PROPIEDADES DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS QUE CARECEN DE PUNTOS ANGULOSOS

por

ERNESTO COROMINAS

Universidad Nacional de Cuyo
Mendoza

Sería posible, aunque poco práctico, suprimir el concepto de derivada para ceñirnos exclusivamente a los números derivados. Así no hablaríamos nunca de derivada sino simplemente de números derivados iguales. Tal modificación importaría una extensa revisión de lenguaje o de forma, que no de fondo, pues éste permanecería invariable, mientras la elegancia de expresión sufriría en gran medida por culpa de proceder tan antojadizo.

Sin embargo, acostumbrados al susodicho lenguaje, notaríamos, tal vez de modo más chocante, la pobreza extraordinaria de nuestros conocimientos sobre los números derivados, por lo menos en comparación con el análogo sobre los números derivados coincidentes (derivadas). El resultado sería preguntarnos: ¿Tan importante es la coincidencia de aquéllos que, al perderse, con ella también se pierden las ulteriores propiedades, o es que esto se debe a otra causa? Y también ¿cómo se explica que estando incluído el concepto de derivada en el de los cuatro números derivados no existan para estos últimos teoremas que comprendan como caso particular a los de la media? Podríamos seguir con un sin fin de preguntas a cuál más interesante.

Los resultados que hemos obtenido permiten afirmar que las causas de tales diferencias se deben más a la eventual presencia de puntos angulosos que a la coincidencia o no coincidencia de los números derivados; esto es lo secundario y aquello lo esencial. Tan es así, que cuando no existen puntos angulosos se pueden dar teoremas no menos precisos para los cuatro números derivados — considerados como un todo — que para la derivada ordinaria. Claro está que para un determinado número derivado los resultados no serán exactamente los mismos que para la derivada ordinaria, y nada tiene de particular si observamos que en ella tenemos confundidos a la vez los cuatro números derivados; en cierto modo, un número derivado constituye la cuarta parte de la derivada. Y sin embargo no se crea que es tanta la diferencia. Por ejemplo, para un número derivado, la propiedad (D) (') de Darboux se verifica, salvo un conjunto numerable de valores.

Alrededor de estas cuestiones giran todos los teoremas que deduciremos a continuación. Con decir que sólo nos hemos ocupado de funciones sin angulosidades se comprenderá lo mucho que queda por estudiar comparado con lo poco que se ha resuelto. Como este poco presenta cierto interés nos decidimos a publicarlo dejando para otra ocasión eventuales resultados, menos elegantes, por cierto, sobre problemas también más complicados.

Como es sabido, hay teoremas en que no se distingue si los números derivados coinciden o no; valen en ambos casos. Entre ellos destaca de un modo especial el de Dini. Lógicamente en nuestro propósito será previo dilucidar si dicho teorema generaliza los teoremas de la media. Por tales entendemos el de Rolle, y el de Lagrange con sus consecuencias inmediatas, como por ejemplo la propiedad (D). Si se quiere se puede prescindir del teorema de Rolle, ya que va incluído en el de Lagrange.

Según el teorema de Dini los números derivados (en un determinado segmento) tienen los mismos extremos inferior y superior que las pendientes de las cuerdas. Es decir, si L y l son respectivamente los extremos superior e inferior de $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ para x_1 y x_2 variables en $[ab]$, también lo serán de cada uno de los cuatro números derivados. Por tanto tenemos

$$l \leqq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leqq L \qquad \text{para} \quad \begin{matrix} a \leqq x_1 \leqq b \\ a \leqq x_2 \leqq b \end{matrix}$$

Son tan distintos los términos de este teorema de los de Lagrange que para que una comparación resulte útil será mejor transformar uno de ellos. Con ese objeto tomaremos la propie-

(') Diremos brevemente que una función $f(x)$ goza de la propiedad D cuando en cualquier intervalo a–b ella toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

dad (D) como otra manera de enunciar el teorema del incremento finito, o mejor dicho los dos teoremas como expresiones distintas de un mismo hecho matemático. No es abusivo tal modo de proceder, ya que, según veremos a continuación, los dos teoremas son equivalentes para nuestro objeto. Dejando de lado la conocida deducción de la propiedad (D) partiendo del teorema de Lagrange, la demostración inversa es más o menos como sigue: si la derivada cumple la propiedad (D), esto es, toma todos los valores comprendidos entre L y l, entonces también tomará el valor $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (relación 1). Si en vez de la derivada se tratara de un número derivado la equivalencia se demostraría de la misma manera. La propiedad (D), por consiguiente, representará el teorema de Lagrange. Sentado esto, resulta fácil la comparación.

Según los teoremas de la media los números derivados coincidentes toman *todos* los valores comprendidos entre L y l, mientras que según el teorema de Dini los números derivados sólo *pueden* tomar estos valores.

Salta a la vista que el teorema de Dini no generaliza los teoremas de la media y por tanto no coincide con ninguna de las generalizaciones buscadas.

Es tan grande la diferencia entre tomar *todos* o *algunos* valores, que cabe preguntarse si existirá alguna proposición intermedia. Un ejemplo nos permitirá decidir.

Sea $f(x) = -x$ para $-1 \leq x < 0$ y $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$.

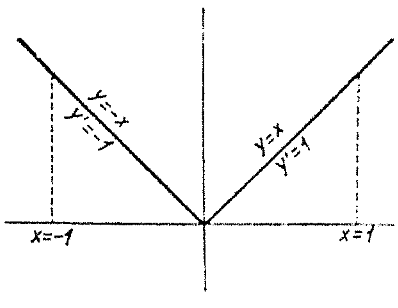


Fig. 1.

