ALGUNAS CUESTIONES VINCULADAS A UNA POSIBLE EXTENSION DEL PRINCIPIO DE CONSERVACION DE DOMINIOS (1)

por

PEDRO CAPELLI y MISCHA COTLAR

Introducción: Es sabido que el principio de conservación de dominios consiste en que la representación conforme transforma punto interior en punto interior. Este principio con la extensión que le dió Bloch permite sistematizar y deducir muy simplemente los principales resultados que pertenecen al llamado «tipo Picard».

Al demostrar que en la transformación conforme un arco de Jordan de la frontera se corresponde biunívocamente y bicontinuamente con otro arco frontera, quedó extendido este principio para los puntos interiores del contorno. Esta nueva etapa del mencionado principio permitió, a su vez, la sistematización de resultados referentes al contorno. Se puede decir que este principio domina casi toda la teoría clásica. Más tarde, por iniciativa de Fatou, Riesz, Nevanlinna, etc., empezó a intervenir en las cuestiones del contorno, cada vez más, la teoría de funciones reales, y especialmente la teoría de Lebesgue. Como el complemento fundamental que hizo Lebesgue a la teoría clásica consiste en adjuntar a los conjuntos abiertos y cerrados los conjuntos de medida nula, se presentó naturalmente esta extensión del principio mencionado: la representación conforme deja invariante los conjuntos de medida nula de Lebesgue. Esta extensión fué demostrada en forma general por Lusin y Privalow (y en parte anteriormente por Fatou y Riesz), y así como el principio de conservación de punto interior domina la teoría clásica, ésta su extensión interviene, directa o indirectamente, en las cuestiones de las funciones

(1) Algunas ideas del presente trabajo, ya fueron expuestas por P. Capelli en el Seminario de Matemática que dirige el Doctor A. Durañona y Vedia en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de La Plata.

analíticas donde se presenta la integral de Lebesgue; tal vez la importancia de este principio no fué puesta en evidencia del todo aún.

Ahora, en las teorías más modernas empieza a intervenir cada vez más la teoría de Denjoy. El complemento que hizo Denjoy a la teoría de Lebesgue consiste principalmente en reemplazar en la noción del límite el punto interior por punto de densidad, y la derivación ordinaria por la derivación aproximativa. Nos parece, pues, natural extender el principio de conservación de dominios, cambiando la noción de punto interior por la de punto de densidad, es decir, demostrar que la representación conforme deja invariante el punto de densidad. Las siguientes consideraciones nos explican la utilidad que puede tener esta extensión. En la teoría de Lebesgue se establece, generalmente, que una determinada propiedad se verifica en casi todos los puntos, pero esta propiedad puede fallar para los puntos de un conjunto excepcional de medida nula. Por eso cuando se trata de verificar dicha propiedad en un punto *individual* hay que introducir métodos complementarios para asegurar que el punto considerado no pertenece al mencionado conjunto excepcional. Por ejemplo, si $f(t)$ es integrable Lebesgue y $F(t)$ es la función primitiva, la teoría de Lebesgue nos asegura que se verifica $f(t)=F'(t)$ en casi todo punto t; pero en muchas cuestiones interesa justamente saber si esto se verifica en un punto t_0 determinado. Si $f(t)$ es continua en t_0 (o sea si t_0 es *interior* a un conjunto sobre el cual la oscilación de $f(t)$ es arbitrariamente pequeña) podemos afirmar que es $f(t)=F'(t)$; más general, si t_0 es punto *de densidad* de un conjunto sobre el cual la oscilación de $f(t)$ es infinitésima, todavía subsiste la conclusión (con alguna pequeña hipótesis suplementaria). Generalizando, podemos decir, hablando en líneas generales, que si t_0 es un punto de densidad de un conjunto sobre el cual se verifican determinadas características, entonces es posible decidir si la propiedad en cuestión se verifica en este punto individual. Es decir, el concepto de punto de densidad nos permite marcar los puntos privilegiados que no entran en el conjunto excepcional de medida nula, característico de la teoría lebesguiana. De donde resulta evidente la importancia de saber si tales puntos quedan invariantes en la representación conforme.

En el caso en que el punto pertenezca al campo de holo-

morfismo esta extensión es inmediata, pero nos parece difícil en el caso del contorno (y que es el caso que más interesa). No hemos podido demostrar esta extensión e ignoramos si fué resuelta o tratada ya por otros autores, solamente hemos obtenido algunos resultados parciales que hablan en favor de una contestación afirmativa. Como nuestras conclusiones no son definitivas, dejamos su publicación para otra oportunidad, y en el presente artículo solamente queremos indicar cómo la consideración de algunos aspectos más simples y elementales de este problema, conducen naturalmente a aplicaciones interesantes en la teoría de funciones holomorfas.

En efecto, veremos que el examen del caso de la función lineal conduce a una mayorante general para el máximo módulo, que viene a ser como un complemento del teorema de las dos constantes de Nevanlinna, y de la cual se puede deducir con un mismo procedimiento diversos teoremas de la teoría de funciones analíticas.

Esta mayorante puede servir también para el estudio de algunos problemas en que interviene la integral de Denjoy; así por ejemplo una de las consecuencias que se deducen de esta mayorante es la siguiente: Fatou demostró que toda función armónica dada por la integral de Poisson de una función generatriz $u(t)$ que es integrable Lebesgue, es continua radialmente en todo punto individual en que $u(t)$ es igual a la derivada de su primitiva; podemos generalizar este teorema reemplazando la integrabilidad Lebesgue por la de Denjoy y la derivación ordinaria por la derivación aproximativa.

Queremos, pues, en este artículo, justificar nuestra creencia de que la extensión del principio de conservación de dominios para el punto de densidad, prepararía el camino para ulteriores estudios de cuestiones de las funciones holomorfas en que intervienen las particularidades de la teoría de Denjoy.

I. *Coeficiente y espesor de densificación.*

§ 1. En lo que sigue designaremos con D al círculo $|z|<1$, con Γ su contorno $|z|=1$, con E un conjunto medible de medida >0, y con $|E|$ la medida de E, plana o lineal, según que E esté situado en D o sobre Γ.

Si δ es un dominio o un intervalo, según se trate de conjunto plano o lineal, escribiremos

$$Q(E;\,\delta)=\frac{|E\cdot\delta|}{|\delta|}$$

de modo que es

$$0\leqq Q(E;\,\delta)\leqq 1.$$

Se sabe que un punto z se llama punto de densidad de E si, siendo δ un cuadrado de lados paralelos a los ejes que contiene a z, se verifica

$$\lim_{|\delta|\to 0} Q(E;\,\delta)\to 1,$$

y según un teorema clásico de Lebesgue casi todos los puntos de E son de densidad de él.

Además, para mayor comodidad, en el caso en que E sea un conjunto plano, vamos a cambiar en la definición anterior la condición de que δ es un cuadrado por la de que δ es un círculo. Con estas modificaciones todavía subsiste, como se sabe, el teorema mencionado de Lebesgue, de modo que ambas definiciones son equivalentes salvo a lo sumo para puntos de un conjunto de medida nula, y si E es un conjunto lineal las dos definiciones son, evidentemente, completamente equivalentes.

Finalmente, de acuerdo a la definición de Denjoy, se dice que $f(x)$ es aproximativamente continua en el punto a, si para todo $\varepsilon>0$ es a punto de densidad del conjunto de los puntos x tales que $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$; esta definición equivale a esta otra: *a es punto de densidad de un conjunto G tal que $f(x)$ es continua relativamente a este conjunto.* Análogamente se define la derivación aproximativa en un punto (*).

§ 2. El caso de un punto de densidad más simple es el de punto interior; para tal punto existe un $\eta>0$ tal que $|\delta|<\eta$ im-

(*) Ver por ej. Hobson, *The theory of functions*, etc., V. I, pág. 312.

plica $Q(E;\delta)=1$; es decir que el punto interior se nos presenta como el de máxima densificación posible.

Nace, pues, naturalmente la idea de la rapidez o velocidad con la cual se produce la densificación. Esta rapidez puede ser medida por el

$$\lim_{|\delta|\to 0}\frac{1-Q(E;\delta)}{|\delta|}=\lim_{|\delta|\to 0}\frac{Q(\bar{E};\delta)}{|\delta|^2}=Q_1(z;E)\geqq 0,$$

siendo $\bar{E}$ el complementario de E.

Al número $Q'(z;E)$ lo denominaremos *coeficiente de densificación* de z respecto de E. Para un punto z interior será $Q'(z;E)=0$, para un punto de densificación muy lenta será $Q'(z;E)=\infty$. Más generalmente, cabe considerar todavía los coeficientes de *densificación* (λ) que son los límites

$$Q'_{[\lambda]}(z;E)=\lim_{|\delta|\to 0}[1-Q(E;\delta)]/|\delta|^{\lambda}=\lim_{|\delta|\to 0}Q(\bar{E};\delta)/|\delta|^{1+\lambda},$$

$$\bar{E}=\text{compl. }E$$

Diremos que z es un punto de densidad (λ) si $Q'_{[\lambda]}(z;E)$ es >0 y $<\infty$; diremos que z es un punto de densidad *fuerte* si es además $\lambda>1$. De acuerdo a estas definiciones diremos que $f(t)$ es aproximativamente continua (λ) en el punto t_0, si t_0 es un punto de densidad (λ) de un conjunto sobre el cual f es continua. Análogamente se definen las funciones aproximativamente continuas en sentido fuerte, y las funciones aproximativamente derivables (λ) o en sentido fuerte.

