SOBRE LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS GENERALES

por

ESTHER FERRARI

Buenos Aires

En la moderna organización axiomática de la Matemática, se propende a sistematizar todas las teorías existentes dentro del cuadro de los espacios abstractos. La Matemática aparece así como una serie de cuerpos deducidos de diversos grupos de postulados, y se comprende la importancia que tiene dar a cada propiedad su máximo alcance, pues solamente las demostraciones basadas en el grupo mínimo de axiomas necesarios tienen carácter definitivo. Multitud de propiedades dadas por Fréchet y otros autores con postulados superabundantes pueden ser deducidas de postulados menos exigentes, como hemos demostrado en nuestra memoria presentada como tesis doctoral, bajo la dirección del Dr. Rey Pastor, cuyo primer capítulo resumimos en esta nota para concurrir al homenaje que se le tributa, omitiendo las demostraciones que oportunamente serán publicadas en la memoria íntegra.

1. - *Postulados de los espacios accesibles*

Veamos ante todo que postulados mínimos son suficientes para demostrar algunas propiedades que Fréchet probó para los espacios accesibles, viendo que no son necesarios todos los postulados $R_1, R_2, R_3, 5^o$ que caracterizan tales espacios.

Recordemos los postulados de Riesz

Post. R_1. Si $X < Y$ es $X' \leqq Y'$; luego $(X+Y)' \geqq X'+Y'$.

Post. R_2. $(X+Y)' \leqq X'+Y'$.

Post. R_3. Un conjunto de un solo punto carece de punto de acumulación.

Post. 5°. $X'' \leqq X'$ (Fréchet).

Post. K. Todo conjunto completado es completo.

Appert lo llama «condición α» sin decir su origen; pero como este es el postulado de Kuratowsky, lo designaremos por la letra K.

Evidentemente postula menos que el 5° de Fréchet.

El postulado R_2 equivale al B de Hausdorff, y el postulado K puede darse en esta forma: *En cada entorno U de cada punto p hay otro entorno $V < U$ tal que cada uno de sus puntos tiene un entorno contenido en U.*

Salta a la vista que este postulado es menos exigente que el C de Hausdorff.

2. - *Generalización de algunas propiedades de los espacios accesibles*

I. - *El mínimo conjunto completo que contiene a un conjunto X es el completado de X.*

Los postulados suficientes para demostrar esta propiedad son el R_1, y el K.

II. - *El completado de un conjunto denso en sí es un conjunto perfecto.*

Son suficientes los postulados R_1, R_2 y K.

III. - *La frontera de un conjunto es un conjunto completo.*

Para la demostración son suficientes los postulados R_1, R_2 y 5°.

IV. - *Todo conjunto separable X pertenece a un conjunto completo separable, por ej., el completado de X.*

Los postulados necesarios para la demostración son el R_1, R_2 y el K.

V. - *Todo conjunto separable denso en sí pertenece al derivado de uno de sus conjuntos parciales numerables.*

Son suficientes los postulados R_1, R_2 y 5°.

VI. - *Todo conjunto separable perfecto X es el derivado de uno de sus conjuntos parciales numerables.*

Son postulados suficientes R_1, R_2 y 5°.

VII. - *Todo conjunto X perfectamente separable y no diluído contiene un conjunto numerable denso en sí.*

Para la demostración son suficientes los postulados R_1, R_2 y el 5^0.

VIII. - *El núcleo de un conjunto X es el máximo (si existe) de los conjuntos densos en sí contenidos en X.*

Para la demostración basta con el postulado R_1.

3. - *Anillos de Hausdorff formados por conjuntos abiertos y completos*

Recordemos que una familia de conjuntos es un *anillo* en el sentido de Hausdorff cuando la suma y producto de dos conjuntos cualesquiera de la familia pertenece a ella.

En los espacios (V) la familia de los conjuntos abiertos (sea finita o no) no es un anillo de Hausdorff, pues aunque la suma de conjuntos abiertos es un conjunto abierto el producto de dos conjuntos abiertos, puede no ser abierto.

