0$, obtenemos, reemplazando en (1.1):

$$(1.5)\qquad f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big[c_\nu\int_0^\infty e^{-zt}\cos\nu t\,dt\Big]=\int_0^\infty e^{-zt}\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\cos\nu t\Big]\,dt.$$

La inversión del orden de sumación e integración es lícita, pues se verifica, para cada x fijo >0, en virtud de la hipótesis (1.2),

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big[|c_\nu|\int_0^\infty e^{-xt}|\cos\nu t|dt\Big]<\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big[|c_\nu|\int_0^\infty e^{-xt}\,dt\Big]=\frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|<\infty.$$

Introduzcamos la función

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\cos\nu t$$

Las relaciones (1.5) muestran que la función $f(z)$ es expresable mediante una integral de Laplace absolutamente convergente para cada $x>0$:

$$(1.6)\qquad f(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\varphi(t)\,dt,$$

y la generatriz $\varphi(t)$ es además continua, en virtud de (1.2), como serie uniformemente convergente de funciones continuas. Se cumplen, pues, todas las condiciones para la validez de una conocida fórmula de inversión de Hardy (¹), la cual nos da, en el presente caso:

(¹) Ver HARDY, *Messenger of Math.*, 46 (1917), pp. 175-182, y 47 (1917), pp. 81-88; y también, del mismo autor, *ibidem*, 47 (1918), pp. 178-184.

$$(1.7)\qquad \varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos\nu t=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\lambda}^{x+i\lambda}\left[1-\frac{|y|}{\lambda}\right]e^{tz}f(z)\,dz.$$

Ahora bien, la serie que define $\varphi(t)$ es, como ya hemos dicho, uniformemente convergente, y por lo tanto sus coeficientes pueden calcularse por las fórmulas de Eulero - Fourier, con lo que obtenemos:

$$c_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\nu t\,dt\qquad \nu=1,2,\ldots,$$

que es la anunciada fórmula de inversión, y el teorema queda demostrado.

Nota. La integral (1.4) que expresa $\varphi(t)$ en función de $f(z)$, no es otra cosa que la suma Cesàro de la clásica integral que figura en la fórmula de inversión de Riemann. Esta última no es aplicable en nuestro caso porque de las hipótesis hechas no surge que $\varphi(t)$ sea de variación acotada. Pero puede lograrse que lo sea imponiendo a los c_ν condiciones más restrictivas, por ejemplo, que la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu c_\nu$ sea absolutamente convergente. Obtenemos así, sin necesidad de nuevos razonamientos, el siguiente

Teorema II. *Si, conservando las notaciones del teorema I imponemos a los c_ν, en vez de la condición (1.2) la siguiente:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\nu c_\nu|<\infty,$$

los coeficientes c_ν vienen dados por las fórmulas (1.3), estando ahora $\varphi(t)$ definida por la integral siguiente:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{tz}f(z)\,dz,\qquad (x \text{ arbitrario}, >0).$$

2. Hemos supuesto hasta ahora que la función $f(z)$ estaba definida para valores complejos de z; si admitimos en cambio que lo está sólo para valores reales de la variable, y queremos efectuar la inversión sin acudir a la prolongación analítica de la función, ello puede hacerse por el método anterior, con la salvedad de que en vez de emplear la fórmula de Riemann o alguna de sus generalizaciones deberemos utilizar alguna otra en que intervengan sólo valores reales de la variable. Han dado fórmulas de este tipo Phragmen, Widder, Wiener y otros. Acudiendo, por ejemplo, a una fórmula dada por nosotros ([2]), obtenemos inmediatamente el siguiente

Teorema III. *Sea $f(x)$ una función que se sabe admite la representación*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x}{x^2+\nu^2}, \qquad (x \text{ real}), \tag{2.1}$$

y cumplan los coeficientes reales c_ν la condición (1.2). *Estos vienen entonces dados, en función de $f(x)$ por las fórmulas* (1.3), *en las cuales la función $\varphi(t)$ tiene el siguiente significado*:

$$\varphi(t)=\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\psi_n(t)\,r^n, \tag{2.2}$$

donde $\psi_n(t)$ es la enésima función de Laguerre:

$$\psi_n(t)=e^{-\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-t)^k}{k!}, \tag{2.3}$$

y los a_n vienen dados por la fórmula

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}. \tag{2.4}$$

3. La idea de las demostraciones anteriores ha consistido en expresar la función dada mediante una integral de Laplace.

([2]) A. González Domínguez, *Sur les Intégrales de Laplace*, Comptes rendus, vol. 205, (1937), pág. 1037.

En el teorema siguiente realizamos la inversión mediante una serie de Dirichlet.