Finalmente llamaremos «conjunto igualmente denso a» a los conjuntos tales que todos sus puntos tienen el mismo coeficiente de densidad a.

Vamos a dar ahora algunos ejemplos sencillos que prueban que las definiciones anteriores no son vacías.

§ 3. Sea δ_0 un cuadrado (de lados paralelos a los ejes) de lado $=1$, y

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n+\ldots=S<1$$

una serie de términos positivos tal que

$$4^n R_n \to a > 0,$$

siendo

$$R_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots$$

Tracemos los dos ejes de simetría de δ_0 que unen los puntos medios de los lados. A lo largo de cada eje tracemos un rectángulo que tenga como eje de simetría a este eje y cuyos vértices estén sobre los lados del cuadrado cuyos puntos medios une dicho eje. Estos dos rectángulos forman así una figura K_0 en forma de una cruz, y como $\varepsilon_0 < S < 1$, podemos conseguir que el área de esta cruz sea igual a $|K_0| = \varepsilon_0$. Como $\delta_0 - K_0$ se compone de 4 cuadrados $\delta_1^1, \dots, \delta_1^4$, la medida de cada uno de los cuales es $(1-\varepsilon_0)/4 > (S-\varepsilon_0)/4 > \varepsilon_1/4$, podemos inscribir en cada cuadrado δ_1^i una cruz K_1^i en igual forma como lo hicimos con δ_0, y de medida $|K_1^i| = \varepsilon_1/4$. La medida de las 4 cruces es por lo tanto $|\Sigma K_1^i| = \varepsilon_1$. Análogamente, como $\delta_0 - K_0 - \sum_1^4 K_1^i$ se compone de 4^2 cuadrados $\delta_2^1, \dots, \delta_2^{16}$, la medida de cada uno de los cuales es $(1-\varepsilon_0-\varepsilon_1)/4^2 > \varepsilon_2/4^2$, podemos inscribir en cada uno de estos cuadrados δ_2^i una cruz K_2^i de medida $\varepsilon_2/4^2$. Siguiendo así, después de n operaciones quedarán 4^n cuadrados iguales δ^i_n, tales que

$$|\delta^i_n| = [1 - (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1})]/4^n > \varepsilon_n/4^n$$

y podemos inscribir en cada δ^i_n una cruz K^i_n de medida

$|K_n^i| = \varepsilon_n/4^n$, resultando por lo tanto $|\sum_{i=1}^{4^n} K_n^i| = \varepsilon_n$.

Sea ahora $K = \sum_0^\infty K_n^i$ y $E = \delta_0 - K$.

Como $|K| = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots = S < 1$ es $|E| > 0$; vamos a mostrar que todo punto z de densidad de E tiene coeficiente de densificación $\geqq a$. En efecto, como z pertenece a E existe una sucesión de cuadrados $\delta^{i_1}_{n_1} \supset \delta^{i_2}_{n_2} \supset \dots$ que contienen a z y cuyo diámetro tiende a cero con $n_i \to \infty$. Tenemos

$$[1-Q(E,\delta_{n_r}^{i_r})]:|\delta_{n_r}^{i_r}|=[|\delta_{n_r}^{i_r}|-|E\frown\delta_{n_r}^{i_r}|]:|\delta_{n_r}^{i_r}|^2=|\sum_{m>n_r}K_{n_r}^{i_r}|/|\delta_{n_r}^{i_r}|^2$$

$$=\left[\frac{\varepsilon_n}{4^n}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{4^{n+1}}+\dots\right]/|\delta_{n_r}^{i_r}|^2\geqq\frac{1}{4^n}R_n/\frac{1}{4^{2n}}=4^nR_n\longrightarrow a$$

es decir que $Q'(z,E)\geqq a$. Con el mismo procedimiento podemos conseguir que sea $Q'(z,E)=a$ y en general construir diversos tipos de densificación uniforme, finita o infinita.

Veamos ahora un ejemplo de conjuntos que tienen en un punto dado un coeficiente de densidad (λ) prefijado. Sea E un conjunto plano y $\varphi(r)$ la medida (lineal) del conjunto formado por los puntos de E cuyo módulo es $|z|=r$. Entonces si δ_r es el círculo $|z|\leqq r$, tendremos en el origen,

$$Q(E,\delta_r)=\int_0^r r\varphi(r)\,dr/\pi r^2,$$

$$Q'(0,E)=\lim\int_0^r r[2\pi r-\varphi(r)]dr/\pi^2r^4=\lim_{r\longrightarrow 0}\int_0^r r\psi(r)dr/\pi^2r^4$$

siendo $\psi(r)$ la medida lineal del conjunto de los puntos de la circunferencia $|z|=r$ que pertenecen al complementario de E. Si hacemos por ejemplo $\psi(r)=Kr^2$ tendremos

$$Q'(E,0)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{K}{4}r^4/\pi^2r^4=K/4\pi^2=K_1,$$

o sea que el origen es un punto que tiene por coeficiente de densidad un número prefijado K_1.

Más general, tomando $\psi(r)=Kr^m$, podemos conseguir que el origen sea un punto de densidad $\lambda=m-2$ o punto de densidad fuerte, con λ prefijado.

§ 4. El caso particular del punto interior nos sugiere otra forma de comparar la rapidez de densificación; en efecto, si E es un intervalo lineal, los puntos más próximos al centro del intervalo son, por decir así, más interiores que aquellos puntos que están más cerca a los extremos. Es decir, entre dos puntos interiores uno puede tener mayor «grado de interioridad» o como diremos nosotros, mayor *espesor*, respecto al intervalo. El espesor de un punto respecto de un intervalo es pues la distancia d

del mismo al complementario del intervalo. Podemos decir que esta distancia d es el mayor número d para el cual $|\delta|<d$ es compatible con $1-Q(E;\delta)=0$. Resulta pues natural emplear la siguiente definición:

Si z es punto de densidad del conjunto E, dado un $\varepsilon>0$, *llamaremos ε-espesor de densificación de z respecto de E*, al máximo número $d(\varepsilon)$ tal que $|\delta|<d(\varepsilon)$ es compatible con

$$1-Q(E;\delta)<\varepsilon.$$

La siguiente propiedad nos será útil más adelante.

Teorema. *Sean: E un conjunto lineal, x un punto de densidad del mismo, $m=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ = parte entera de $(1-\varepsilon)/\varepsilon$, I_ε un intervalo que tenga a x como extremo izquierdo y de longitud $\leqq d(\varepsilon)$, siendo $d(\varepsilon)=\varepsilon$-espesor de densificación de x respecto de E. Entonces para todo $\eta>0$ existe una subdivisión no-rampante de I_ε en dos grupos $I_1,\ldots I_k, J_1,\ldots J_k$, siendo los I_i, J_i, intervalos o sumas de intervalos que verifican las tres condiciones siguientes:*

1ª. *J_i está a la izquierda de I_i;*

2ª. $|J_i|\geqq(m-2)|I_i|$;

3ª. *Si $\overline{E}$ es el complementario de E relativo a I_ε, es*

$$|\overline{E}\frown(J_1+\ldots+J_k)|<\eta.$$

Demostración: Sean $I_\varepsilon=(x-y)$, x_1 un punto de I_ε tal que $x_1-x=\eta/2$, $\overline{E}_1=\overline{E}-I_0$, siendo $I_0=(x-x_1)$. Como $\overline{E}_1$ es medible, existe un número finito de intervalos no-rampantes $I_1, \ldots, I_k$ tales que

$$|(I_1+\ldots+I_k)-\overline{E}_1|<\eta/2m^2 \tag{1}$$

y

$$|\overline{E}_1-(I_1+\ldots+I_k)|<\eta/2. \tag{2}$$

Sea finalmente $G=I_\varepsilon-\sum_1^k I_i$, de modo que

$$|G\frown\overline{E}|\leqq|I_0\smile(\overline{E}_1-I_1-\ldots-I_k)|<\eta/2+\eta/2=\eta. \tag{3}$$

