CIERTAS TRANSFORMACIONES EN LA DINAMICA SIN ELEMENTOS PERIODICOS

por

GEORGE D. BIRKHOFF y JAIME LIFSHITZ*

INTRODUCCION

En el estudio del conjunto de movimientos de un sistema dinámico de 2 grados de libertad, uno de los métodos utilizados ha sido el de la reducción del problema al estudio de la transformación de una superficie bidimensional sobre sí misma, método descubierto y aplicado por Poincaré y posteriormente utilizado y perfeccionado con éxito por Levi-Civita y G. D. Birkhoff(**).

En virtud de los teoremas de existencia, para un conjunto de dos coordenadas de posición y las dos velocidades respectivas dado en un instante, existe un movimiento único del sistema dinámico. Considerando el espacio-fase formado de las cuatro variables arriba mencionadas, a todo punto del mismo le corresponde una órbita definida en forma unívoca, y a toda órbita le corresponde una línea en este espacio cuadridimensional. El conjunto de líneas correspondientes a todos los movimientos posibles para una energía constante dada llena un subespacio tridimensional del espacio-fase. De existir una superficie analítica especial que está cortada por las líneas de movimiento en el mismo sentido, la llamada «superficie analítica de sección», el estudio cualitativo del conjunto de movimientos se puede reducir al estu-

(*) Guggenheim Fellow, Harvard University.

(**) Para un estudio reciente y detallado véase *Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques*, Mem. Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei. Ex Serie III, Vol. I de G. D. BIRKHOFF.

dio de cierta transformación T de esta superficie sobre sí misma. La transformación T será $P' = T(P)$, donde P, P' son puntos de la superficie de sección que están sobre la misma línea de movimiento y P' es el primer punto de esta clase posterior a P en el sentido progresivo del tiempo. Esta transformación está definida para todos los puntos de la superficie de sección, es biunívoca y bicontinua, y en los casos ordinarios es aún bianalítica. Además, en estos casos existe una integral de superficie $G(C) = \int_c F dS$, $M \geqq F \geqq m > 0$, que no cambia con la transformación T, propiedad característica que en cierto sentido se puede considerar equivalente a la inalterabilidad de las áreas.

Para que el movimiento correspondiente a un punto P interior de la superficie de sección sea periódico, es evidentemente necesario y suficiente que la transformación T, aplicada al punto P un número finito de veces, dé el mismo punto, es decir, que $T^n(P) = P$, para cierto $n \neq 0$. En el caso general habrá puntos periódicos, resultado de mucha importancia en la dinámica analítica. Otro problema muy interesante, el estudio de los movimientos en la vecindad de un movimiento periódico, también fué resuelto en forma muy completa.

En el caso particular del problema restringido de los tres cuerpos, Poincaré ha demostrado que hay una superficie de sección topológicamente equivalente a la región anular plana. Posteriormente G. D. Birkhoff demostró que esta transformación T es producto de dos transformaciones biunívocas. R y U, continuas e involutivas de segundo orden, que transforman las circunferencias de fronteras sobre sí mismas, cada una de las cuales cambia el orden cíclico de los puntos sobre estas circunferencias.

En el presente trabajo se tratará de encontrar algunas propiedades de las transformaciones $T = RU$, en la hipótesis de que no haya puntos periódicos. La cuestión ¿Cuáles son los sistemas dinámicos que tienen un número finito de movimientos periódicos? es muy importante para la dinámica teórica y estrechamente enlazada con tales transformaciones $T = RU$.

1. *Transformaciones involutivas de 2º orden.*

I. Si una transformación T de una circunferencia sobre sí misma es biunívoca, continua e invierte el orden cíclico de los puntos, entonces existen dos puntos invariantes distintos P_1, P_2 sobre la circunferencia, que la dividen en dos arcos abiertos A_1, A_2, que se intercambian por la transformación T.

