SUR LES LIGNES DE DISCONTINUITE DU PLAN TANGENT A UNE EXTREMALE

por

MAURICE FRÉCHET

Université de París

Introduction. On trouve dans la plupart des ouvrages sur le Calcul des Variations les conditions de Weierstrass-Erdmann auxquelles satisfont les coefficients angulaires des tangentes en un point anguleux d'une extrémale d'une intégrale simple. A ma connaissance, les conditions correspondantes pour une intégrale multiple n'ont pas été publiées. Bien qu'elles s'obtiennent facilement sous la forme qui suit, on jugera peut-être qu'il n'était pas inutile de les faire connaître, car elles se présentent sous la forme d'équations différentielles tandis que dans le cas d'une intégrale simple, ce sont des équations en termes finis. S'il se trouvait que j'ai eu la malechance de n'obtenir qu'un résultat déjà connu, il resterait que c'est en tout cas un résultat peu connu ne se trouvant dans aucun des libres ou de la centaine de mémoires sur le Calcul des Variations que j'ai entre les mains. De sorte qu'une seconde publication de ce résultat, si elle ne me faisait aucun honneur, aurait cependant quelque utilité pour le grand public mathématique.

Cas de l'intégrale double. Pour simplifier, nous nous bornerons au cas des surfaces extrémales de l'intégrale

$$I[z]=\int_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

où

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

z étant une fonction dérivable jusqu'au second ordre sur le domaine D, sauf peuf-être sur un nombre fini de lignes. Pour chacune de ces lignes nous supposons de plus qu'en chaque point, il n'y a que deux plans tangents, qui correspondent aux deux côtes de la ligne.

Soit maintenant PQ un arc d'une de ces lignes.

On peut le compléter de façon à constituer γ une courbe fermée n'ayant aucun point commun avec une ligne de discontinuité de p ou q sans être confondue avec elle au voisinage ou sans être au moins tangente à cette ligne.

Ceci étant, soit δz une variation de z nulle sur le contour de D. La courbe γ découpe D en deux parties: D_e extérieure et D_i intérieure à γ; et on a:

$$\delta I = \delta \iint_{De} + \delta \iint_{Di}$$

Chacune de ces deux variations s'exprime par une formule classique d'après laquelle elle se compose d'une intégrale double — qui est nulle puisqu'on suppose que z est une extrémale — (1), et d'une intégrale curviligne

$$\int f'_p(\delta z\, dy - \delta y\, dz) + f'_q(\delta z\, dx - \delta x\ dz) + (pf'_p + qf'_q - f)$$
$$+ (\delta x\, dy - \delta y\, dx)$$

étendue au bord du domaine d'intégration.

Le bord de D_i se compose de γ parcouru dans le sens direct; celui de D_e se compose du bord Γ de D parcouru dans le sens direct; et de γ dans le sens inverse. Puisque δz est nul sur Γ, il ne reste que les deux intégrales sur γ, parcourues en sens inverse, p, q prenant certaines valeurs p_1, q_1 sur l'une, p_0, q_0 sur l'autre.

En posant, en genéral,

$$\Delta\varphi = \varphi(x, y, z, p_1, q_1) - \varphi(x, y, z, p_0, q_0)$$

on aura donc:

---

(1) Pour éviter toute difficulté on peut supposer γ choisi de sorte que D_i soit assez mince le long de PQ pour qu'il n'y ait pas ailleurs que sur γ de discontinuité des derivées secondes de z sur un domaine Δ_i débordant legèrement D_i. Et on prendra $\varrho z = 0$ non seulement sur le lord de D_i mais aussi à l'extérieur sur Δ_i.

$$\delta I' = \int_\gamma \Big\{ (\delta z\, dy - \delta y\, dz)\, \Delta f'_p + (\delta x\, dz - \delta x\, dx)\, \Delta f'_q$$
$$+ (\delta y\, dx - \delta x\, dy)\, \Delta\, (pf'_p + qf'_q - f) \Big\}.$$

Cette intégrale devant être nulle quelle que soit la variation $(\delta x, \delta y, \delta z)$ sur γ, il résulte du lemme fondamental du Cacul des Variations que sous le signe $\int$, les coefficients de $\delta x, \delta y, \delta z$ seront nuls. D'oú:

$$(1) \qquad \frac{\Delta f'_p}{dx} = \frac{\Delta f'_q}{dy} = \frac{\Delta (pf'_p + qf'_q - f)}{dz}$$

Telles sont les conditions que doivent vérifier en un point, x, y, z d'une ligne de discontinuité du plan tangent, les coefficients directeurs dx, dy, dz, de la tangente á cette ligne et les coefficients (p_1, q_1) et (p_0, q_0) des deux plans tangents á l'extrémale en ce point.