Por definición de $d(\varepsilon)$ para todo intervalo $I\subset I_\varepsilon$ que tenga a x por extremo izquierdo se tiene

$$1-|I\frown E|/|I|<\varepsilon,\quad \frac{|I-I\frown E|}{\varepsilon}<|I|$$

luego con más razón

$$m|I \frown \overline{E}| = m|I - I \frown E| < |I|. \tag{4}$$

Supongamos que los intervalos $I_1, \ldots I_k$ estan numerados según sus distancias al punto x, de modo que I_1 es el más próximo a x. Sea $I'_1 \supset I_1$ el intervalo que tiene por un extremo a x y por otro al extremo derecho de I_1. En virtud de (4) es

$$m|I_1 \frown \overline{E}_1| < m|I'_1 \frown \overline{E}| < |I'_1|$$

y en virtud de (1) es

$$m|I_1 - \overline{E}_1| < \frac{\eta}{2m}$$

de donde resulta que

$$(m-1)|I_1| = (m-1)|I_1 \frown \overline{E}_1| + (m-1)|I_1 - \overline{E}_1|$$
$$< (m-1)\frac{|I'_1|}{m} + \frac{\eta}{2m} < (m-1)\frac{|I'_1|}{m} + \frac{|I'_1|}{m} = |I'_1|$$

o sea que

$$|I'_1 - I_1| > (m-2)|I_1|,$$

es decir que podemos tomar un intervalo $J_1 \subset I'_1 - I_1$ que tenga por un extremo a x y de medida $|J_1| = (m-2)|I_1|$, obteniéndose así el primer intervalo deseado. Llamando $I_2' \supset I_2$ al intervalo que tiene por un extremo a x y por otro al extremo derecho de I_2, tendremos de (4) y (1) que

$$m|(I_1 + I_2) \frown \overline{E}_1| < |I_2'| \quad \text{y} \quad m|I_1 + I_2 - \overline{E}_1| < \frac{\eta}{2m}$$

luego

$$(m-1)|I_1 + I_2| < \frac{m-1}{m}|I_2'| + \frac{\eta}{2m} < |I_2'|$$

y, como

$$(m-1)|I_1|=|J_1|+|I_1|,$$

resulta

$$(m-1)|I_2|<|I_2'-(J_1+I_1)|,$$

es decir que podemos tomar un $J_2 \subset I_2'-(J_1+I_1)$ que sea interior a I_2' y tal que $|J_2|=(m-2)\,|I_2|$. Siguiendo de la misma forma obtendremos

$$G=J_1+J_2+\ldots+J_k$$

donde J_i precede a I_i y $|J_i| \geqq (m-2)|I_i|$, de modo que se verifican las condiciones 1ª. y 2ª. de la tesis. Recordando que $|G-E|<\eta$, resulta también la condición 3ª., l. q. d. d.

II. *La invariancia de la densidad en la transformación conforme para un punto regular.*

§ 5. Si $w=f(z)$ es holomorfa en D, se sabe que ella transforma todo punto interior en punto interior. Probaremos ahora que la *función holomorfa conserva el punto de densidad,* si en este punto es regular la función. En efecto, sea E un conjunto plano interior a D, $z_0=x_0+iy_0$ un punto de densidad de E y $z^*=f(z)$, $E^*=f(E)$. Supongamos antes que $|f'(z_0)|=K>0$, de modo que en un cierto entorno de z_0^*, de radio ρ, $f(z)$ es univalente; por lo tanto si δ^* es un círculo del plano w con centro en z_0^* y radio $=r\rho$, $r<1$, existe un dominio δ del plano z que contiene a z_0 y tal que $f(\delta)=\delta^*$. Tenemos, entonces,

$$Q(E^*,\delta^*)=\frac{|E^*\frown\delta^*|}{|\delta^*|}=\frac{\iint_{E^*\frown\delta^*}du\,dv}{\iint_{\delta^*}du\,dv}=\frac{\iint_{E\frown\delta}|f'(z)|^2dx\,dy}{\iint_{\delta}|f'(z)|^2dx\,dy}\leqq$$

$$\leqq\frac{M^2|E\frown\delta|}{m^2|\delta|}=\frac{M^2}{m^2}Q(E,\delta),$$

siendo M y m el máximo y mínimo de $|f'(z)|$ en δ. En forma análoga se acota $Q(E^*,\delta^*)$ inferiormente, de modo que se tiene

$$\frac{m^2}{M^2} Q(E, \delta) \leqq Q(E^*, \delta^*) \leqq \frac{M^2}{m^2} Q(E, \delta). \qquad (1)$$

Si $\varphi = f^{-1}$ es la función inversa de f, ella es holomorfa y univalente en el entorno de z_0^* considerado, y como $|\varphi'(z_0^*)| = 1/K$ se tiene para $|z^* - z_0^*| < r\rho$, en virtud de las propiedades conocidas de funciones univalentes, que

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{r}{(1+r)^2} \leqq |\varphi(z^*) - \varphi(z_0^*)| \leqq \frac{1}{K} \frac{r}{(1-r)^2},$$

luego es $\delta_1 \subset \delta \subset \delta_2$, siendo δ_1, δ_2 dos círculos de centro z_0 y radios $r_1 = r/K(1+r)^2$, $r_2 = r/K(1-r)^2$, respectivamente. Luego tenemos

$$\frac{|E \frown \delta_1|}{\pi r_2^2} \leqq \frac{|E \frown \delta|}{|\delta|} \leqq \frac{|E \frown \delta_2|}{\pi r_1^2};$$

pero como δ_1 es un círculo y z_0 punto de densidad es

$$\lim \frac{|E \frown \delta_1|}{\pi r_2^2} = \lim \frac{|E \frown \delta_1|}{\pi r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = Q(E, \delta_1) \frac{(1-r)^4}{(1+r)^4} \to 1,$$

y análogamente

$$\lim \frac{|E \frown \delta_2|}{\pi r_1^2} \to 1,$$

luego es $\lim Q(E, \delta) = 1$, que en virtud de (1) da

$$\lim Q(E^*, \delta^*) = 1,$$

lo que prueba que z_0^* es de densidad del conjunto transformado E^*.

Si $f'(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0)$ es la primera derivada no nula, este caso se reduce fácilmente al anterior haciendo

$$f(z) = f(z_0) + t^n, \quad t = F(z) = \sqrt[n]{f(z) - f(z_0)}, \quad F'(z_0) \neq 0$$

y tomando en cuenta que t^n deja a su vez, como es fácil verlo, invariante el punto de densidad, l. q. d. d.

Consideremos ahora el caso en que E es un conjunto lineal situado sobre Γ y ζ_0 un punto de densidad (lineal) de E; entonces si $f(\zeta)$ es analítica sobre Γ (en un entorno de ζ_0) todavía se aplican las consideraciones anteriores. En efecto, si $f'(\zeta_0) \neq 0$, es $f(z)$ univalente en un pequeño entorno de ζ de modo que un intervalo lineal δ de Γ se transforma en otro arco de curva δ^* de Γ^* y se tendrá como antes

$$\frac{m}{M} Q(E, \delta) \leqq Q(E^*, \delta^*) \leqq \frac{M}{m} Q(E, \delta)$$

y por lo tanto es $\lim Q(E^*, \delta^*) = 1$, y análogamente se extiende la demostración para el caso en que $f'(\zeta_0) = 0$.

En el caso general de una función univalente pero no analítica sobre Γ (holomorfa en D), parece que todavía se conserva la propiedad de invariancia del punto de densidad, pero aquí no nos vamos a ocupar de este problema por no haber obtenido aún resultados definitivos. Solamente observamos que en virtud de un teorema de Lusin y Riesz, $f(z)$ transforma un conjunto de medida nula de Γ en otro también de medida nula, es decir que sobre Γ se verifica la condición (N) de Lusin, luego en virtud del teorema de Lebesgue, $f(z)$ conserva casi todos los puntos de densidad de $E \subset \Gamma$; pero esto no permite todavía asegurar que todo punto *individual* de densidad se transforma en otro de densidad también.

§ 6. También es fácil ver como se transforma el coeficiente de densidad en un punto regular. Sea antes E un conjunto plano interior a D y z_0 un punto de densidad de coeficiente de densidad a. Si $f'(z_0) \neq 0$, tenemos

$$\frac{1-Q(E^*, \delta^*)}{|\delta^*|} = \frac{\iint_\delta - \iint_{E \frown \delta} |f'(z)|^2 dx dy}{|\delta^*| \cdot \iint_\delta |f'|^2 dx dy} = \frac{|\delta|}{|\delta^*|} \cdot \frac{\iint_{\delta - E} |f'|^2 dx dy}{|\delta| \cdot \iint_\delta |f'|^2 dx dy}$$

de donde resulta

$$\frac{|\delta - E \frown \delta|}{|\delta|^2} \cdot \frac{m^2}{M^2} \frac{|\delta|}{|\delta^*|} \leqq \frac{1-Q(E^*, \delta^*)}{|\delta^*|} \leqq \frac{|\delta - E \frown \delta|}{|\delta|^2} \cdot \frac{M^2}{m^2} \frac{|\delta|}{|\delta^*|} . \tag{2}$$

Por otra parte, con las mismas notaciones del párrafo anterior tendremos

$$\frac{|\delta_1|^2}{|\delta_2|^2}\,\frac{|\delta_1 - E \frown \delta_1|}{|\delta_1|^2} \leqq \frac{|\delta - E \frown \delta|}{|\delta|^2} \leqq \frac{|\delta_2 - E \frown \delta_2|}{|\delta_2|^2}\cdot\frac{|\delta_2|^2}{|\delta_1|^2}$$

y puesto que δ_1, δ_2 son círculos, es por hipótesis

$$\lim \frac{|\delta_1 - E \frown \delta_1|}{|\delta_1|^2} = \lim \frac{|\delta_2 - E \frown \delta_2|}{|\delta_2|^2} = a,$$

resulta, tomando en cuenta que

$$\lim \frac{|\delta_1|^2}{|\delta_2|^2} = \lim \frac{(1-r)^4}{(1+r)^4} = 1,$$

que

$$\lim \frac{|\delta - E \frown \delta|}{|\delta|^2} = a.$$

Tomando en cuenta que

$$\lim \frac{|\delta|}{|\delta^*|} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2}$$

obtenemos de (2):

$$b = \lim \frac{1 - Q(E^*, \delta^*)}{|\delta^*|} = \frac{a}{|f'(z_0)|^2}, \tag{3}$$

que es la fórmula de transformación del coeficiente de densidad en el caso en que $f'(z_0) \neq 0$.