Si ϑ y ϑ' son las coordenadas polares de los puntos P y $P' = T(P)$, la función $\vartheta' = f(\vartheta)$ es continua y monótona decreciente. La función $\varphi(\vartheta) = f(\vartheta) - \vartheta$ también es monótona decreciente y en el intervalo $0 < \vartheta < 2\pi$ disminuye 4π. Entonces la curva $\varphi = f(\vartheta) - \vartheta$ corta exactamente dos líneas sucesivas de la familia $\varphi = 2k\pi$ (k-entero) en el intervalo $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Para los dos puntos correspondientes P_1, P_2 se tendrá:

$$f(\vartheta_1) - \vartheta_1 = 2k\pi \qquad \rightarrow \vartheta'_1 = f(\vartheta_1) = \vartheta_1 + 2k\pi,$$

$$f(\vartheta_2) - \vartheta_2 = 2(k+1)\pi \rightarrow \vartheta'_2 = f(\vartheta_2) = \vartheta_2 + 2(k+1)\pi,$$

y por lo tanto el punto con coordenada $\vartheta'_1 = f(\vartheta_1) = \vartheta_1 + 2k\pi$ coincide con el punto con coordenada ϑ_1, o sea, es inveriante. Lo mismo se puede decir del otro punto. Los arcos A_1, A_2 en que queda dividida la circunferencia se intercambian por la transformación T, porque si no se intercambiaran habría un punto Q tal que Q y $T(Q)$ estarían en el mismo arco. Pero en este caso el orden cíclico de P_1QP_2 no se invertiría por la transformación, lo cual es imposible, quedando probado que $T(A_1) = A_2$ y $T(A_2) = A_1$. Es evidente que no puede haber un tercer punto invariante.

II. Si T es una transformación biunívoca, continua e involutiva de un círculo C sobre sí mismo, que invierte el orden cíclico de los puntos sobre la circunferencia, el conjunto S de los puntos invariantes es un continuo.

El conjunto S es cerrado porque la transformación T es continua. Para probar que es conexo, supongamos lo contrario, que $S = \bar{S} = S_1 + S_2$, y $S_1 \times \bar{S}_2 = 0 = \bar{S}_1 \times S_2$, entonces, $\bar{S}_1 = \bar{S}_1 \times S$ $= \bar{S}_1 \times S_1 + \bar{S}_1 \times S_2 = \bar{S}_1 \times S_1 = S_1$, y en la misma forma $\bar{S}_2 = S_2$. S_1 y S_2 siendo conjuntos cerrados sin punto común se pueden separar en el plano mediante una curva cerrada simple.

Si esta curva está en el interior del círculo, si C es el conjunto de puntos interiores a esta curva, y si Q está en $S \times C$, el subconjunto conexo máximo de $C \times T(C)$ que contiene Q es una región topológicamente equivalente a un círculo. La transformación T es una involución de esta región sobre sí misma que cambia el orden cíclico de los puntos en la frontera. Entonces debe haber dos puntos invariantes sobre la frontera; pero por otra parte esta frontera está contenida en la curva que separa los puntos invariantes sin tener tales, y en su transformada, que evidentemente tampoco los tiene.

Si la curva cerrada que separa S_1 y S_2 corta a la circunferencia, habrá un arco de la misma interior al círculo que dividirá el círculo en dos partes, cada una de las cuales contendrá puntos invariantes. Aplicando el mismo razonamiento que antes se obtiene que debe existir una curva sin puntos invariantes que divide el círculo en regiones para las cuales T es una involución, y por el teorema anterior en las dos fronteras de estas regiones deberá haber dos puntos invariantes, lo cual es imposible. Como no puede haber una separación mediante una curva que corte a la circunferencia ni mediante una curva que no la corte, el conjunto S es conexo y por lo tanto es un continuo.