La función $f(x)$ es derivable en todos los puntos salvo en el origen, en donde tiene un punto anguloso. La derivada del lado izquierdo vale siempre -1 y del lado derecho 1; en el origen sólo se puede hablar de derivadas laterales. En este caso evidentemente los extremos valen $L = 1$ y $l = -1$. Obsérvese que en el caso de la función $f(x)$ los números derivados se limitan a tomar como valores los extremos de su posible variación. Un teorema más preciso que el de Dini tendría que resultar forzosamente falso si comprendiera la citada función. Es natural evitar este tipo de función si se quieren afirmaciones más tajantes. ¿Qué singularirdad caracteriza este tipo de funciones?

La función estudiada presenta dos particularidades notables: está compuesta de dos funciones lineales y tiene un punto anguloso. La primera de las dos explica que los números derivados tomen sólo dos valores; pero, aunque estos dos tramos rectos dejaran de serlo, al disponer de un punto anguloso siempre podríamos lograr que un número derivado dejara de tomar todo un intervalo de valores. Esta segunda es, pues, la singularidada que debemos evitar a toda costa.

Estas, y no otras, son las razones que nos han inducido a empezar por el estudio de las funciones continuas desprovistas de puntos angulosos.

Evidentemente la definición clásica de punto anguloso no nos conviene, pues en caso de no existir tangentes no es aplicable, esto es, no tiene sentido cuando los números derivados pertenecientes a un mismo lado no coinciden. Sin embargo, intuitivamente es fácil concebir puntos angulosos, aun sin tangentes.

La característica gráfica más importante de los puntos angulosos no es el cambio brusco de dirección o de tangentes, sino el hecho de que haya más de una recta que toque a la curva sin atravesarla (en un cierto entorno), característica que puede presentarse de dos maneras: o bien dejando la curva del lado del

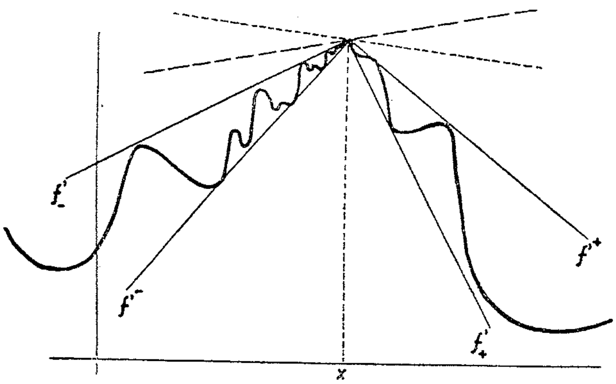


Fig. 2.

semiplano inferior, punto anguloso cóncavo (fig. 2); o bien del lado del semiplano superior, punto anguloso convexo (fig. 3).

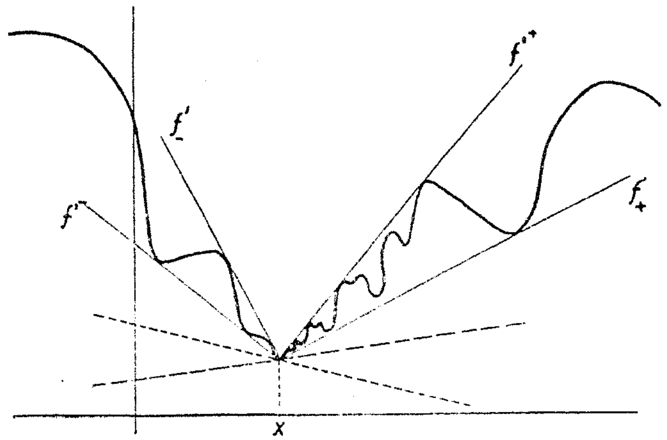


Fig. 3.

De la simple inspección de las figuras se infiere que el punto x será anguloso cóncavo cuando $f'^{+}(x) < f'_{-}(x)$ y convexo cuando $f'^{-}(x) < f'_{+}(x)$. Prescindiendo de toda consideración intuitiva podríamos definir directamente los puntos angulosos mediante dichas desigualdades.

Una función que no tenga puntos angulosos no podrá verificar en ningún punto las anteriores desigualdades, por tanto

$$f'^{+}(x) \geqq f'_{-}(x) \tag{2}$$

$$f'^{-}(x) \geqq f'_{+}(x). \tag{3}$$

Por ser de gran comodidad recordaremos la nomenclatura de Denjoy sobre los números derivados. Son números derivados asociados aquellos que pertenecen a un mismo lado; y opuestos, aquellos que ni pertenecen a un mismo lado ni a un mismo límite, verbigracia, los dos pares de números derivados que figuran en (2) y (3). Añadiremos por cuenta propia las designaciones de primer par de números derivados opuestos para los que figuran en la relación (2), y segundo par para los que figuran en la relación (3). La notación que empleamos es la siguiente: los signos + y — representan respectivamente los lados derecho e izquierdo, y los lugares que ocupan indican si son números derivados superiores o inferiores. También recordaremos, aunque sea trivial y precisamente por esto, que en las representaciones gráficas el número derivado izquierdo superior figura debajo del número derivado izquierdo inferior, particularidad que puede dar lugar a confusiones.

Sentado esto, no tenemos más que seguir el trillado camino clásico: consideración del máximo, deducción del teorema de Rolle, seguir con el de Lagrange para terminar en la propiedad (D).

Todas las funciones, a partir de este momento, las supondremos continuas y sin angulosidades, aunque no se diga de un modo explícito.