En el caso general, $f'(z_0) = 0$, el cociente b/a depende de la estructura del conjunto $\bar{E}$, como se ve por ejemplo en el caso de $f(z) = z^2$. En efecto, supongamos para simplificar, $z_0 = 0$, y sea $\bar{E}_r$ el conjunto de los puntos situados sobre la circunferencia $|z| = r$ y que pertenecen al complementario de E. Supongamos antes que E es un conjunto tal que $\bar{E}_r$ se compone de dos arcos simétricos respecto del origen y de longitud $\varphi(r) < \pi r$, de modo que $|\bar{E}_r| = 2\varphi(r)$. Si E^* es el conjunto transformado de E por

la función $f(z)=z^2$ tendremos $|\overline{E}_r^*|=2\varphi(\sqrt{r})$, luego si δ es un círculo de radio R, es

$$b=\lim_{R\to 0}\frac{1-Q(E^*,\delta)}{|\delta|}=\lim\frac{Q(\delta-E^*)}{|\delta|^2}=\lim\frac{\int_0^R r|\overline{E}^*_r|dr}{\pi^2R^4}=$$

$$=\lim_{R\to 0}\frac{\int_0^R r2\varphi(\sqrt{r})dr}{\pi^2R^4}$$

y

$$a=\lim_{R\to 0}\frac{Q(\delta-E)}{|\delta|^2}=\lim_{R\to 0}\frac{\int_0^R 2r\varphi(r)dr}{\pi^2R^4}.$$

Haciendo, por ejemplo, $\varphi(r)=r^2$, tendremos

$$b=\lim_{R\to 0}\frac{2\int_0^R r^3dr}{\pi^2R^4}\to\infty,\quad a=\lim_{R\to 0}\frac{2\int_0^R r^2dr}{\pi^2R^4}\to\frac{1}{2\pi^2}$$

luego

$$b/a\to\infty.$$

En cambio, si E es un conjunto tal que $\overline{E}_r$ se compone de un solo arco de longitud $\varphi(r)<\pi r$, es $|\overline{E}_r|=\varphi(r)$ y $|\overline{E}^*_r|=0$; luego es $b=0$, mientras que $a=\frac{1}{4\pi^2}$; luego

$$b/a=0.$$

De modo que no se puede dar una relación entre b y a que sirva para todo E. En todo caso, llamando $\lambda_n(E)$ el coeficiente de densidad transformado por la función $w=z^n$, tendremos que si $f'(z_0)=0$ y $f^{(n)}(z_0)$ es la primera derivada no nula, entonces es

$$b=\lambda_n(E)\,.\,\frac{a}{|\sqrt[n]{f^n(z_0)}|^2}.$$

Designando como antes con $\varphi(r)$ la medida del conjunto $\overline{E}_r$ de los puntos de la circunferencia $|z|=r$ pertenecientes al complementario de E, tendremos

$$\lambda_n(E) \leqq \lim_{R \to 0} \frac{\int_0^R r\varphi(\sqrt[n]{r})dr}{\pi^2 R^4},$$

de modo que $\lambda_n(E)$ depende de la estructura de $E(r)$ y del $\lim \varphi(r)/r$.

Finalmente la fórmula (3) se extiende fácilmente para el caso de $E \subset \Gamma$, si $f(z)$ es analítica en un punto ζ_0 de E; y, repitiendo los mismos razonamientos se tendrá

$$b = \frac{a}{|f'(\zeta_0)|} \tag{3 a}$$

para $f'(\zeta_0) \neq 0$ y

$$b = \lambda'_n(E) \frac{a}{\sqrt[n]{|f^n(\zeta_0)|}}$$

si $f^n(\zeta_0)$ es la primera derivada que no se anula en ζ_0.

§ 7. Si z_0 es un punto de densidad de E con coeficiente de densidad $=a$, y si b es el coeficiente del punto transformado z_0^* respecto del conjunto E^*, nace inmediatamente la idea que a puntos próximos a z_0, corresponden puntos transformados más o menos próximos a z_0^*, según el valor de b; es decir el agrupamiento de puntos alrededor de z_0 es más o menos rápido que el agrupamiento alrededor de z_0^*, según que sea $b \gtrless a$, y por lo tanto implicaría este hecho, intuitivamente, un uniforme distanciamiento o la uniforme continuidad. Así en el caso del punto interior, $a=0$, sabemos que efectivamente toda limitación de la expansión del área transformada implica una igual continuidad, como ocurre en los teoremas de Bloch y de Montel. Para $a \neq 0$, se ve de la fórmula (3) que la limitación del coeficiente de densidad implica una limitación de $|f'(z)|$ y por lo tanto pueden obtenerse criterios de igual continuidad limitando los coeficientes de densidad. Así, por ejemplo:

Sea $E \subset D$ un conjunto igualmente denso de coeficiente $a \neq 0, \infty$ y $\{f(z)\}$ una familia de funciones tales que los coeficientes de densidad de los conjuntos $f(E)$ no toman un valor fijo $b \neq 0, \infty$. Entonces si en los demás puntos de $D-E$, las derivadas $f'(z)$ no toman dos valores K_1, K_2 de módulo $|K_1| = |K_2| = \sqrt{a/b}$, la familia es igualmente continua. En efecto, si $f'(z) = 0$ es $f'(z) \neq b/a$, y si $f'(z) \neq 0$ resulta de la fórmula (3) y de la hipótesis que $b \neq a/|f'(z)|^2$ para z perteneciente a E, luego $f'(z)$ no toma en E ningún valor de módulo $= \sqrt{a/b}$ y en particular no toma los valores K_1, K_2. Luego las $f'(z)$ no toman 2 valores en D y la tesis resulta de teoremas clásicos de las familias normales.

Análogamente de (3 a) resulta este otro criterio:

Sea $E \subset \Gamma$ un conjunto igualmente denso de coeficiente $a \neq 0, \infty$, y $\{f(z)\}$ una familia de funciones holomorfas en D y analíticas sobre Γ tales que los coeficientes de los conjuntos $f(E)$ no toman un valor $b \neq 0, \infty$. Entonces si en $\Gamma - E$ es $|f'(z)| < a/b$ la familia es igual continua en $D + \Gamma$. En efecto, de (3 a) resulta que $|f'(z)| \neq a/b$ para z perteneciente a E, y como en $\Gamma - E$ es $|f'| < a/b$, es $|f'(z)| \neq a/b$ para todo z perteneciente a Γ. Como $a \neq 0$, $\Gamma - E$ no es vacío y contiene por lo menos un punto z_1. Luego si fuera para un z_2 de Γ, $|f'(z_2)| > a/b$, como $|f'|$ es continua, habría entre un z entre z_1 y z_2 para el cual se tendría $|f'(z)| = a/b$, lo que es imposible. Luego es $|f'(z)| < a/b$ para z perteneciente a Γ y con más razón para z perteneciente a D, l. q. d. d.

Si z_0 es un punto interior y $|f(z)| < M$, un lema clásico nos dice que al variar z en un entorno fijo de z_0 los valores $f(z)$ cubren un círculo de centro $f(z_0)$ y radio fijo. Esto equivale a decir que podemos establecer una cota inferior para el espesor respecto del dominio transformado. Análogamente se puede dar una cota para el ε-espesor en el caso de un punto de densidad de un conjunto cualquiera de D, así como generalizar el teorema de Bloch en el mismo sentido, obteniéndose nuevos criterios de igual-continuidad del mismo tipo que los indicados más arriba, pero utilizando en vez del coeficiente de densidad el ε-espesor de densidad. Dejando los detalles para otra oportunidad, examinaremos ahora solamente cómo se transforma el ε-espesor de un punto del

contorno en el caso de una familia muy particular: la de funciones homográficas.

III. *Transformación del espesor de densidad en la sustitución homográfica.*

§ 8. Vamos ahora a considerar una familia particular de funciones lineales y examinemos cómo se transforma el ε-espesor de un punto del contorno, de modo que los conjuntos E de la presente sección son situados sobre el contorno F y por lo tanto las medidas respectivas son lineales.

Empecemos con el caso particular en que E es un arco AB de F de longitud l, y sea $t_0 = e^{i\vartheta_0}$ un punto interior del mismo, y supongamos que por ejemplo A es el extremo más próximo a este punto. La longitud $d = t_0 A$ expresa entonces el espesor, o grado de interioridad, del punto t_0 respecto el conjunto $E = AB$.

Sea $g(z,\zeta) = (z-\zeta):(1-\bar{\zeta}z)$ la función lineal que transforma el círculo unitario D en sí mismo, de modo que el punto $\zeta = re^{i\vartheta}$ se corresponde con el origen, y sean $AB^*, t_0^* = e^{i\vartheta_0^*}$, l^*, d^* los transformados de los elementos AB, t_0, l, d, en esta sustitución.

Sometemos ahora al punto ζ a la condición: $\arg\zeta = \arg t_0 = \vartheta_0$, es decir que ζ varíe sobre el radio $0t_0$, y sea $\{g(z,\zeta)\}$ la familia de todas las sustituciones homográficas así obtenidas. Tendremos, por lo tanto, para todo ζ, que la mínima distancia de ζ al arco $F - AB$ es $\geqq \operatorname{sen} d = d_1$.