Si tomamos un punto Q perteneciente a S y un número ε ($\varepsilon > 0$), arbitrarios, el subconjunto conexo máximo $U \subset V_\delta(Q) \times T[V_\delta(Q)]$ (*), ($\varepsilon > \delta > 0$), que contiene Q es una región topológicamente equivalente a un círculo, y la transformación T satisface todas las condiciones del teorema anterior. Entonces el conjunto de los puntos invariantes S' del conjunto $\bar{U}$ es conexo en $\bar{U}$. Evidentemente se tiene $S' = S \times \bar{U}$ y $\bar{U} \subset V_\varepsilon(Q)$, y como ε es arbitrario, S es localmente conexo en Q. Siendo Q punto arbitrario de S, S es un continuo localmente conexo y por lo tanto los puntos P_1, P_2 de S se pueden conectar mediante un arco simple J, $J \subset S$. J divide al círculo en dos partes C_1, C_2 tales que todo punto interior de C_1 se puede conectar con A_1 mediante un arco simple interior al círculo, que no corta J, y lo mismo C_2 respecto a A_2. Si P pertenece a C_1 entonces $T(P)$ pertenece a C_2, lo que es fácil verificar conectando P con un punto de A_1 mediante un arco que no corta J; la transformada de este arco tampoco cortará J y, como contiene un punto de A_2, tiene que estar totalmente en C_2. De allí también que no puede haber puntos invariantes fuera de J, o sea, que $J = S$.

(*) Usamos el símbolo $V_\varepsilon(Q)$ para designar el conjunto de puntos interiores al círculo, cuya distancia al punto Q es menor que ε.

III. Una transformación T que satisface las condiciones del teorema II, deja invariantes los puntos de un arco simple J que conecta los puntos invariantes de la frontera e intercambia las regiones C_1 y C_2 en que éste divide al círculo, o lo que es lo mismo, es topológicamente equivalente a una reflexión (*).

III'. Una transformación biunívoca, continua e involutiva de un anillo sobre sí mismo, que transforma las circunferencias de frontera sobre sí mismas e invierte el orden cíclico de los elementos sobre ambas, es topológicamente equivalente a una reflexión.

Para probarlo basta definir una transformación T' que transforma las circunferencias concéntricas del círculo interior sobre sí mismas en forma similar a la circunferencia interior de frontera, y sea igual a T sobre el anillo. Como T' satisface las condiciones del teorema anterior, el conjunto de puntos invariantes en el anillo forma dos arcos simples que no se cortan, cada uno de los cuales conecta un punto invariante de la circunferencia interior con uno de la exterior. Por lo tanto dividen el anillo en dos partes que se intercambian por la transformación T.

2. *Propiedades generales de una transformación $T = RU$.*

Como hemos dicho anteriormente, en el problema restringido de los tres cuerpos la transformación de la superficie de sección es igual al producto de dos transformaciones del tipo arriba estudiado y, además tiene una integral invariante de área.

Vamos a representar una tal transformación inicial por $T = RU$, $R^2 = I = U^2$, donde I es la transformación idéntica, T, R, U, son transformaciones biunívocas y continuas sobre la región anular, R y U son involuciones de segundo orden que transforman las circunferencias de frontera sobre sí mismas e invierten el orden cíclico de los puntos sobre éstas. Escribimos la integral de área $G(C) = \int_C F dS$, $(M > F > m > 0)$, tal que $G[T(C)] = G(C)$.