*

* *

I-1. Supongamos definida $f(x)$ en $[ab]$ con un máximo en x_0. Por ser este punto un máximo de la función en él tendremos

$$f'_-(x_0) \geqq 0 \geqq f'^+(x_0)$$

pero como el punto x_0 tampoco es anguloso, según (2) será

$$f'_-(x_0) \leqq f'^+(x_0)$$

relaciones solamente compatibles cuando los dos números derivados del primer par se anulan. En los puntos de máximo, pues, resultan nulos los números derivados del primer par. Repitiendo el razonamiento para la función $-f(x)$, tenemos que el máximo pasa a ser mínimo, mientras cada número derivado se convierte en su asociado; por tanto, el par que se anula esta vez es el segundo. Este artificio lo emplearemos constantemente en lo sucesivo. La reunión de las dos anteriores conclusiones nos dará el siguiente lema:

Lema 1. En los puntos de máximo (mínimo) de una función se anula el primer (segundo) par de números derivados.

I. 2. Si $f(a)=f(b)$, en el interior del segmento, caso de no existir ningún máximo, existirá por lo menos un mínimo, y viceversa. Es decir, si no se anula nunca el primer par de números derivados, deberá anularse el segundo, ... etc.; en una palabra, debe anularse forzosamente uno de los dos pares o los dos, lo que significa para cada lado por separado, que entre dos números derivados asociados debe anularse uno por lo menos en el interior de ab.

Teorema 1. *Si* $f(a)=f(b)$ *en el interior del segmento debe anularse por lo menos uno de los números derivados asociados de cada lado. Es decir si no se anula un número derivado debe anularse forzosamente su asociado.*

En todo el trabajo sobreentenderemos la función $f(x)$ definida en $[ab]$.

I. 3. Al añadir a una función $f(x)$ una $g(x)$ derivable, los cuatro números derivados de $f(x)$ aumentan en la misma cantidad $g'(x)$ y por consiguiente (desigualdades (2) y (3)), si $f(x)$ no tiene puntos angulosos, tampoco los puede tener la función suma (').

Sea $l(x)$ una función lineal que coincide con $f(x)$ en los puntos a y b. La derivada de $l(x)$ será constante e igual al número $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La función $\varphi(x)=f(x)-l(x)$, según la hipótesis, se anula en los extremos del segmento $[ab]$, por tanto en un punto interior x_0 (teorema 1), una de las dos o las dos relaciones

$$\varphi'^{+}(x_0)=f'^{+}(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\varphi'_{+}(x_0)=f'_{+}(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

es cierta; o lo que es lo mismo, por lo menos uno de los dos números derivados $f'^{+}(x_0)$ y $f'_{+}(x_0)$ es igual a la pendiente de la cuerda de extremos a y b. Para los números derivados izquierdos la marcha de la demostración es idéntica. Tendremos, pues, la generalización del teorema de Lagrange.

(') Sin embargo la suma de dos funciones sin puntos angulosos, pero no derivables, puede tener punto anguloso, como sucede, por ejemplo, con las dos funciones $|x|-x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Teorema 2. *Existe, por lo menos, un punto interior* x_0 *en el cual uno de los dos números derivados derechos (izquierdos), o los dos, son iguales a* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

También podríamos añadir que, *si los dos números derivados del primer par, en* x_0, *no verifican la igualdad, la deberán satisfacer simultáneamente los del segundo par y viceversa.*

I. 4. Sea μ un valor interior al dominio de variación de pendientes o de números derivados, esto es, $L > \mu > l$. Por definición de L y l existen cuerdas de pendientes superiores e inferiores respectivamente a μ; tomemos una de cada clase. Al pasar continuamente (y sin que coincidan nunca los extremos de una misma cuerda móvil) de una cuerda a la otra tendremos que encontrar forzosamente una intermedia de pendiente igual a μ, y en el interior de esta cuerda, según el teorema anterior, tomarán este valor el primer par o el segundo par de números derivados. Por tanto, si un número derivado no toma el valor μ lo tomará su asociado; pero como éste es un valor arbitrario comprendido entre L y l, lo mismo podemos decir de todos los valores comprendidos entre dichos extremos de variación de pendiente. La palabra «comprendidos» la empleamos siempre en el sentido estricto.

Teorema 3. *Entre dos números derivados asociados, en un determinado segmento, toman todos los valores comprendidos entre los correspondientes extremos de variación de pendiente.*

Huelga decir que el teorema anterior lo mismo se refiere a los números derivados derechos que a los izquierdos; en los dos casos es válido. La locución: «entre dos números derivados asociados toman todos los valores» significa que el valor que no toma un número derivado lo debe tomar necesariamente su asociado.

Dicha generalización de la propiedad (D) puede enunciarse en la siguiente forma:

Corolario. *Sean* A *y* B *los valores que toma un número derivado en los extremos de un segmento. Entonces, en el interior del segmento, entre él y su asociado toman todos los valores comprendidos entre* A *y* B. *Lo mismo ocurre con los otros dos números derivados.*

El corolario anterior se deduce del teorema sin más que observar que A y B son valores comprendidos entre L y l.

*
* *

Los teoremas 1, 2 y 3 presentan un defecto esencial: la alternativa que contienen. Nunca afirman nada para un *determinado* número derivado; sólo se refieren a los números derivados asociados como algo inseparable formando parte de un todo.

Las generalizaciones que daremos a continuación no presentan este defecto gracias a la intervención de una hipótesis suplementaria.