En los espacios (V) tampoco forma anillo la familia de los conjuntos completos, pues aunque en este caso el producto de conjuntos completos es completo, la suma de dos conjuntos completos, no es en general conjunto completo.

En cambio, en los espacios (V) que satisfacen al postulado R_2 se verifica:

a) *La familia de los conjuntos abiertos forma anillo de Hausdorff.*

b) *La familia de los conjuntos completos forma anillo de Hausdorff.*

c) *Los conjuntos perfectos no forman un anillo de Hausdorff.*

4.- *Propiedades de los espacios (V) que satisfacen a los postulados R_2 y K*

Ya hemos enunciado el postulado K y es fácil ver que es menos exigente que el 5^0 de Fréchet, el cual no figura en el cuadro de los postulados de Riesz.

I. - *Todo conjunto X separable denso en sí, pertenece al completado de uno de sus conjuntos parciales numerables.*

II. - *Todo conjunto X separable perfecto es el completado de uno de sus conjunto parciales numerables.*

III. - *Dado un número finito de conjuntos, la suma y el producto de las fronteras de estos conjuntos forman un conjunto completo.*

5. - *Anillos (sistemas con suma, diferencia y producto)*

Llamaremos *Suma* (S) (Según Stone) de dos conjuntos X, Y al conjunto formado por los elementos de X y los de Y, excepto los elementos comunes de ambos.

Designando por $\cup$ la suma ordinaria o *unión* de dos conjuntos X, Y al formado por los elementos de X y de Y, resulta:

$$(S) \quad A + A = 0$$

$$(\cup) \quad A \cup A = A.$$

Diferencia entre dos conjuntos X e Y es un conjunto Z, tal que $Y + Z = X$.

Si consideramos la definición de suma (S), la diferencia siempre es posible.

Además resulta: $X - Y = Y - X = X + Y$.

Si consideramos la definición de suma ($\cup$), la diferencia sólo es posible cuando $X \geqq Y$. Por tanto:

Los conjuntos de un espacio E no forman anillo, respecto de la operación $\cup$, pero forman anillo de Stone.

Mientras la definición de suma (S) simplifica como hemos visto algunas relaciones, sucede lo contrario al considerar familias de conjuntos abierto y completos, aún en el mismo espacio E_n. Basta fijarse en sencillos ejemplos para concluir:

a) *En general los conjuntos completos no forman anillo de Stone, mientras que forman anillo de Hausdorff como ya hemos visto.*

b) *En general los conjuntos abiertos no forman anillo de Stone, mientras que forman anillo de Hausdorff en todos los espacios (V) que satisfacen al postulado R_2.*

6. - *Producto cartesiano de espacios topológicos generales* (*)

A) *Topología estricta.* Si $E = \Pi\, X_b$ es un producto cartesiano de espacios topológicos cada punto x está determinado como producto de sendos puntos x_b llamados sus proyecciones sobre los respectivos espacios factores X_b.

Para introducir una topología en el espacie E producto cartesiano de espacios (V) tomaremos como definición de en-entorno la siguiente:

Def. Entorno del punto $x = (x_b)$ de $E = \Pi\, X_b$ son los productos de entornos cualesquiera de sus proyecciones x_b.

Inmediatamente resulta:

a) *El producto cartesiano de espacios (V) es un espacio (V).*

b) *Si los espacios factores son espacios (V) que satisfacen al postulado R_2 el espacio producto es un espacio (V) que cumple la condición R_2.*

c) *Si los factores satisfacen al postulado R_2 y al C, también el producto E.* Lo mismo sucede si se sustituye C por el menos restrictivo K, en la forma enunciada en (1) mediante entornos.

B) *Topología amplia.*

En vez de tomar entornos en todos los espacios factores se toman solamente en un número finito de ellos, dejando libres las restantes coordenadas. Es decir: $U = \Pi\, U_b$ donde casi todos los U_b son los respectivos espacios X_b.

Por el mismo razonamiento hecho para la topología estricta resulta que:

El producto cartesiano de espacios (V) es un espacio (V) *en la topología amplia.*

También se demuestra fácilmente la conservación de los postulados B, C, D, de Hausdorff.

(*) J. Rey Pastor. *Espacios y grupos topológicos.* Curso de 1939, 2da. edición 1943.