Los conjuntos de puntos invariantes bajo R y U se indicarán por A y B respectivamente, es decir,

(*) Un teorema más general fué demostrado por S. EILENBERG en *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, Fundamenta Mathematicae, vol. 22 (1934), pág. 28-41.

$$\begin{aligned} &P \text{ en } A \;\leftrightarrow R(P)=P, \quad A=\alpha+\alpha' \;(\alpha,\alpha' \text{ arcos simples}),\\ &P \text{ en } B \;\leftrightarrow U(P)=P, \quad B=\beta+\beta' \;(\beta,\beta' \;\;\text{»} \;\;\;\text{»}\;). \end{aligned} \tag{I}$$

Escribiendo $T^nR=R_n$, y $T^nU=U_n$, se tiene:

$$\begin{aligned} &T^{-1}=(RU)^{-1}=U^{-1}R^{-1}=UR,\\ &R_1=TR=(RU)R=R(UR)=RT^{-1},\\ &U=UR^2=(UR)R=T^{-1}R=R^2U=R(RU)=RT,\\ \text{y } &R_n=T^nR=T^{n+1}T^{-1}R=T^{n+1}U=U_{n+1}. \end{aligned}$$

Se deduce, por inducción,

$$\begin{aligned} &R_n=T^nR=RT^{-n}, && (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\\ &U_n=R_{n-1}=RT^{-n+1}=RTT^{-n}=UT^{-n}, && (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \end{aligned} \tag{II}$$

Por lo tanto, $R_n{}^2=T^nRT^nR=T^nT^{-n}RR=I,$

$$\begin{aligned} &U_n{}^2=I,\\ &R_nU_n=T^nRT^nU=T^nT^{-n}RU=RU=T. \end{aligned} \tag{III}$$

Es decir, el par de transformaciones (R_n, U_n), tiene las mismas propiedades que el par inicial (R, U) $(\equiv(R_0, U_0))$ y, para el estudio de la transformación T, puede substituirlo. Además «Q pertenece a $T^n(A)$», es decir «$T^{-n}(Q)$ pertenece a A», equivale a

$$R[T^{-n}(Q)]=T^{-n}(Q) \leftrightarrow T^nR(Q)=T^{-n}(Q) \leftrightarrow T^{2n}R(Q)=Q$$

o sea, «Q pertenece a $T^n(A)$» equivale a

$$Q=R_{2n}(Q)\equiv U_{2n+1}(Q), \tag{I'}$$

y en la misma forma decir que Q pertenece a $T^n(B)$ equivale a

$$Q=R_{2n-1}(Q)\equiv U_{2n}(Q),$$

lo cual da las relaciones entre las curvas invariantes para diferentes factorizaciones de T (*).

(*) Se pueden ver estas propiedades notando que R_i y U_i siempre se pueden presentar como $T^{-n}RT^n$ o como $T^{-n}UT^n$.

3. *Las transformaciones $T = RU$ sin puntos periódicos.*

IV. En caso de que las transformaciones T, R, U, sean del tipo antes estudiado, las siguientes propiedades son equivalentes: (I) No hay puntos periódicos (puntos tales que $T^n(P) = P, n \neq 0$); (II) Los conjuntos $\{A_n; B_n\}$ no se cortan ($A_n = T^n(A)$, $B_n = T^n(B)$); (III) $\lim \frac{\vartheta_n - \vartheta}{n} = \sigma$, existe y es igual para todos los puntos del anillo y $\frac{\sigma}{\pi}$ es un número irracional, siendo ϑ y ϑ_n las coordenadas polares respectivas de los puntos P y $T^n(P)$.

Demostración de $I \rightarrow II$.

Si P pertenece a A_n y A_m, $(n \neq m)$, entonces:

$$T^{2n-2m}(P) = T^{2n-2m}R^2(P) = T^{2n}RT^{2m}R(P) = R_{2n}[R_{2m}(P)]$$
$$= R_{2n}(P) = P;$$

en la misma forma, si P pertenece a B_n y B_m $(n \neq m)$, $T^{2n-2m}(P) = P$, y si pertenece a A_n y B_m,

$$T^{2n-2m+1}(P) = T^{2n-2m+1}R^2(P) = T^{2n}RT^{2m-1}R(P) =$$
$$R_{2n}[R_{2m-1}(P)] = R_{2n}(P) = P,$$

de donde $(I) \rightarrow (II)$.

Demostración de $II \rightarrow III$.