II. 1. Sean $f'^{+}(a)>0$ y $f'^{+}(b)<0$ $(a<b)$. La relación (2), siempre válida, pues no tenemos nunca puntos angulosos, para $x=b$ nos dice que $f'_{-}(b)<0$; luego esta condición y la de la hipótesis $f'^{+}(a)>0$ implicarán la existencia de dos puntos interiores x_1 y x_2, tales que

$$f(x_1)>f(a)$$
$$f(x_2)>f(b).$$

Sea $f(x_1)$, por ejemplo, el mayor de los dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, entonces podremos escribir

$$f(x_1)>f(a)$$
$$f(x_1)>f(b).$$

Dadas estas dos condiciones existirá forzosamente un máximo para la función $f(x)$ en el cual, según sabemos (Lema 1), el primer par de números derivados se anula. Razonando idénticamente sobre $f(-x)$ en las premisas f'^{+} pasaría a ser f'_{-}, seguiría existiendo máximo y la conclusión sería la misma. Con la consideración de $-f(x)$ tendríamos la demostración para los otros números derivados, aunque las desigualdades que figuran en las premisas cambiarían de sentido.

Antes de enunciar el teorema correspondiente introduciremos una locución con sentido convencional. Diremos que una función es creciente (decreciente) respecto a un par de puntos, cuando la función es creciente (decreciente) considerada *exclusivamente definida* en los dos puntos, verbigracia, $f'^{+}(x)$, en el caso anterior es decreciente con cambio de signo respecto al par ab. No debe entenderse que la función sea creciente en a y en b, ni en ninguno de los puntos interiores, sino simplemente que $f'^{+}(a) < f'^{+}(b)$ siendo $a < b$. De este modo las premisas anteriores resultarán de fácil enunciación.

Lema 2. *Si un número derivado del primer (segundo) par es decreciente (creciente) con cambio de signo respecto al par de puntos a y b, él y su opuesto se anulan en un punto interior.*

II. 2. Sea $\varphi(x) = f(x) - \mu x$ en donde μ es un número tal que $f'^{+}(a) > \mu > f'^{+}(b)$. Por derivación tenemos

$$\varphi'^{+}(x) = f'^{+}(x) - \mu.$$

Si hacemos $x = a$ y $x = b$, teniendo en cuenta las hipótesis, tendremos

$$\varphi'^{+}(a) = f'^{+}(a) - \mu > 0$$

$$\text{y } \varphi'^{+}(b) = f'^{+}(b) - \mu < 0.$$

Según el lema anterior $\varphi'^{+}(x)$ se anula en un punto interior x_0, esto es, $f'^{+}(x_0) = \mu$. En el mismo punto tendremos también $\varphi'_{-}(x_0) = 0$ y $f'_{-}(x_0) = \mu$. Como μ, dentro de las limitaciones impuestas por la hipótesis, es arbitrario, $f'^{+}(x)$ y $f'_{-}(x)$ tomarán todos los valores comprendidos entre $f'^{+}(a)$ y $f'^{+}(b)$. Como de costumbre, repitiendo la deducción para $f(-x)$ y $-f(x)$ legitimaríamos los restantes casos.

Teorema 4. *Si un número derivado del primer (segundo) par es decreciente (creciente) respecto a $[ab]$ en el interior del segmento, él y su opuesto toman todos los valores comprendidos entre los que toma él mismo en a y b.*

El teorema anterior nos da la propiedad (D) para los números derivados del primer par cuando uno de ellos es decreciente respectos al par de puntos extremos, y la misma propiedad para los del segundo par cuando uno de ellos es creciente, también respecto al par de puntos extremos.

Prescindiremos de los correspondientes teoremas de Rolle y Lagrange para pasar directamente a otro tipo de consideraciones.

II. 3. Los números L y l son, como sabemos, los extremos de oscilación de uno cualquiera de los números derivados o también de la función de dos variables $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$; la diferencia $L-l$ es la llamada oscilación de estas funciones en el segmento $[ab]$. Si hacemos $b \to a$, los dos primeros números varían monótonamente acotándose mutuamente, por tanto tienen límite. Designemos por $\mathrm{Ld}(a), \mathrm{ld}(a)$ y $\mathrm{Ld}(a)-\mathrm{ld}(a)=\infty^+(a)$ a los límites respectivos de L y l y $L-l$; con estos tres números tendremos los llamados extremos de oscilación *puntual* derecha y la oscilación *puntual* derecha de dichas funciones. En teoría de funciones se demuestra que $\mathrm{Ld}(a)$ y $\mathrm{ld}(a)$ se obtienen directamente como límites superiores e inferiores respectivamente de las funciones consideradas, prescindiendo de toda consideración referente a los extremos; luego si designamos por $\Lambda f(x)$ a uno cualquiera de los números derivados de $f(x)$ tendremos

$$\overline{\lim_{x \to +a}} \Lambda f(x) = \mathrm{Ld}(a)$$

$$\underline{\lim_{x \to +a}} \Lambda f(x) = \mathrm{ld}(a).$$

$$\overline{\lim_{\substack{x_1 \to +a \\ x_2 \to +a}}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \mathrm{Ld}(a)$$

$$\underline{\lim_{\substack{x_1 \to +a \\ x_2 \to +a}}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \mathrm{ld}(a).$$

Considerando entornos izquierdos obtendríamos $\mathrm{Li}(a), \mathrm{li}(a)$ y $\mathrm{Li}(a)-\mathrm{li}(a)=\infty^-(a)$; números que caracterizan la oscilación izquierda de los números derivados en el punto a. Podríamos repetir las anteriores igualdades sin más que reemplazar a por $-a$ y Ld, ld por Li y li.

Por fin tomando entornos completos definiríamos $\mathrm{L}(a)$ y $\mathrm{l}(a)$, $\mathrm{L}(a)-\mathrm{l}(a)=\infty(a)$, ó sea la oscilación puntual. Es sabido que $\mathrm{L}(a)$ es el mayor de los dos números $\mathrm{Ld}(a)$ y $\mathrm{Li}(a)$, lo mismo que $\mathrm{l}(a)$ es el menor de los dos números $\mathrm{ld}(a)$ y $\mathrm{li}(a)$.