Cuando $z = t$ varía sobre el contorno F, $|t| = 1$, es $|g'(t)| = (1-|\zeta|^2):|t-\zeta|^2$, luego

$$2\pi - l^* = \text{longitud de } (F - AB^*) =$$

$$\int_{\Gamma - AB} |g'_t(t,\zeta)|\,|dt| = \int_{\Gamma - AB} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}\,|dt|$$

de donde resulta:

$$2\pi - l^* \leqq \frac{1-|\zeta|^2}{d_1^2}(2\pi - l) \qquad \text{(I)}$$

Por otra parte si A' es un punto de t_0B tal que $A't_0 = At_0$, es

$$d^* = \int_{t_0 A} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt| = \frac{1}{2}\int_{AA'} = \frac{1}{2}\left[2\pi - \int_{\Gamma - A_1A} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt|\right]$$

y en virtud de (I) la última integral que figura en el paréntesis, es menor que $\frac{1-|\zeta|^2}{d^2}(2\pi - 2d)$; luego, para un ζ tal que $\frac{1-|\zeta|^2}{d^2} \leqq 1$ es

$$d^* \geqq \frac{1}{2}[2\pi - (2\pi - 2d)] = d,$$

y para un ζ tal que $(1-|\zeta|^2)/d^2 \geqq 1$ se encuentra directamente $d^* \geqq d$; luego es siempre

$$d^* \geqq d. \qquad \text{(II)}$$

Las fórmulas (I) y (II) expresan los conceptos siguientes:

1º. *Para* $\zeta \to t_0$ *es* $2\pi - l^* \to 0$, *es decir cuando* $\zeta \to t_0$ *el arco transformado de* $\Gamma - AB$ *se reduce a cero.*

2º. *La rapidez con que se produce esta reducción a cero de* $2\pi - l^*$ *depende (es proporcional al cuadrado) del espesor, o grado de interioridad, d, del punto* t_0.

3º. *Los puntos transformados* t_0^* *tienen respecto a los arcos transformados* AB^* *un espesor uniforme, mayor o igual que el espesor de* t_0 *respecto de* AB.

§ 9. Veamos si las fórmulas (I) y (II) y sus consecuencias 1º., 2º., 3º. se conservan si en vez de un arco AB tomamos un conjunto $E \subset \Gamma$ cualquiera de medida l, y cambiando la condición de ser t_0 punto *interior* por la de ser punto de *densidad* de E. Evidentemente, las fórmulas (I), (II) no son más válidas si t_0 no es interior a E, porque entonces t_0 puede ser de acumulación de puntos de $\Gamma - E$ y la distancia de ζ a $\Gamma - E$ ya no tiene cota inferior > 0 y el número d_1 no tiene más sentido en este caso. Pero podemos salvar la validez de estas fórmulas si cambiamos el concepto de grado de interioridad por el de

ε-espesor de densificación, es decir si consideramos en vez de d el ε-espesor $d(\varepsilon)$. En efecto, por definición de $d(\varepsilon)$, dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno $\delta_\varepsilon = \delta_0$ de t_0 tal que para todo $\delta \subset \delta_0$ que contiene a t_0 se verifica $1 - Q(E, \delta) < \varepsilon$. En virtud del teorema del § 4 podemos subdividir $\delta_0 = \delta_\varepsilon$ en dos grupos $I_1, \ldots I_k$, $J_1, \ldots J_k$ que verifican las 3 condiciones de aquel teorema. Por la 1ª. condición todo punto de J_i es más próximo a t_0 que todo punto de I_i, y por la 2ª. condición es $|J_i| \geqq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} |I_i|$, luego como $|g'(t)| = (1 - |\zeta|^2) : |t - \zeta|^2$ disminuye cuando t se aleja de t_0, resulta que

$$\int_{J_i} |g'(t)| \, |dt| \geqq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_{I_i} |g'(t)| \, |dt|. \tag{1}$$

En virtud de la 3ª. condición es

$$\int_{(J_1 + \ldots J_k) - E} |g'(t)| \, |dt| < \eta_1; \tag{2}$$

tenemos entonces

$$\int_{\delta_0 \frown E} |g'(t)| \, |dt| \geqq \int_{\delta_0 \frown E \frown (J_1 + \ldots J_k)} = \int_{J_1 + \ldots J_k} - \int_{(J_1 + \ldots J_k) - E} \geqq$$

$$\geqq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_{I_1 + \ldots I_k} |g'(t)| \, |dt| - \eta_1 \geqq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\delta_0 - E} |g'(t)| \, |dt| - 2\eta_1$$

de donde resulta

$$\int_{\delta_0 \frown E} |g'(t)| \, |dt| > (1 - \varepsilon) \int_{\delta_0} |g'(t)| \, |dt| - \eta_2 \tag{3}$$

lo que equivale a $1 - Q(E^*, \delta_0^*) < \varepsilon$, o sea que $d^*(\varepsilon) \geqq |\delta_0^*|$; pero en virtud de (II) es $|\delta_0^*| \geqq |\delta_0| = d(\varepsilon)$, luego obtenemos definitivamente

$$d(\varepsilon)^* \geqq d(\varepsilon) \tag{II a}$$

que es una generalizacion de la fórmula (II).

Por otra parte es

$$2\pi - l^* = \int_{\Gamma - E} |g'(t)|\,|dt| = \int_{\Gamma - E - \delta_0} + \int_{\delta_0 - E} |g'(t)|\,|dt|.$$

Al variar t sobre $\Gamma - E - \delta_0$, $|t-\zeta|^2$ se mantiene mayor que $\operatorname{sen} d(\varepsilon) = d_1(\varepsilon)$, de modo que

$$\int_{\Gamma - E - \delta_0} |g'(t)|\,|dt| \leqq \frac{1-|\zeta|^2}{d_1(\varepsilon)^2}(2\pi - l)$$

y, en virtud de (3), es

$$\int_{\delta_0 - E} |g'(t)|\,|dt| \leqq \varepsilon \int_{\delta_0} |g'(t)|\,|dt| + \eta \leqq \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1-|\zeta|^2}{|e^{i\vartheta} - \zeta|^2}\,d\vartheta + \eta \leqq \varepsilon + \eta;$$

luego obtenemos

$$2\pi - l^* \leqq \frac{1-|\zeta|^2}{d_1(\varepsilon)^2}(2\pi - l) + \varepsilon \qquad \text{(I a)}$$

que es la generalización de (I).

De (I a) y (II a) deducimos estos conceptos:

1º a. *Al tender $\zeta \to t_0$ es $2\pi - l^* \to 0$, es decir la medida del conjunto transformado de $\Gamma - E$ se reduce a cero.*

2º a. *La rapidez con la cual se produce esta reducción de $2\pi - l^*$ a cero, es proporcional al cuadrado del ε-espesor de densidad de t_0 respecto del conjunto E.*

3º a. *La familia $g(z, \zeta)$ transforma uniformemente el ε-espesor, siendo el ε-espesor del punto transformado mayor que el ε-espesor del punto t_0.*

Nota. Hemos supuesto que ζ varía sobre el radio $0t_0$, pero los resultados son todavía válidos si ζ varía sobre un arco de circunferencia ortogonal a Γ en t_0; en tal caso las fórmulas I a, II a se complican ligeramente, pero el sentido que expresan queda el mismo.

§ 10. Vamos a extender estos resultados a familias más generales que la familia considerada. Sea $F(z; \zeta)$ una familia

de funciones ($\zeta =$ parámetro), tales que para $z = t = e^{\vartheta}$ se verifica

$$|F'_t(t;\zeta)| = f(\vartheta) \cdot \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}$$

siendo $f(\vartheta)$ una función integrable Lebesgue. Podemos extender todavía para esta familia las fórmulas anteriores, sometiendo a la función $f(\vartheta)$ a hipótesis suplementarias: Sea δ_0 el intervalo (ϑ_0, ϑ) y

$$\Phi(\vartheta) = \int_{\delta_0 - E} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Es fácil ver que si $f(\vartheta)$ es acotada entonces es $\Phi'(\vartheta_0) = 0$, porque ϑ_0 ees un punto de dispersión de $\delta_0 - E$, pero si $f(\vartheta)$ no es acotada no podemos asegurarlo más. Por eso vamos a someter a $\Phi(\vartheta)$ a estas dos condiciones:

a) $\left| \dfrac{\Phi(\vartheta)}{\vartheta - \vartheta_0} \right| < M$, es decir los números derivados de $\Phi(\vartheta)$ son finitos en ϑ_0.

b) $\Phi(\vartheta)$ es aproximativamente derivable con valor 0 en ϑ_0, es decir, existe un conjunto E_0 del cual ϑ_0 es punto de densidad, tal que, si ϑ_1 pertenece a E_0, se verifica

$$\lim_{\vartheta_1 \to \vartheta_0} \frac{\Phi(\vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = 0.$$

En virtud de lo observado más arriba, estas condiciones se verifican si f es acotada (también si es semicontinua en ϑ_0).