7.-*Espacios D_0 intermedios entre los (V) y los métricos*

Dados dos conjuntos completos cualesquiera en un espacio D_0 (*) ¿existe una función continua $f(x)$, tal que $f(A) \neq f(B)$?. Alexandroff llama espacio *normal* a un espacio accesible que satisface a la condición:

T_3) *Cualesquiera sean los conjuntos completos C_1 y C_2, existen dos conjuntos sin puntos comunes a los cuales C_1 y C_2 son interiores.*

Urysohn ha dado otra definición de espacio normal equivalente a la anterior:

Para que un espacio accesible sea normal es necesario y suficiente que se pueda definir para todo par A, B, de conjuntos completos sin puntos comunes una función continua $F(x)$ nula sobre A, igual a 1 sobre B y tal que $0 \leq F(x) \leq 1$.

En todos los espacios D_0 no existe tal función $F(x)$, porque en general los espacios D_0 no son normales ni aún accesibles. En tales espacios D_0 se verifican los postulados R_1 y R_2, pero puede no verificarse el R_3.

Del estudio de la función $F(x) = \dfrac{xA}{xA + xB}$ en un espacio D_0^1 (D_0^2) resulta:

El espacio D_0^1 (D_0^2) es *semiregular*; llamando así todo espacio en que existe función continua superiormente (inferiormente) que toma valores distintos en un conjunto completo y un punto arbitrariamente elegidos.

8.-*Prolongación de las funciones semicontinuas en los espacios D_0*

Dada una función $f(x)$ acotada y continua sobre un conjunto completo C de un cierto espacio ¿es posible formar una función continua y acotada $F(x)$ en todo el espacio e igual a $f(x)$ sobre C?

Este problema fué resuelto por Lebesgue cuando el conjunto C pertenece a un espacio euclideano y por Tietze cuando pertenece a un espacio (D).

(*) J. Rey Pastor. *Espacios D_0*. Rev. de la Universidad Nac. de Tucumán. Mat. y Fís. teórica. Serie A. Vol. I; Diciembre 1940.

Finalmente Urysohn, no sólo demostró la existencia de una función $F(x)$ en los espacios normales, sino que demostró: La condición necesaria y suficiente para que un espacio sea normal, es que: Dada una función acotada y continua $f(x)$ sobre un conjunto completo C perteneciente a él, se pueda formar una función acotada y continua en todo el espacio e igual a $f(x)$ sobre C.

Queda así resuelto que: En todo espacio D_0 no existe tal función $F(x)$, porque los espacios D_0 no son en general accesibles, por consiguiente, no son en general normales. En cambio hemos logrado demostrar que:

Si la función $f(x) > 0$, está definida en un conjunto completo C de un espacio D_0^1 (D_0^2) y es continua en él, existe una función semi-continua superiormente (inferiormente) $F(x)$ en todo el espacio y que coincide con $f(x)$ en C.

Si la función $f(x) > 0$ está definida en un conjunto completo C de un espacio D_0^2 y es continua en él, existe una función $F(x)$ semi-continua inferiormente en todo el espacio y que coincide con $f(x)$ en C.

9. - *Grupos topológicos*

Adoptados los mismos postulados que Weil (*) se pueden generalizar a ellos multitud de propiedades del espacio E_a.

Consideremos por ejemplo un grupo topológico en que haya una sucesión de entornos $V_1 > V_2 > V_3 > \dots$ del origen que caracterizan la convergencia en ese punto; también por tanto en cualquier otro punto, por simple traslación.

El teorema de Bolzano - Cauchy se puede generalizar para tales grupos topológicos en la forma siguiente:

Condición necesaria y suficiente para que una sucesión x_n de un grupo topológico sea convergente es que para cada índice m exista un índice n tal que todos los puntos $x_{n+1}, x_{n+2} \dots$ queden contenidos en el entorno $x_n + V_m$.

Otras propiedades con sus demostraciones, y el desarrollo de lo extractado en esta breve nota, tendrán cabida en una memoria más extensa.

(*) A. Weil. *L'integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications.* Paris, 1942.