Según el teorema de Dini $l \leqq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leqq L$, luego si hacemos $b \to a$ para $x_1=a$ y tomamos límites, tendremos

$$\mathrm{ld}(a) \leqq f'_+(a) \leqq f'^+(a) \leqq \mathrm{Ld}(a); \tag{5}$$

análogamente:

$$\mathrm{li}(a) \leqq f'_-(a) \leqq f'^-(a) \leqq \mathrm{Li}(a). \tag{6}$$

Evidentemente si un número derivado es continuo en el punto a la oscilación $\omega(a)$ es nula y las cuatro eles son iguales; por tanto, debido a las anteriores relaciones, también lo serán los cuatro números derivados, es decir, *cuando un número derivado es continuo en un punto, los otros tres también lo son y la función tiene derivada en el punto* (Lebesgue).

Las desigualdades (5) y (6) pueden hacer creer que las eles y los números derivados respectivos son una misma cosa, creencia completamente falsa. En efecto, para la función $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en el punto $x=0$, los números derivados son en valor absoluto iguales a la unidad, mientras las eles grandes son infinitas positivas y las otras dos infinitas negativas. Es más, pueden tomar las eles estos mismos valores a pesar de existir derivada. como por ejemplo sucede con la función $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ en el origen.

Establecidos los conceptos y designaciones de extremos de oscilación de pendiente, los razonamientos se nos simplificarán notablemente.

II. 4. Supongamos que en el punto a la pendiente sea discontinua a la derecha, $\mathrm{Ld}(a) \neq \mathrm{ld}(a)$. Sea μ arbitrario tal que $\mathrm{Ld}(a) > \mu > \mathrm{ld}(a)$. Por hipótesis un número derivado cualquiera, en un entorno derecho arbitrario de a, atraviesa infinitas veces la recta $y=\mu$, ora creciendo, ora decreciendo; por consiguiente cualquiera de los números derivados corta esta recta. (Teorema 4). Claro está que esto sucede infinitas veces. Del lado izquierdo la demostración es la misma.

Teorema 5. *En un entorno derecho (izquierdo) arbitrario de un punto cada uno de los cuatro números derivados toma* *infinitas veces cualquier valor comprendido entre los extremos derechos (izquierdos) de oscilación de pendiente en el punto.*

Si nos referimos a entornos completos la doble afirmación anterior la podremos transformar en el siguiente teorema:

Teorema 6. *En un entorno arbitrario de un punto cada uno de los cuatro números derivados toma infinitas veces cualquier valor comprendido entre los extremos de oscilación de pendiente en el punto.*

Recordando las relaciones (5) y (6) estos teoremas dan lugar a sendos corolarios.

Corolario 2. *En un entorno derecho (izquierdo) arbitrario de un punto cada uno de los cuatro números derivados toma infinitas veces cualquier valor comprendido entre los números derivados derechos (izquierdos) en el punto.*

Corolario 3. *En un entorno arbitrario de un punto cada uno de los cuatro números derivados toma infinitas veces cualquier valor comprendido entre los doss números derivados de intervalo en el punto.*

Recordemos que el número derivado superior de intervalo es el mayor de los dos números $f'^{+}(x)$ y $f'^{-}(x)$, y el otro es el menor de los dos números $f'_{+}(x)$ y $f'_{-}(x)$.

*

* *

Los teoremas a partir del 4 nos permiten afirmar que un número derivado *determinado* toma ciertos valores. Es natural preguntarse: ¿será muy numeroso el conjunto de valores que deja de tomar un número derivado, o es que los toma todos? Veremos que no es difícil determinarlo.

III. 1. Supongamos que $f'^{+}(x)$ no tome el valor μ $(L>\mu>l)$, entonces su asociado lo tomará en un punto interior x_0 (Teorema 3). Tendremos pues,

$$f'_{+}(x_0) = \mu < f'^{+}(x_0)$$

ya que por hipótesis $f'^{+}(x_0)$ no puede ser igual a μ. Pero por el corolario 2 sabemos que cualquier número derivado toma todos los valores comprendidos entre $\mu = f'_{+}(x_0)$ y $f'^{+}(x_0)$. Resulta así, que en el entorno derecho $(\mu, f'^{+}(x_0))$ de μ no hay otro valor similar a él; en una palabra, es un punto aislado a la derecha, lo que significa que el conjunto de valores μ es numerable. Consideraciones análogas para $f(-x)$ y $-f(x)$ nos completarán la demostración para los otros tres números derivados.

Teorema 7. *El conjunto de valores que deja de tomar, en determinado segmento, un número derivado es a lo sumo numerable. Cuando se trata de un número derivado superior, estos valores son aislados a la derecha y cuando se trata de un número derivado inferior estos valores son aislados a la izquierda.*

Podemos, pues, decir que los números derivados casi cumplen la propiedad (D).

III. 2. La expresión «a lo sumo» no indica que existan efectivamente estos valores de excepción. Para demostrar dicha existencia comenzaremos dando un ejemplo de función que presente un solo valor de excepción, para seguir después con un ejemplo más complicado que presente infinitas.

Tomemos la función

$$\varphi(z) = z\left(1 - \frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}\right)\operatorname{sen}\lg\lg\frac{1}{z} + z \qquad \text{para} \qquad 0 \leqq z \leqq \alpha < 1$$

Esta función tiene $z=0$ por punto singular aislado; por consiguiente en el interior de un cierto intervalo $(0\,\beta)$ es siempre analítica y por ende derivable.