Si representamos la región anular antes definida sobre una faja infinita en forma tal que las coordenadas cartesianas correspondan a las coordenadas polares ϑ y r respectivamente, a cada curva sobre el anillo le corresponderá una familia de curvas desplazadas en 2π, una respecto de la anterior. Si $F' = rF$, se tiene la relación $G'(C') = G(C)$, donde C' es la región correspondiente a C (tomada una sola vez), y $G'(C') = \int_{C'} F'dS$. Sin perder la generalidad se puede suponer que $G(C)$ sobre todo el anillo es igual a 2π. El valor de $G'(C)$ sobre el área entre α_n y α_{n+1} es independiente de n, y se designará con el símbolo σ. Es fácil ver que, definiendo en forma conveniente lo que es el área dentro de un contorno no necesariamente simple, la integral $G(C)$ sobre el área entre un arco simple cualquiera que conecta las circunferencias de frontera y su imagen por la transformación T también será σ.

Si la relación $\frac{\sigma}{\pi}$ es racional, se tiene $\frac{\sigma}{2\pi} = \frac{m}{n}$ o sea $n\sigma = 2m\pi$. Es decir, la integral $G'(C)$ sobre el área entre α_i y α_{i+n} es igual a la integral sobre el área entre la primera imagen de α_i y la imagen de orden $(m+1)$ de la misma. Entonces la primera imagen de α_{i+n} deberá coincidir con la imagen de orden $(m+1)$ de α_i o cortarla en un punto interior, y por lo tanto α_i y α_{i+n} tendrán un punto común sobre el anillo. De allí que si las curvas $\{A_n; B_n\}$ no se cortan, $\frac{\sigma}{\pi}$ ha de ser un número irracional. En este supuesto al ser $m < \frac{n\sigma}{2\pi} < (m+1)$, la imagen de α_n estará entre las imágenes de orden $(m+1)$ y $(m+2)$ de α_0. Como todo punto P del anillo tiene su imagen entre las dos primeras imágenes de α_0, la imagen correspondiente de $T^n(P)$ estará entre las imágenes de orden $(m+1)$ y $(m+3)$ de α_0. Si K' es la extensión máxima de la región entre las dos primeras imágenes en el sentido de la coordenada ϑ, y ϑ, ϑ_n son las coordenadas respectivas de P y $T^n(P)$, se tiene:

$$2m\pi - K' < \vartheta_n - \vartheta < 2(m+1)\pi + K'.$$

Por otra parte:

$$2(m+1)\pi > n\sigma > 2m\pi,$$

de donde

$$-2\pi - K' < (\vartheta_n - \vartheta) - n\sigma < 2\pi + K',$$

o sea

$$|(\vartheta_n - \vartheta) - n\sigma| < K = K' + 2\pi. \qquad (IV).$$

Evidentemente se tiene $\lim \frac{\vartheta_n - \vartheta}{n} = \sigma$ para todo punto del anillo. y por lo tanto $(II) \to (III)$.

Demostración de $III \to I$.

Para todo punto periódico el límite anterior es racional respecto a π por lo cual $(III) \to (I)$.

Se tiene $(I) \to (II) \to (III) \to (I)$, lo que prueba que

$$(I) \leftrightarrow (II) \leftrightarrow (III).$$

IV'. Las proposiciones: (I'). No hay puntos periódicos interiores; (II'). Las curvas $\{\alpha_n\}$ no se intersecan en puntos interiores; (III'). Existe un «ángulo de rotación» σ, irracional respecto a π, tal que la relación $|(\vartheta_n - \vartheta) - n\sigma| < K$, ($K =$ const., $0 < K < \infty$), sea cierta para todos los puntos del anillo, son equivalentes a las proposiciones anteriores.

En efecto tenemos:

$$(I) \to (I') \to (II') \to (III') \to (III).$$

4. *Definición de una función continua* $\Theta(P)$, *tal que* $\Theta[T(P)] = \Theta(P) + \sigma$.