Con estas hipótesis, dado ε existe un $d_1(\varepsilon)$ tal que $|\vartheta_1 - \vartheta_0| < d_1(\varepsilon)$, para ϑ_1 perteneciente a E_0, implica $\Phi(\vartheta_1)/(\vartheta_1 - \vartheta_0) < \varepsilon$. Evidentemente ϑ_0 es todavía de densidad del conjunto $E_1 = E \frown E_0$ y la función Φ es con más razón derivable respecto de E_1. Podemos, pues, suponer que el conjunto E_0 sobre el cual es derivable Φ es el mismo que el conjunto E del problema y que $d(\varepsilon)$ es el menor de los números $d(\varepsilon)$, $d_1(\varepsilon)$.

Tomando un ϑ_1 de E tal que $|\delta_1| = |\vartheta_1 - \vartheta_0| < d(\varepsilon)$, ten-

dremos integrando por partes:

$$\int_{\delta_1-E} f(t)\,\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt| = \phi(\vartheta_1)\,\frac{1-|\zeta|^2}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|^2} + O(1)\int_{\delta_1} \phi(\vartheta)\,\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^3}|dt|$$

$$= \frac{\phi(\vartheta_1)}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|} + O(1)\int_{\delta_1-E} + \int_{\delta_1\cap E} \frac{\phi(\vartheta)}{\vartheta-\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta-\vartheta_0}{|t-\zeta|}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt|.$$

Cuando ϑ pertenece a E, es por hipótesis $|\phi(\vartheta):(\vartheta-\vartheta_0)|<\varepsilon$, luego la última integral es menor que

$$2\varepsilon\int_{\delta_1\cap E} \frac{\vartheta-\vartheta_0}{|t-\zeta|}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt| < \varepsilon_1,$$

y para ϑ perteneciente a δ_1-E es $|\phi(\vartheta):(\vartheta-\vartheta_0)|<M$ luego la primera integral es menor que

$$O(1)\int_{\delta_1-E} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt|$$

y esta última es, por lo visto en el § anterior, $\leqq O(1)\,\varepsilon$. Finalmente, como ϑ_1 pertenece a E es

$$\frac{\phi(\vartheta_1)}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|} = \frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{\phi(\vartheta_1)}\cdot 0(1) < \varepsilon.$$

Resulta en definitiva entonces

$$\int_{\delta_1-E} f(t)\,\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt| < \varepsilon + 2M\varepsilon + \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Sobre $\Gamma-\delta_1-E$ es, en virtud de lo visto en el § 8,

$$\int_{\Gamma-\delta_1-E} f(t)\,\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}|dt| < \frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2}\int_{\Gamma} f(t)\,|dt| < N\,\frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2}$$

y por lo tanto concluimos que

$$2\pi - l^* = \int_{\Gamma - E} f(t) \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} |dt| \leqq N \frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2} + 2M\varepsilon_1, \qquad \text{(II b)}$$

siendo N el máximo de $\int_\Gamma |f(t)|\,|dt|$ y M la cota de la condición a).

Por otra parte, siendo δ_1 fijo, suponiendo $f \neq 0$, es

$$\int_{\delta_1} f(t) \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} |dt| > m > 0.$$

donde m es independiente de ζ, luego es

$$\int_{\delta_1 - E} f(t) \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} |dt| : \int_{\delta_1} f(t) \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} |dt| \leqq \frac{2M\varepsilon_1}{m^2} \qquad \text{(I b)}$$

que es una generalización de la fórmula (I a).

Todos estos resultados se generalizan si cambiamos la función $(1-|\zeta|^2) : |t-\zeta|^2$ por otra $\varphi(\vartheta, \zeta)$ cualquiera, que verifica las 2 condiciones:

1) $\varphi(\vartheta, \zeta)$ es positiva;

2) $\varphi(\vartheta, \zeta) \leqq \varphi(\vartheta_1, \zeta)$ si $|\vartheta - \vartheta_0| > |\vartheta_1 - \vartheta_0|$,

porque estas son las únicas propiedades de dicha función que hemos utilizado en las demostraciones. Finalmente también en (II b) ζ puede variar sobre un arco ortogonal a Γ en ζ_0, pero las fórmulas se complican.

Nota. En el caso de un punto interior, las fórmulas (I), (II) son en el fondo las condiciones para que un núcleo de la serie de Fourier sea positivo (*), de modo que las fórmulas (I a), (II a) y (I b) vienen a ser generalizaciones de las propiedades del núcleo de Poisson, pero a la cual hemos llegado bajo un punto de vista distinto: el de espesor de densidad.

(*) Ver p. ejemplo ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, Cap. 3.

IV. *Aplicación a la limitación del máximo módulo.*

§ 11. Consideremos una función $f(z)$ holomorfa en D, continua sobre Γ, y tal que sobre un arco AB de Γ es $|f(t)|<m$ y sobre el resto $\Gamma-AB$ es $|f(t)|<M$, siendo $m<M$. De la fórmula de Poisson

$$2\pi f(\zeta)=\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2}{\rho^2}\,d\vartheta=\int_{AB}+\int_{\Gamma-AB} f(t)\frac{1-r^2}{\rho^2}\,d\vartheta$$

obtenemos inmediatamente la siguiente limitación del módulo $|f(\zeta)|$:

$$|f(\zeta)|\leqq m+M\frac{1-|\zeta|^2}{d^2}(2\pi-l), \tag{1}$$

siendo d la mínima distancia de ζ al arco $\Gamma-AB$. Análogamente para una función armónica $u(\zeta)$ que sobre Γ es menor que m sobre AB y menor que M sobre $\Gamma-AB$, se tiene:

$$u(\zeta)\leqq m+M\frac{1-|\zeta|^2}{d^2}(2\pi-l), \tag{2}$$

Las mayorantes (1) y (2) intervienen en diversas cuestiones de funciones holomorfas y armónicas, como en el teorema de 3 círculos y sus generalizaciones por Nevanlinna y Ostrowski, en el estudio de la función armónica $u(\zeta)$ para $\zeta\to t$ sobre AB, en un método de Montel en la representación conforme y en las generalizaciones que él dió del teorema de Weierestras (*), etc. La utilidad de las fórmulas (1), (2) se debe a estas tres propiedades que ellas expresan:

1) Si $2\pi-l$ es muy pequeño, es muy pequeña la influencia de la cota M sobre $|u(\zeta)|$.

2) Cuando ζ tiende a un punto t_0 *interior* a AB, $u(\zeta)$ tiende a quedar por debajo de $m+\varepsilon$, uniformemente; es decir, dado $\varepsilon>0$ existe un $\eta>0$ independiente de la función considerada, tal que $|\zeta-t_0|<\eta$ implica $u(\zeta)<m+\varepsilon$.

(*) Ver por ej. MONTEL, *Sur la représentation conforme.* Journal de Liouville (7), 3 - 1917.

BIEBERBACH. *Lehrbuch der Funktionentheorie.* T. II, Cap. 3, § 5.

3) La rapidez con la cual se produce este acercamiento a $m+\varepsilon$, es proporcional al cuadrado del grado de interioridad d^2 del punto t_0.

Así por ejemplo de (1) vemos que si $m<\varepsilon$ se deduce $|f(\zeta)|<\varepsilon$ para los ζ muy próximos a t_0, luego si $f(t)$ es continua en t_0 sobre Γ se deduce que $f(\zeta)-f(t_0)$ tiende a cero para $\zeta\to t_0$ y obtenemos un teorema clásico de Schwarz; más aún, podemos de la rapidez con la cual se produce $f(t)\to f(t_0)$, deducir la rapidez con la cual se produce $f(\zeta)\to f(t_0)$.

Supongamos ahora que en vez de un arco AB tenemos un conjunto E cualquiera de medida l, de modo que sobre E es $|f(t)|<m$ y sobre $\Gamma-E$ es $|f(t)|<M$, $m<M$. En este caso si t_0 no es interior a E, no subsisten más las consideraciones anteriores, porque d^2 no se mantiene mayor a un número fijo, si t_0 es de acumulación de puntos de $\Gamma-E$, y las propiedades 1) — 3) no son más válidas. Vamos, pues, a modificar las fórmulas anteriores para que se conserven estas propiedades para el caso de un conjunto E cualquiera.

Para ello haremos previamente otra deducción de la fórmula (1), más larga que la anterior, pero que se aplicará también al caso general. Efectuando la sustitución homográfica

$$g(z,\zeta)=w=\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z},$$

la función $f(z)$ se transforma en

$$\varphi(w)=f(z) \quad \text{con} \quad f(\zeta)=\varphi(0),$$

de modo que

$$2\pi\,.\,f(\zeta)=2\pi\,.\,\varphi(0)=\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t}\,dt=\int_{AB^*}+\int_{\Gamma-AB^*}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Pero, por lo visto en el § 8, la longitud $2\pi-l^*$ del arco $\Gamma-AB^*$ es menor que $(2\pi-l)\dfrac{1-|\zeta|^2}{d^2}$ y como sobre AB^* y $\Gamma-AB^*$ los valores de φ coinciden con las de f sobre AB y $\Gamma-AB$, respectivamente, obtenemos

$$|f(\zeta)| = |\varphi(0)| \leqq \int_{AB^*} |\varphi||dt| + \int_{\Gamma - AB^*} |\varphi||dt| \leqq m + M\,(2\pi - l^*)$$

$$\leqq m + M\,\frac{1-|\zeta|^2}{d^2}\,(2\pi - l)$$

que es la fórmula (1), a la cual hemos llegado por otro camino.