Los números derivados pueden determinarse prescindiendo de infinitésimos $(z \longrightarrow 0)$ de orden superior al primero; luego $z\operatorname{sen}\lg\lg\frac{1}{z}+z$ tiene los mismos números derivados que $\varphi(z)$. Ahora bien, la nueva función coincide infinitas veces, en un entorno arbitrario del origen, con las rectas $y=0$ y $y=2z$, permaneciendo siempre interior a las dos, lo que quiere decir que los dos números derivados derechos son respectivamente 2 y 0. Por consiguiente

$$\varphi'^{+}(0) = 2 \qquad \varphi'_{+}(0) = 0 \tag{7}$$

Al derivar $\varphi(z) - z$ obtenemos:

$$\varphi'(z)-1=\left(1-\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}\right)\operatorname{sen}\lg\lg\frac{1}{z}-\frac{1}{\lg\frac{1}{z}}\,\frac{1}{\lg^2\lg\frac{1}{z}}\operatorname{sen}\lg\lg\frac{1}{z}-$$

$$-\frac{1}{\lg\frac{1}{z}}\left(1-\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}\right)\cos\lg\lg\frac{1}{z}$$

luego, tomando módulos y sacando factor común de $\frac{1}{\lg\frac{1}{z}}$ llegaremos a

$$|\varphi'(z)-1|\leqq 1-\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}+\frac{1}{\lg\frac{1}{z}}\left(1+\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}+\frac{1}{\lg^2\lg\frac{1}{z}}\right).$$

Podríamos poner la diferencia $1-\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}$ dentro de palos verticales, pero no es necesario, pues para una z suficientemente pequeña la diferencia es positiva. El segundo infinitésimo es equivalente a $\frac{1}{\lg\frac{1}{z}}$ y éste es a su vez de orden superior a $\frac{1}{\lg\lg\frac{1}{z}}$, ya que $\lg\lg\frac{1}{z}$ tiende más lentamente a ∞ que $\lg\frac{1}{z}$, por tener superpuesto un logaritmo más. Para una z suficientemente pequeña imperará, en el infinitéssimo suma, el signo — del primero; luego para un determinado α menor o igual a β tendremos

$$|\varphi'(z)-1|<1 \quad \text{para} \quad 0<z\leqq\alpha\leqq\beta$$

que también puede escribirse:

$$2>\varphi'(z)>0 \quad \text{para} \quad 0<z\leqq\alpha. \tag{8}$$

Definiendo la función $\varphi(z)$ simétricamente del lado negativo, esto es, $\varphi(z)=\varphi(-z)=\varphi(|z|)$, sabemos por simetría que cada número derivado pasa a ser el opuesto y toma el mismo valor con signo cambiado, en consecuencia las relaciones (7) y (8) dan lugar a

$$\varphi'_-(0)=-2 \qquad \varphi'^-(0)=0 \tag{9}$$

$$-2<\varphi'(z)<0 \quad \text{para} \quad -\alpha\leqq z<0. \tag{10}$$

Por los valores de los números derivados en el origen vemos que este punto tampoco es anguloso. Resumiendo: los números derivados del primer par atraviesan el eje de las x sin cortarlo, mientras los otros dos lo cortan.

III. 3. La función

$$f(x)=|x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x| \left(1-\frac{1}{\lg \lg \frac{1}{|x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x|}}\right) \operatorname{sen} \lg \lg \frac{1}{|x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x|}$$
$$+|x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x|+\frac{x^2}{2}, \quad 0 \leqq x \leqq \gamma$$

en vez de presentar un valor de excepción, como la anterior, presenta infinitos.

Demostración. La función $f(x)$ puede ser considerada como suma de dos funciones

$$f(x)=\mu(x)+\frac{x^2}{2} \tag{12}$$

siendo la primera función de función, de modo que

$$\mu(x)=\varphi[z(x)] \tag{13}$$

en donde $z(x)$ viene definida por la igualdad

$$z(x)=|x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x| \tag{14}$$

Para que sean válidas todas las relaciones que hemos establecido para φ deberá ser $|z| \leqq \alpha$ $(\alpha<1)$, pero esto sucederá siempre que sea $x \leqq \alpha$, ya que entonces según (14) será $z<x$. Así, como primera condición será $\gamma \leqq \alpha$. Podemos, pues, tomar sin reparo las relaciones que hemos demostrado para $\varphi(z)$.

Prescindiendo del punto $x=0$, como $\frac{x^2}{2}$ es analítica, $f(x)$ es analítica en todos los puntos en que lo es $\mu(x)$ o su igual $\varphi(z)$; ahora bien, esta última deja de ser analítica solamente cuando z se anula, esto es, en el caso en que $-3 \lg x=n\pi$, de consiguiente para los infinitos puntos en que $x=x_n=e^{-\frac{n\pi}{3}}$. Por otra parte en el origen la función $f(x)$ no es analítica, pero sin embargo es derivable ya que es infinitésima de segundo orden en el punto, según se puede constatar directamente en la igualdad (11).

Sabemos, pues, que la función $f(x)$ en el segmento $[0\,\alpha]$ es derivable en todos los puntos si se exceptúan los de la sucesión x_n , cuyo punto límite es el origen.