La propiedad de σ es semejante a la del ángulo de rotación para las transformaciones continuas y biunívocas de curvas cerradas sobre si mismas. La transformación T transforma las circunferencias de frontera sobre sí mismas y para ambas el ángulo de rotación será evidentemente σ. El hecho de que los ángulos de rotación sean iguales sobre estas curvas es evidente por el teorema geométrico de Poincaré.

Existe una gran semejanza entre la transformación T y la rotación de una circunferencia. En efecto:

V. Existe una correspondencia biunívoca y continua entre los puntos de una circunferencia Γ y ciertos conjuntos continuos en el anillo, tal que la correspondencia se preserva al aplicar una rotación a Γ y la transformación T al anillo simultáneamente.

La correspondencia se define poniendo que si P pertenece a α_n, $\Theta(P) = n\sigma \pmod{2\pi}$, y mediante el paso al límite. Los elementos de $\{\alpha_n\}$ aparecen sobre el anillo en el mismo orden que los correspondientes de Γ, ya que las integrales $G(C)$ entre elementos de $\{\alpha_n\}$ son iguales a las distancias de los correspondientes sobre Γ.

El conjunto de los puntos de las curvas $\{\alpha_n\}$ es denso sobre el anillo, es decir, el conjunto $\{\alpha_n\}$ comprende todos los puntos del anillo, pues de no serlo habría por lo menos un entorno que no cortaría ninguna curva de la familia especificada. La integral $G(C)$ sobre un subconjunto cerrado del entorno tendría un valor positivo g. Si

$N > \frac{2\pi}{g}$, por lo menos uno de los valores de la integral $G(C)$ sobre el área entre un par de curvas $\{\alpha_i\}$ $(i=0, 1, \ldots, N)$, será menor que g. Entonces habrá un número $n \leqq N$, tal que $G(C)$ sobre el área entre α_0 y α_n es menor que g. Tomando la sucesión $\{\alpha_{in}\}$, un número finito de estas curvas dividen el anillo en áreas tales que $G(C)$ sobre éstas es menor que g, lo cual implica la existencia de curvas α_i que cortan el entorno escogido. Esta contradicción prueba la densidad de este conjunto de curvas. Debido a ello la correspondencia $\vartheta = \Theta(P)$ está definida sobre todo el anillo.

Si dos sucesiones de puntos $\{P'_n\}, \{P''_n\}, (P'_n, P''_n \varepsilon \Sigma\{\alpha_i\})$ cepto un número finito, todos los puntos $\{\vartheta'_n\}$ y $\{\vartheta''_n\}$ de Γ tales que $\vartheta'_n \rightarrow \vartheta', \vartheta''_n \rightarrow \vartheta''$ donde $\vartheta' \neq \vartheta''$, habrá dos entornos de los puntos ϑ', ϑ'' distintos entre sí, y tales que fuera de ellos habrá sólo un número finito de puntos $\{\vartheta'_n\}$ y $\{\vartheta''_n\}$. Entonces, excepto un número finito, todos los puntos $\{P'_n\}$ y $\{P''_n\}$ estarán en conjuntos cerrados distintos, y por lo tanto no podrán tener un punto límite común. Por eso a un punto P del anillo no le puede corresponder más de un punto de la circunferencia Γ, y como la correspondencia está definida para todos los puntos, la función Θ (P) es uniforme. Como todo par de puntos para los cuales esta función tiene valores distintos pueden ser separados mediante curvas de la familia $\{\alpha_i\}$, el valor que se obtiene tomando una sucesión convergente de puntos P cualesquiera también será único, y por lo tanto la función $\Theta(P)$ es continua.