§ 12. Sea ahora en vez de un arco un conjunto E de medida l y $t_0 = e^{i\vartheta_0}$ un punto de densidad del mismo. Efectuando como más arriba la sustitución $w = g(z, \zeta)$, pero con la condición de que $\arg \zeta = \arg t_0$, el conjunto $\Gamma - E$ se transforma en $\Gamma - E^*$ cuya medida $2\pi - l^*$ es, en virtud de lo visto en el § 9, $\leqq \frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2}\,(2\pi - l) + \varepsilon$, siendo $d(\varepsilon)$ el ε-espesor de densidad de t_0 respecto de E, luego como

$$2\pi \,.\, f(\zeta) = 2\pi \,.\, \varphi(0) = \int_{E^*} + \int_{\Gamma - E^*} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

obtenemos

$$|f(\zeta)| \leqq m + M\,\frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2}\,(2\pi - l) + \varepsilon \qquad \textbf{(A)}$$

que es la generalización de la mayorante (1). Análogamente para una función armónica se tiene

$$u(\zeta) \leqq m + M\,\frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2}\,(2\pi - l) + \varepsilon \qquad \textbf{(B)}$$

De estas fórmulas se deduce:

1) *Si $2\pi - l$ es muy pequeño, es muy poca la influencia de M sobre $|f(\zeta)|$ para los ζ del radio $0t_0$.*

2) *Si $\zeta \to t_0$ también $|f(\zeta)|$ tiende a quedar por debajo de $m + \varepsilon$, uniformemente* (para los ζ del radio $0t_0$).

3) *La rapidez con que se produce este acercamiento a $m + \varepsilon$ depende del ε-espesor de densidad de t_0 respecto de E.*

En particular si el punto t_0 es interior $d(\varepsilon)$ se transforma en d y obtenemos las fórmulas clásicas del § anterior.

Todavía se puede extender las propiedades 1) — 3) si ζ varía sobre un arco ortogonal a Γ en t_0.

Supongamos en particular, que para t perteneciente a E es $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$, entonces aplicando las fórmulas (A) o (B) a $f(z)-f(t_0)$ o a $u(z)-u(t_0)$, obtenemos inmediatamente:

$$|f(\zeta)-f(t_0)|\leqq 2\varepsilon+\frac{M(1-|\zeta|^2)}{d(\varepsilon)^2} \qquad \text{(C)}$$

$$u(\zeta)-u(t_0)\leqq 2\varepsilon+M\frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2} \qquad (\text{C}_1)$$

Observemos que en las fórmulas (A), (B) y (C) no hay necesidad de suponer la continuidad de $f(t)$ o $u(t)$ sobre Γ.

§ 13. Vamos a extender ahora las fórmulas (C) para el caso de una función $f(t)$ o $u(t)$ no acotada y tan solo sumable Lebesgue (o Denjoy) sobre Γ. Para mayor comodidad vamos a trabajar con la función real $u(t)=u(\vartheta)$ y sea

$$U(\vartheta)=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} u(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Vamos a someter la función $u(\vartheta)$ a estas dos hipótesis suplementarias (características de la teoría de Denjoy):

a) $\left|\dfrac{U(\vartheta)}{\vartheta-\vartheta_0}\right|<M$, es decir los números de Dini de $U(\vartheta)$ son finitos en ϑ_0.

b) La $U(\vartheta)$ es aproximativamente derivable en ϑ_0, es decir que si ϑ_1 varía sobre E es $\dfrac{U(\vartheta_1)}{\vartheta_1-\vartheta_0}\to u(\vartheta_0)$ para $\vartheta_1\to\vartheta_0$ ($\vartheta_0=$ punto de densidad de E).

[Observemos que las hipótesis a que hemos sometido aquí la función $u(\vartheta)$ son más generales que las del § anterior; en efecto, la $u(\vartheta)$ del § anterior verificaba $|u(\vartheta)|<M$ para ϑ en $\Gamma-E$ y $|u(\vartheta)-u(\vartheta_0)|=|\varepsilon(\vartheta)|<\varepsilon$ para ϑ en E, luego llamando δ_0 al intervalo (ϑ_0,ϑ) tendremos

$$\frac{1}{\vartheta_0-\vartheta}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} u(\vartheta)\,d\vartheta=\frac{U(\vartheta)}{\vartheta-\vartheta_0}=$$

$$=\frac{1}{\vartheta-\vartheta_0}\int_{\delta_0\frown E}[u(\vartheta_0)+\varepsilon(\vartheta)]\,d\vartheta+\frac{1}{\vartheta-\vartheta_1}\int_{\delta_0-E}u(\vartheta)\,d\vartheta=$$

$$=u(\vartheta_0)\,\frac{|\delta_0\frown E|}{\vartheta-\vartheta_0}+\varepsilon_1(\vartheta)+O(1)\,M\frac{|\delta_0-E|}{\vartheta-\vartheta_0}$$

pero como ϑ_0 es de densidad de E es $|\delta_0-E|:(\vartheta-\vartheta_0)=1+\varepsilon$, $|\delta_0-E|:(\vartheta-\vartheta_0)=\varepsilon_2$ y por lo tanto

$$\frac{U(\vartheta)}{\vartheta-\vartheta_0}=u(\vartheta_0)+\varepsilon_2(\vartheta),$$

lo que indica que $U'\ (\vartheta_0)=u(\vartheta_0)]$.

Si estas 2 condiciones son satisfechas, tendremos, utilizando la integración por partes de la integral de Denjoy y con las notaciones del § 10:

$$\int_{\delta_1}u(\vartheta)\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}d\vartheta=U(\vartheta_1)\ \frac{1-|\zeta|^2}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|^2}$$

$$+2\int_{\delta_1-E}+2\int_{\delta_1\frown E}U(\vartheta)\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}d\vartheta.$$

Para ϑ en E es $U(\vartheta):(\vartheta-\vartheta_0)=u(\vartheta_0)+\varepsilon(\vartheta)$ de modo que

$$2\int_{\delta_1\frown E}\frac{U(\vartheta)}{|t-\zeta|}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}\,d\vartheta=$$

$$=0\,(1)\int_{\delta_1\frown E}\frac{U(\vartheta)}{\vartheta-\vartheta_0}\ \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}d\vartheta=O(1)\,u(\vartheta_0)$$

(con $O(1)$ indicamos una función que tiende a 1 para $\vartheta\longrightarrow\vartheta_0$), y

$$2\int_{\delta_1-E}\frac{U(\vartheta)}{|t-\zeta|}\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}\ d\vartheta\leqq 2M\ \int_{\delta_1-E}\frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}dt$$

y esta última es en virtud de lo visto en el § 9 $\leqq 2M\varepsilon$; finalmente

$$\frac{U(\vartheta_1).(1-|\zeta|^2)}{|e^{i\vartheta_1}-\zeta|^2}=O(1)\,u(\vartheta_0),$$

luego, sustituyendo en la fórmula de Poisson, resulta definitivamente

$$u(\zeta) \leq N \frac{1-|\zeta|^2}{d(\varepsilon)^2} + O(1)\, u(\zeta_0) + \varepsilon M \qquad \text{(D)}$$

donde N es el maximum de $\int |u| d\vartheta$ y M la cota de la condición a). Esta fórmula es una generalización de (C_1), porque si $u(\vartheta)$ verifica las condiciones de (C_1) ella verifica las de (D).

Vamos a indicar ahora un caso importante en que las dos condiciones a) y b) pueden ser reemplazadas por una sola:

La fórmula (D) se verifica si $U(\vartheta)$ es aproximativamente derivable en sentido fuerte.

Demostración. Sea $\delta_n \to 0$ la sucesión de intervalos para las cuales es

$$\frac{1-Q(E, \delta_n)}{|\delta_n|^\lambda} = \frac{|\delta_n - E|}{|\delta_n|^{1+\lambda}} \to K < \infty, \ \lambda > 1,$$

y tomemos ζ_n tal que $|1-\zeta_n| = |\delta_n|^{1+\lambda}$; entonces para t de $\Gamma - \delta_n$ será

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} \to 0$$

uniformemente en t. Luego

$$\int_{\Gamma - \delta_n} u(t) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} dt \to 0$$

y sólo nos queda examinar la integral

$$\int_{\delta_n} U(t) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} d\vartheta =$$

$$= U(\vartheta_n) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} + 2\int_{\delta_n \frown E} + 2\int_{\delta_n - E} u(t) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^3} d\vartheta.$$

El primer sumando tiende evidentemente a cero; la integral $\int_{\delta_n \frown E}$ se transforma como en el razonamiento precedente y

$$\int_{\delta_n - E} U(t) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^3} d\vartheta \leqq \max_{\vartheta \varepsilon \delta_n} U(\vartheta) \frac{1}{1-|\zeta|} \int_{\delta_n - E} \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} d\vartheta$$

pero, por lo visto en el § 9, es

$$\int_{\delta_n - E} \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t-\zeta_n|^2} d\vartheta \leqq \frac{|\delta_n - E|}{|\delta_n|},$$

luego es

$$\int_{\delta_n - E} U(t) \frac{1-|\zeta_n|^2}{|t_n-\zeta_n|^2} d\vartheta \leqq \max_{\vartheta \varepsilon \delta_n} U(\vartheta) \frac{|\delta_n - E|}{|\delta_n|^{1+\lambda}} \longrightarrow 0,$$

l. q. d. d.