Derivando (12) en los puntos x_n y teniendo en cuenta que $\mu(x)$ es la superposición de $\varphi(z)$ y de z, tendremos

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x_n) &= \varphi'^+(0)\, z'^+(x_n) + x_n \\ f'^+(x_n) &= \varphi'_+(0)\, z'^+(x_n) + x_n \\ f'^-(x_n) &= \varphi'_+(0)\, z'^-(x_n) + x_n \\ f'_-(x_n) &= \varphi'^+(0)\, z'^-(x_n) + x_n \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

La colocación de los signos $+$ y $-$ se comprende con la siguiente discussión:

1°. Según veremos después, los dos números derivados derechos de z en x_n son positivos e iguales a $3\,x_n{}^2$, mientras los izquierdos son iguales a los primeros con signo cambiado;

2°. Al derivar $\mu(x)$ o su igual $\varphi(z)$ en x_n, z se anula; pero para los otros valores próximos a x_n, z siempre es positiva, ya que es igual a un módulo; luego al tomar límites en la expresión que da las derivadas, siempre procedemos de z positivas, esto es, siempre obtenemos números derivados derechos para φ;

3°. Al tomar números derivados izquierdos obtendremos el producto $\varphi'^+(0)\,.\,z'^-(x_n)$ donde el segundo factor es negativo; luego el límite superior que representa el primer factor es en realidad un límite inferior para el producto, y viceversa. Así tendremos que en las dos últimas desigualdades el signo debe colocarsse en distinto lugar en f y en φ; para las dos primeras, siendo $z(x)$ positvia deberán colocarse en un mismo lugar.

Reemplazando valores en (15) tendremos

$$\left.\begin{aligned} f'^+(x_n) &= 6\,x_n{}^2 + x_n \neq x_n \\ f'_+(x_n) &= x_n \\ f'^-(x_n) &= x_n \\ f'_-(x_n) &= -\,6\,x_n{}^2 + x_n \neq x_n \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Según estos valores, en los puntos x la función no tiene derivada, aunque el punto tampoco resulta ser anguloso.

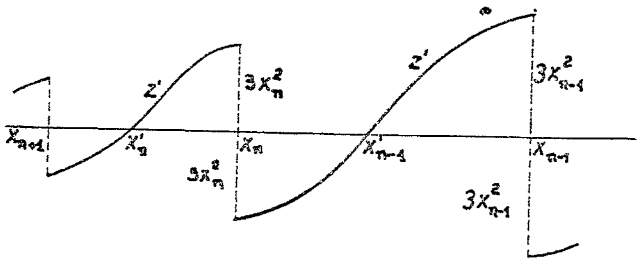
En los demás puntos $x \neq x_n$ las funciones son derivables; luego podemos derivar formalmente (12)

$$f'(x) = \varphi'(z)\, z'(x) + x \qquad x \neq x_n, \tag{17}$$

Sabemos que $z(x)$ se anula en x_{n+1} y x_n, permaneciendo positiva entre estos dos valores, lo que implica que z no sea negativa en el primer punto y no sea positiva en el segundo. Las derivadas laterales de $z = \pm x^3 \operatorname{sen} 3 \lg x$, son

$$z'(x) = \pm 3\, x^2 (\operatorname{sen} 3 \lg x + \cos 3 \lg x), \tag{18}$$

luego $z'^{+}(x_{n+1}) = 3\, x_{n+1}{}^2$ y $z'^{-}(x_n) = -3\, x_n{}^2$, es decir z' cambia de signo en el interior de (x_{n+1}, x_n) y esto sólo puede suceder cuando en un punto interior z' se anula, para lo cual es necesario que el seno y el coseno tomen valores iguales de distinto signo, lo que ocurre para $-3 \lg x = n\pi + 3\frac{\pi}{4}$, o sea para el punto $x = x'_n = e^{-\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{4}}$. De la discusión de z' deducimos que atraviesa el eje de las x en los puntos x_n y x'_n, de modo discontinuo



y creciendo en los primeros y de modo continuo y decreciendo en los segundos. Teniendo en cuenta esto y que $\varphi'(z)$ es siempre positiva, la (17) nos dará

$$\begin{array}{ll} f'(x) < x < x_n & x'_n < x < x \\ f'(x) > x > x_n & x_n < x < x'_{n-1}. \end{array} \tag{19}$$

Estas dos desigualdades y la primera relación de (16) nos permitirán escribir

$$f'^{+}(x) \neq x_n \quad \text{para} \quad x'_n < x < x'_{n-1} \tag{20}$$

Hagamos entrar ahora en acción características infinitesimales. Por un lado sabemos que $\varphi'(z)$ es acotada (8) y z' infinitésima de segundo orden (18); luego $f'^{+}(x)$ es la suma de un infinitésimo de segundo orden más x, o sea es equivalente a x. En los puntos x la primera relación de (16) nos hace llegar a la misma conclussión

$$f'^{+}(x) \sim x. \tag{21}$$

Por otro lado siendo $\varphi'(z) < 2$ y $z' \geqq -6x$ resulta:

$$f'^{+}(x) > -12x^2 + x$$

y la relación (16) lo confirma para los restantes casos $x = x_n$. Pero como en un cierto entorno del punto 0 el segundo miembro será $> \frac{1}{2}x$ y por ende el primero; luego siendo $f'^{+}(x) > \frac{1}{2}x$ en un cierto entorno solamente puede ser infinitésima para $x = 0$. γ se elige de modo que verifique estas últimas condiciones y esté comprendido dentro de $(0\,\alpha)$.