D'ailleurs, on a avantage à résoudre en deux temps ce système.

Comme en un point de la ligne

$$dz = p_1 dx + q_1 dy \quad \text{et} \quad dz = p_0 dx + q_0 dy,$$

on tire de (1), les *équations*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (2) & \Delta(pf'_p + qf'_q - f) - p_1 \Delta f'_p - q_1 \Delta f'_q = 0. \\ (3) & \Delta(pf'_p + qf'_q - f) - p_0 \Delta f'_p - q_0 \Delta f'_q = 0. \end{array}}$$

Dans les cas où f est du second degré en p, q on vérifie facilement que ces équations se réduisent à une seule équation du 2^d. degré et homogène par rapport à l'ensemble des deux différences $\Delta p = p_1 - p_0$, $\Delta q = q_1 - q_0$. Plus précisément si

$$f(x, y, z, p, q) \equiv A(x, y, z)p^2 + 2B(x, y, z)pq + C(x, y, z)q^2 +$$
$$+ 2D(x, y, z)p + 2E(x, y, z)q + F(x, y, z),$$

ces équations se réduisent à

$$(4) \quad A(x,y,z)(p_1-p_0)^2+2B(x,y,z)(p_1-p_0)(q_1-q_0)+ \\ + C(x,y,z)(q_1-q_0)^2=0.$$

Mais les équations (2), (3), sont en général distintes. Elles sont toujours vérifiées si l'on y prend $p_1=p_0$, $q_1=q_0$ simultanément. Les lignes de discontinuité, s'il en existent, correspondent aux autres solutions. Si ces autres solutions sont de la forme:

$$p_1=G(x,y,z,p_0) \quad q_1=H(x,y,z,q_0)$$

on portera ces expressions dans les deux équations (1) qui se trouvent alors équivalentes à une seule. Celle-ci sera une équation différentielle en dx et dy, verifiée par les courbes de discontinuité du plan tangent sur une surface extrémale.

Exemples: 1°. Considérons le cas de l'intégrale

$$\iint_D pq\,dx\,dy.$$

Les équations (2), (3) se réduisent à (4) qui devient ici:

$$(p_1-p_0)(q_1-q_0)=0.$$

On a donc ou bien $p_1=p_0$, ou bien $q_1=q_0$; les équations (1) se réduisent alors à $dx=0$ ou $dy=0$, respectivement. Les lignes de discontinuité du plan tangent ne peuvent donc être que des sections planes d'une extrémale par des plans parallèles à yoz ou à xoz.

C'est un résultat que, dans ce cas particulier, on peut retrouver par l'intermédiaire de l'équation d'Euler. En effet, cette dernière se réduit dans le cas actuel à $s=0$ ou $\frac{\partial x\,\partial y}{\partial^2 z}=0$. Les extrémales ont donc des équations de la forme:

$$z=M(x)+N(y).$$

On voit bien que le plan tangent pourra varier de façon discontinue en traversant une ligne $x=$ const. ou $y=$ const., pour lesquelles les courbes $z=M(x)$ ou $z=N(y)$ ont un point anguleux.

2°. Traitons le cas de:

$$\iint_D (p^3+q^3)\, dx\, dy.$$

Les équations (2), (3) deviennent après réduction:

$$(5) \qquad (p_1-p_0)^2(p_1+2p_0)+(q_1-q_0)^2(q_1+2q_0)=0$$

$$(p_1-p_0)^2(2p_1+p_0)+(q_1-q_0)^2(2q_1+q_0)=0.$$

Elles sont distinctes. En les retranchant, on obtient:

$$(p_1-p_0)^3+(q_1-q_0)^3=0;$$

d'où

$$(6) \qquad p_1-p_0=-(q_1-q_0)$$

et en portant dans (5)

$$(p_1-p_0)^2[p_1+2p_0+q_1+2q_0]=0.$$

Si l'on avait $p_1-p_0=0$, on aurait aussi d'après (6), $q_1-q_0=0$; solution à écarter. Il reste donc:

$$p_1+2p_0+q_1+2q_0=0$$

qui avec l'équation (6) donne:

$$p_1=-q_1, \quad p_0=-q_0.$$

En portant dans (1), on trouve

$$dx=dy, \quad dz=0$$

d'où

$$x-y=\text{const.} \quad z=\text{const.}$$

Ainsi les lignes de discontinuité du plan tangent à une extrémale ne peuvent être que des droites parallèles à la première bissectrice du plan des xy.