Todavía se puede dar otras condiciones análogas a las del § 10 que aseguran la validez de (D), pero no vamos a entrar aquí en estos detalles, sólo observemos que (D) es válido si $u(\vartheta)$ es continua aproximativamente, en sentido fuerte, en ϑ_0, lo cual se demuestra en forma análoga a la de la última demostración.

§ 14. Las fórmulas (A), (C) y (D) pueden considerarse como una mayorante general que permite demostrar con un mismo procedimiento diversos resultados de las funciones holomorfas, en los cuales intervienen conjuntos cualesquiera en vez de arcos. Veamos algunas de estas aplicaciones de las fórmulas mencionadas:

Si $f(z)$ es acotada en $D+E$ y nula sobre un conjunto E de E de medida >0, aplicando (B) a la función $u(\zeta) = \lg|f(\zeta)|$, como sobre E es $u(t) = -\infty$ resulta de (B) que es $u(\zeta) = -\infty$ para todo ζ de D, es decir que $f(\zeta)$ es idénticamente nula; esto es el teorema de identidad enunciado por Fatou y demostrado por Riesz (y también en forma más general por Lusin y Privalow). Si $f(t)$ es acotada y aproximativamente continua en t_0 resulta de (C) (aplicando esta fórmula a $f(z) - f(t_0)$) que $f(\zeta) \to f(t_0)$ para $\zeta \to t_0$, y obtenemos así una generalización del teorema de Schwarz, en el cual hemos reemplazado la continuidad ordinaria por aproximativa.

Fatou, en su célebre tesis demostró que si $u(t)$ es integrable

Lebesgue y $U(t) = \int u(t)\,dt$ entonces se verifica $\underset{\zeta \to t_0}{u(\zeta) \to u(t_0)}$ en todo punto en que $U'(t_0) = u(t_0)$. Podemos generalizar ahora este resultado, cambiando la derivación ordinaria de $U(t)$ por la aproximativa. En efecto, aplicando (D) a la función $u(\zeta) - u(t_0)$ obtenemos inmediatamente el

Teorema. Si $u(t)$ es integrable Denjoy, la función armónica $u(\zeta)$ definida por la integral de Poisson de $u(t)$ verifica $\underset{\zeta \to t_0}{u(\zeta) \to u(t_0)}$ para todo punto t_0 en que la integral indefinida de $u(t)$ es aproximativamente derivable y tiene finitos los números derivados.

Como caso particular obtenemos el teorema de Fatou y también el de Schwarz.

Como una integral indefinida de Denjoy es en casi todo punto aproximativamente derivable y tiene finitos los números derivados, resulta en particular que el último teorema se verifica para casi todos los puntos t_0.

Tomando en cuenta lo dicho en el § anterior tendremos que:

En el teorema anterior las dos condiciones de la hipótesis pueden reemplazarse por la sola condición de que la integral es aproximativamente derivable en el sentido fuerte (o que $u(t)$ es aproximativamente continua, fuerte) en t_0.

Análogamente pueden obtenerse de las mayorantes (A), (C), (D) los teoremas de Khintchine-Ostrowski sobre las sucesiones convergentes de funciones analíticas, así como las fórmulas de Hermite para la integral de Cauchy de que

$$f(t_0) = \lim \frac{f_1(\zeta_1) + f_l(\zeta_l)}{2}$$

siendo

$$f_i(\zeta_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - \zeta_i}\,dt, \quad f_l(\zeta_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - \zeta_l}\,dt, \quad |\zeta_i| \leqq 1, \quad |\zeta_l| \geqq 1.$$

Más aún, de (D) se puede concluir: las fórmulas de Hermite se verifican en todo punto en que la integral de $f(t)$ es aproximativamente derivable y tiene finitos los números derivados (o también si es aproximativamente derivable en sentido

fuerte), pudiendo además $f(t)$ ser integrable tan sólo Denjoy; luego en particular las fórmulas de Hermite se verifican en casi todo punto de E (con $f(t)$ integrable Denjoy). De este teorema se deduce a su vez inmediatamente el teorema de identidad de las series de Fourier-Denjoy porque, si los coeficientes de Fourier-Denjoy son nulos, es $f_i = f_l = 0$ y para casi todo t_0 resulta

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \lim f_i(\zeta_i) + f_l(\zeta_l) = 0.$$

En particular, para las series de Fourier se deducen estas consecuencias: *la serie de Fourier de $u(t)$ es sumable Abel en todo punto en que la integral indefinida de $u(t)$ es derivable aproximativamente y tiene números derivados finitos (o si es aproximativamente derivable en sentido fuerte, o si $u(t)$ es aproximativamente continua).* En virtud de lo visto en los §§ 10 y 13, las demostraciones de estos parágrafos son aplicables para los núcleos de Fejer y también para otros más generales. Quedan así generalizados los teoremas de Fejer y de Lebesgue sobre la sumabilidad (C, r) de la serie de Fourier, reemplazando las condiciones de continuidad o derivabilidad de estos teoremas por la continuidad o derivación aproximativas (fuertes).

Más aún, en virtud de lo dicho en el § 10, todos estos resultados se extienden a los núcleos $\varphi(t, \zeta)$ más generales para los cuales tenemos este criterio:

Si $\varphi(t, \zeta)$ es un núcleo tal que: 1) $\int |\varphi| dt < C$; 2) $\int \varphi(t, \zeta) dt = 1$; 3) $\varphi(t, \zeta) \to \varphi(t)$ *crece cuando* $|t - t_0|$ *decrece;* 4) $\int_{\Gamma - \delta} \varphi(t, \zeta) dt \to 0$ *para* $\zeta \to t_0$, *entonces*

$$\lim_{\zeta \to t_0} \int u(t)\, \varphi(t, \zeta)\, dt = u(t_0)$$

en todo punto t_0 en que $u(t)$ es aproximativa continua y

$$U_1(\vartheta) = \int_{\Gamma - E} r(t)\, dt$$

tiene números derivados finitos. Esto viene a ser una generalización de las propiedades de los núcleos de Poisson o Fejer.

Vemos, pues, que diversos resultados de la teoría de funcio-

nes pueden obtenerse por el simple estudio del espesor de la función lineal, que es la función más simple. Todo lo expuesto se generaliza considerando las sustituciones de Fatou

$$\varphi(z)=\frac{z-\zeta_1}{1-\bar{\zeta}_1 z}\cdots\frac{z-\zeta_n}{1-\bar{\zeta}_n z},$$

que transforman el círculo en sí mismo. Finalmente, se obtienen resultados más particulares considerando puntos de densidad relativos a las funciones e^{r^α} cuyas propiedades están vinculadas especialmente con las clases de funciones quasi-analíticas, pero no vamos a entrar aquí en estas consideraciones.

Los resultados anteriores son todavía válidos si D es un dominio simplemente conexo cualquiera, limitado por arcos analíticos; en efecto, en este caso podemos efectuar una representación conforme de D sobre el círculo unitario y la función φ que efectúa esta representación será analítica sobre el contorno, luego en virtud de lo visto en el § 6, φ conserva el punto de densidad y su grado, y por consiguiente podemos aplicar los teoremas anteriores deducidos para el caso en que D es un círculo.

Para poder extender estos teoremas al caso general de un dominio D limitado por una curva de Jordan Γ, hace falta probar la invariancia del punto de densidad en la representación conforme. Vemos, pues, la importancia que puede tener la demostración de dicha propiedad de invariancia, en general.

RESUMEN

Consideramos algunas cuestiones relacionadas al problema: *¿la representación conforme deja invariante a los puntos de densidad sobre el contorno?*, hipótesis que no hemos podido resolver todavía más que en algunos casos particulares y de la cual ignoramos si fué tratada ya por otros autores. Si x es punto de densidad del conjunto E, definimos el ε-espesor de x como el máximo número $d(\varepsilon)$ tal que para todo intervalo δ que contiene a x y de longitud $<d(\varepsilon)$ se verifica $|\delta-E|/|\delta|<\varepsilon$, y llamamos, además, coeficiente (λ) de densificación de x al número $Q'_\lambda=\lim|\delta-E|/|\delta|^{1+\lambda}$. Estudiamos como se transforman estos elementos en la representación conforme, para un punto x

en que la función es regular, y mostramos como en el caso particular de la función lineal resulta esta aplicación a la limitación del módulo de una función holomorfa:

Sean: $u(\zeta)$ una función armónica en un círculo, E un conjunto del contorno, de medida $l>0$, y t un punto de densidad de E. Si sobre E es $u(t)<m$ y sobre el resto del contorno es $u(t)<M$ $(m<M)$, se tiene para todo ζ perteneciente a $0t$ y para todo $\varepsilon>0$,

$$u(\zeta)<m+M\,(2\pi-l)\,(1-|\zeta|^2)/d(\varepsilon)^2+\varepsilon,$$

siendo $d(\varepsilon)$ el ε-espesor de t.

Esta fórmula se generaliza para funciones no acotadas, integrables Lebesgue o Denjoy, y permite deducir muy simplemente y por un mismo procedimiento diversas propiedades clásicas de las funciones holomorfas y de las series de Fourier-Lebesgue o Fourier-Denjoy.