Finalmente veremos que $f'^{+}(x)$ en $(0\,\gamma)$ no puede tomar infinitos valores de la sucesión $\{x_n\}$. En efecto, sean los valores que toma de subíndice $n = \alpha_{n'}$ $(n' = 1, 2, \ldots)$ y los puntos en que los toma $x = \beta_{n'}$, entonces tendremos para todo n'

$$f'^{+}(\beta_{n'}) = x_{\alpha_{n'}} \tag{22}$$

siendo el segundo miembro infinitésimo con $n' \to \infty$, también lo es el primero y por tanto lo es también $\beta_{n'}$. Siendo $\beta_{n'}$ infinitésima tendremos (21)

$$\beta_{n'} \sim f(\beta_{n'}) = x_{\alpha_{n'}};$$

luego $\beta_{n'} \sim x_{\alpha_{n'}}$. Para un n' suficientemente grande n'_0 tendremos

$$x'_{\alpha_{n'_0}} < \beta_{n'_{n'_0}} < x'_{\alpha_{n'_0}} - 1$$

puesto que $x'_{\alpha_n'}$ no es equivalente a $x_{\alpha_{n'}}$. Si hacemos N_0 igual a $\alpha_{n'_0}$ y $\beta_{n'_0}=x_0$ reemplazando los valores en (22) resulta

$$f'^{+}(x_0)=x_{N_0} \quad \text{siendo} \quad x'_{N_0}<x_0<x'_{N_0-1}$$

en contradicción con (20). El absurdo proviene de la hipótesis (22), es decir, de suponer que $f'^{+}(x)$ toma infinitos valores pertenecientes a la sucesión $\{x_n\}$; luego a partir de un n en adelante dejará de tomar todos los valores de la sucesión $\{x_n\}$, y estos según (19) son valores pertenecientes al intervalo de oscilación de pendiente de la función $Q.L.Q.D.$

III. 4. En el ejemplo anterior $f'_{-}(x)$ también deja de tomar infinitos valores de su intervalo de oscilación. En cambio los números derivados del otro par toman todos los valores. La función $-f(x)$ se comportaría de distinta manera, ya que los números derivados que dejarían de tomar infinitos valores serían los del segundo par.

¿Es posible dar una función en que el único número derivado que deje de tomar infinitos valores sea $f'^{+}(x)$, a diferencia del ejemplo anterior en que tampoco los toma $f'_{-}(x)$? En efecto, es posible si en vez de tomar φ simétrica del lado negativo la hubiéramos definido por la igualdad $\varphi(z)=z^2$, para $(z<0)$. Entonces el único número derivado que no tomaría el valor 0 sería $\varphi'^{+}(z)$. La función $f(x)$ construída a partir de la nueva φ nos daría la propiedad (D) salvo para el número derivado $f'^{+}(x)$. Las demostraciones son tan engorrosas como en los casos estudiados; pero no presentan ninguna dificultad.

*

* *

IV. 1. En todos los ejemplos dados siempre existe un par de números derivados que toman todos los valores: ¿será siempre así? La contestación nos dará uno de los teoremas más precisos y generales sobre los números derivados.

Supongamos $f'^{+}(x)\neq\mu$ para $(a\leqq x\leqq b)$, y los números A, tales que $L>A>\mu>a>l$. Por definición de L y l sabemos que deben existir en el interior de (ab) puntos x_0 y x_1, tales que

$$f'^{+}(x_0) < a < A < f'^{+}(x_1).$$

Estos puntos deben estar ordenados de modo que $x_0 < x_1$. de lo contrario $f'^{+}(x)$ sería decreciente respecto al par $(x_0 x_1)$ y tomaría por consiguiente el valor μ comprendido entre $f'^{+}(x_0)$ y $f'^{+}(x_1)$, contra lo que hemos supuesto. Es forzoso admitir que $x_0 < x_1$.

En el punto x_1 pueden ocurrir dos cosas: o bien $f'_{+}(x_1) \geqq A$; o bien $f'_{+}(x_1) < A$.

En el primer caso tendremos $f'_{+}(x_0) \leqq f'^{+}(x_0) < a < A < f'_{+}(x_1)$; luego $f'_{+}(x)$ es creciente respecto del par $(x_0 x_1)$ y él y su opuesto tomarán todos los valores comprendidos entre $f'_{+}(x_0)$ y $f'_{+}(x_1)$ y por ende todos los valores comprendidos entre A y a.

En el segundo caso siendo $f'_{+}(x_1) < A < f'^{+}(x_1)$, $f'_{+}(x)$ tomará a la derecha de x_1 forzosamente valores mayores que A (Corol. 2), sea x_2 un punto de estos $(x_0 < x_1 < x_2)$, esto es $f'_{+}(x_2) > A$. Pero como sabemos que $f'_{+}(x_0) < a$, la función $f'_{+}(x)$ también resultará creciente respecto al nuevo par $(x_0 x_2)$. y por tanto él y su opuesto deberán tomar todos los valores comprendidos entre a y A.

En los dos casos siempre llegamos a la conclusión de que $f'_{+}(x)$ y su opuesto toman todos los valores comprendidos entre A y a, que es lo mismo que decir entre L y l, ya que aquéllos pueden ser infinitamente próximos a éstos. La simple hipótesis $f'^{+}(x) \neq \mu$ exige que los números derivados del otro par cumplan la propiedad (D).

Recordando la identidad entre el teorema de Lagrange y la propiedad (D) podremos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 8. *Si un número derivado deja de tomar un solo valor comprendido entre los extremos de oscilación de pendiente, entonces los números derivados del otro par verifican la propiedad (D) y el teorema de Lagrange.*

Teorema 9. *Por lo menos un par de números derivados opuestos verifica el teorema de Lagrange-propiedad (D).*

Estos últimos teoremas vienen a confirmar nuestra tesis inicial de que la coincidencia de números derivados tiene una importancia muy relativa. En efecto, al suponer coincidentes los números derivados el último teorema nos da para la derivada ordinaria la propiedad (D), el teorema del incremento finito y el teorema de Rolle.

Por otro lado, un número derivado determinado tiene propiedades muy cercanas a la derivada ordinaria, como puede verse en el teorema 7, y las mismas si sabemos algo de su crecimiento o decrecimiento (Teorema 4).

Damos por terminado el trabajo con estas conclusiones. Queda abierto el problema para el caso general de que las funciones estudiadas presenten angulosidades.