Teorema IV. *Conservando todas la hipótesis y notaciones del teorema III se verifica:*

$$c_m = \lim_{r \to 1} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}} m^{3/2} (1-r)^{1/2} g(r, m), \tag{3.1}$$

donde

$$g(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(t) r^n, \tag{3.2}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{F^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}, \tag{3.3}$$

y

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} \cos t x \, d x. \tag{3.4}$$

Demostración. Se deduce de (2.1), dividiendo ambos miembros por x:

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{1}{x^2+\nu^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $\cos tx$ e integrando entre 0 e ∞ obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} \cos tx \, dx = \int_0^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\cos tx}{x^2+\nu^2}\right] dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+\nu^2} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} e^{-\nu t} = F(t).$$

La inversión del orden de sumación e integración es lícita, pues se verifica:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[|c_\nu| \int_0^\infty \left| \frac{\cos tx}{x^2+\nu^2} \right| dx \Big] < \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| < \infty .$$

La función $F(t)$ (perfectamente determinada por la $f(x)$), es pues expresable mediante una serie de Dirichlet:

$$\text{(3.5)} \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \cos tx \, dx = F(t) = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} e^{-\nu t}.$$

Recordemos ahora el siguiente teorema, dado por nosotros en otra ocasión (3):

Sea la serie de Dirichlet real

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$$

donde la serie formada por los c_ν *es absolutamente convergente. Se verifica entonces:*

$$c_n = \lim_{r \to 1} 2(\pi \lambda_n)^{1/2} (1-r)^{1/2} g(r, \lambda_n),$$

donde $g(r,t)$ *está definida, en función de* $F(t)$, *por las fórmulas* (3.2) *y* (3.3).

Aplicando esta fórmula a la función definida por (3.5) se obtiene inmediatamente la fórmula (3.1), como quería demostrarse (4).

4. Los teoremas anteriores requieren para su demostración recursos de índole no elemental. Ofrece por ello interés el

---

(3) González Domínguez, *Sur les Intégrales de Laplace*, Comptes rendus, vol. 205 (1937), pág. 1037.

(4) Los coeficientes c_n pueden obtenerse de manera mucho más simple. En efecto, la serie del segundo miembro de (3.5), es una serie de potencias de la variable $z = e^{-t}$. Por lo tanto, si escribimos

$$F(t) = g(z),$$

resulta inmediatamente

$$c_n = \frac{2\, g^{(n)}(0)}{\Pi\, (n-1)!}$$

siguiente teorema, que permite determinar los coeficientes con extrema sencillez.

Teorema V. *Sea* $f(x,t)$ [5] *una función real que se sabe admite la representación*

$$(4.1)\qquad f(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x}{x^2+(t-\nu)^2}, \quad \begin{array}{l} 0<x<\infty \\ 0\leqq t<\infty, \end{array}$$

donde los coeficientes c_ν *cumplen la condición*

$$(4.2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|<\infty.$$

Se verifica entonces:

$$(4,3)\qquad c_n=\lim_{x\to 0} x\, f(x,n),$$

$$(4.4)\qquad \sum_{\nu=m}^{\nu=n} c_\nu=\lim_{x\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{m-\delta}^{n+\delta} f(x,t)\, dt, \qquad 0<\delta<1.$$

Demostración. Se verifica

$$(4.5)\qquad x\, f(x,n)=\sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \frac{x^2}{x^2+(n-\nu)^2}+c_n+\sum_{n+1}^{\infty} c_\nu \frac{x^2}{x^2+(n-\nu)^2}$$
$$=\Sigma_1+c_n+\Sigma_2.$$

Veamos cómo se comportan Σ_1 y Σ_2 para $x\to 0$. Se verifica evidentemente, para $x\to 0$:

$$(4.6)\qquad |\Sigma_1|<\frac{x^2}{1+x^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} |c_\nu| \to 0;$$

$$(4.7)\qquad |\Sigma_2|<\frac{x^2}{1+x^2}\sum_{n+1}^{\infty} |c_\nu| \to 0.$$

[5] Para $t=0$, $f(x,t)$ se convierte en la $f(x)$ que interviene en los teoremas anteriores.

Las relaciones (4.5), (4,6) y (4.7) demuestran la primera parte del teorema.

Pasemos a demostrar la segunda, o sea, la fórmula (4.4). Multiplicando ambos miembros de (4.1) por $\frac{1}{\pi}$, integrando entre $m-\delta$ y $n+\delta$ $(0<\delta<1)$, e invirtiendo el orden de sumación e integración (lo cual es evidentemente lícito en virtud de la convergencia absoluta), obtenemos:

$$(4.8) \quad \frac{1}{\pi}\int_{m-\delta}^{n+\delta} f(x,t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{m-\delta}^{n+\delta}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{x}{x^2+(t-\nu)^2}\right]dt$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[c_\nu \frac{1}{\pi}\int_{m-\delta}^{n+\delta}\frac{xdt}{x^2+(t-\nu)^2}\right]=\sum_{\nu=1}^{m-1}[\ \ ]+\sum_{\nu=m}^{n}[\ \ ]+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}[\ \ ]=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3.$$

Estudiemos ahora el comportamiento de estas tres sumas para $x\to 0$. Se verifica, para $x\to 0$:

$$(4.9) \quad |\Sigma_1|<\frac{1}{\pi}[n-m+2\delta]\frac{x}{x^2+(1-\delta)^2}\sum_{\nu=1}^{m-1}|c_\nu|\to 0;$$

$$(4.10) \quad \Sigma_2=\sum_{\nu=m}^{n}\left\{c_\nu\frac{1}{\pi}\int_{\frac{m-\delta-\nu}{x}}^{\frac{n+\delta-\nu}{x}}\frac{dt}{1+t^2}\right\}\to\sum_{\nu=m}^{n}\left\{c_\nu\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right\}=\sum_{\nu=m}^{\nu=n}c_\nu;$$

$$(4.11) \quad |\Sigma_3|<\frac{1}{\pi}[n-m+2\delta]\frac{x}{x^2+(1-\delta)^2}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|c_\nu|\to 0.$$

Las relaciones (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11) prueban la validez de la aserción (4.4), con lo que nuestro teorema queda completamente demostrado.