Qu'il y ait des extrémales possédant de telles lignes de discontinuité c'est ce qui peut se voir en utilisant l'équation d'Euler qui est ici:

$$\frac{\partial}{\partial x} p^2 + \frac{\partial}{\partial y} q^2 = 0.$$

Si parmi les solutions on considère la solution simple et évidente:

$$z = U(x-y)$$

on voit qu'à toute valeur ξ pour laquelle U' est discontinue correspond la ligne de discontinuité (du plan tangent):

$$x - y = \xi; \quad z = U(\xi).$$

Absence de la singularité. Plus intéressant encore qu'une méthode de détermination des discontinuités serait tout critère permettant d'affirmer que le plan tangent varie de façon continue sur une extrémale.

Or, considérons le premier membre de l'équation (3). C'est une fonction de $p_1, q_1, \varphi(p_1, q_1)$, telle que:

$$\varphi(p_0, q_0) = 0; \quad \varphi'_{p_1} = (p_1 - p_0) f''_{p_1^2} + (q_1 - q_0) f''_{p_1 q_1}$$

$$\varphi'_{q_1} = (p_1 - p_0) f''_{p_1 q_1} + (q_1 - q_0) f''_{q_1^2}.$$

Mais on a

$$\varphi(p_1, q_1) = \varphi(p_0, q_0) + (p_1 - p_0)\, \varphi'_p(p, q) + (q_1 - q_0)\, \varphi'_q(p, q)$$

où

$$p = p_0 + \vartheta(p_1 - p_0), \quad q = q_0 + \vartheta(q_1 - q_0).$$

avec, $0 < \vartheta < 1$. Donc

$$0=\varphi(p_1,q_1)=(p_1-p_0)\,[(p-p_0)f''_{p^2}+(q-q_0)f''_{pq}]+$$
$$(q_1-q_0)\,[(p-p_0)f''_{pq}+(q-q_0)f''_{q^2}]=\frac{1}{\vartheta}[(p-p_0)^2 f''_{p^2}+$$
$$+2(p-p_0)\,(q-q_0)f''_{pq}+(q-q_0)^2 f''_{q^2}].$$

Ceci invite à comparer le crochet avec la différentielle seconde de $f(x,y,z,p,q)$ considérée comme fonction de p et de q, $x\,y\,z$ restant fixes:

$$f''_{p^2}\,dp^2+2f''_{pq}\,dp\,dq+f''_{q^2}\,dq^2.$$

Nous pouvons donc dire que si cette différentielle est une forme définie au sens strict en dp, dq, quelles que soient les valeurs de p et de q, l'équation (3) ne peut être vérifiée que pour $p_1=p_0$ et $q_1=q_0$ simultanément. Autrement dit *si, au point* (x,y,z) *on a*:

$$f''_{p^2}f''_{q^2}-(f''_{pq})^2>0 \tag{7}$$

quels que soient p et q, il ne peut passer pour le point (x,y,z) *de ligne de discontinuité du plan tangent.*

Exemple. Pour

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

on a

$$d^2f=\frac{(1+q^2)dp^2-2pq\,dp\,dq+(1+q^2)\,dq^2}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

Cette forme étant définie au sens strict quels que soient x,y,z,p,q, on en conclut que sur une surface minima, il ne peut y avoir de ligne de discontinuité du plan tangent.

Il en est de même sur les surfaces extrémales de l'intégrale $\iint_D L(x,y,z)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ lorsque $L(x,y,z)$ est partout $\neq 0$.

Interpretation geométrique. Les résultats précédents s'interprètent géométriquement comme dans le cas de l'intégrale simple.

Appelons figurative de $I[z]$ en un point (x_0, y_0, z_0) la surface qui a pour équation dans l'espace des ξ, η, φ, $\varphi = f(x_0, y_0, z_0, \xi, \eta)$ En interprétant la condition (7), on voit que si la figurative qui correspond au point (x_0, y_0, z_0) d'une extrémale est convexe au sens strict, il ne peut passer en ce point aucune ligne de discontinuité du plan tangent á l'extrémale.

On peut donner une condition suffisante plus générale. Le plan tangent á la figurative au point ξ_0, η_0, φ_0, ayant pour équation

$$\varphi = \xi f'_{\xi_0} + \eta f'_{\eta_0} + f_0 - \xi_0 f'_{\xi_0} - \eta_0 f'_{\eta_0},$$

nous voyons que les deux équations (2), (3) expriment que les points (p_0, q_0, f_0) (p_1, q_1, f_1) de la figurative sont chacun sur le plan tangent à l'autre point à la figurative.

Ainsi, il ne peut passer une ligne de discontinuité du plan tangent à l'extrémale au point (x_0, y_0, z_0) *que si la figurative corresponde à ce point possede une tangente double.*

Naturellement si la figurative est convexe au sens strict elle n'a pas de tangente double et nous retrouvons le cas particulier d'abord signalé.