El conjunto de puntos $\{P\}$, tales que $\Theta(P) = \text{const.}$ es evidentemente un conjunto cerrado. Si se considera una sucesión de curvas $\{\alpha_i\}$ tales que $\{\vartheta_i\}$, $(\vartheta_i = \Theta(\alpha_i))$ converge hacia un valor ϑ permaneciendo menor que éste, el límite de esta sucesión será un conjunto continuo $\gamma'(\vartheta)$ cuyos puntos satisfacen la condición $\Theta(P) = \vartheta$. El conjunto $\gamma''(\vartheta)$ construído en la misma forma aproximándose a ϑ por valores mayores tiene las mismas propiedades. La suma de estos dos conjuntos comprende todos los puntos que satisfacen la condición $\Theta(P) = \vartheta$ porque estos límites son independientes de las sucesiones escogidas. Estos conjuntos deben tener un punto común, porque, si no hubiera tal, el conjunto de curvas $\{\alpha_i\}$ no sería denso. Por lo tanto, el conjunto $\gamma(\vartheta) = \gamma'(\vartheta) + \gamma''(\vartheta)$ es un conjunto continuo, que conecta las circunferencias de frontera. Es evidente que la familia $\{\gamma\}$ sería la misma si se tomara como base el conjunto de curvas $\{\alpha'_i\}$, $\{\beta_i\}$ o $\{\beta'_i\}$. La relación entre esta familia de conjuntos y la transformación T es: $T[\gamma(\vartheta)] = \gamma(\vartheta + \sigma)$.

Considerando un conjunto $\gamma(\vartheta_0)$ y una constante positiva arbitraria ε dados, se pueden dar dos arcos α_n, α_m que encierren a $\gamma(\vartheta_0)$ y tales que $G(C)$ sobre el área entre los mismos sea menor que ε. Entonces la integral está perfectamente definida entre dos elementos $\gamma(\vartheta_1)$ y $\gamma(\vartheta_2)$, siendo este valor igual a $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$, o sea, el valor de la integral entre dos elementos de $\{\gamma\}$ es igual a la longitud del arco entre los puntos correspondientes sobre F.

VI. Suponiendo que haya curvas invariantes simples, y que no haya puntos periódicos, estas curvas han de ser cerradas, no se pueden entrecortar, y separan las circunferencias de frontera del anillo.

Si la curva invariante no separara las circunferencias de frontera, habría una curva que conectaría estas circunferencias sin cortar la curva invariante. Evidentemente el ángulo de rotación para los puntos de la curva sería 0 (o un múltiplo de 2π), lo cual es imposible porque no hay puntos periódicos. Debe ser cerrada, porque una curva abierta no divide el plano.

Para demostrar que no se cortan supongamos lo contrario, que dos curvas invariantes J_1 y J_2 se cortan sin coincidir. Habría un punto P de J_1 que no estaría sobre J_2, y por lo tanto estaría a cierta distancia finita de J_2. Supongamos que P es interior a J_2. En toda vecindad de P siempre hay puntos exteriores a J_1, y por lo tanto habrá un punto Q interior a J_2 y exterior a J_1. Entonces existe un conjunto continuo C', que comprende a Q, limitado por arcos de curvas J_1 y J_2, tal que ningún punto interior de C' esté sobre J_1 ni J_2. Como $J_1 \times J_2 \neq 0$ y contiene más de un punto, la frontera del conjunto C' es una curva cerrada simple. La integral $G(C)$ sobre esta área es diferente de cero, y como la integral $G(C)$ sobre el anillo completo es finita, para cierto número finito n, $T^n(C')$ y C' han de tener puntos comunes interiores, y por lo tanto han de coincidir. Pero en este caso el ángulo de rotación σ para los puntos del conjunto C' sería racional respecto a π, lo cual es imposible.

5. *Propiedades de las transformaciones R y U.*

Las transformaciones R y U no alteran la familia de curvas

$\{\alpha_i\}$, y por lo tanto tampoco alteran la familia de cunjuntos $\{\gamma\}$ El valor de la integral $G(C)$ entre α_0 y α_1 es σ, y el valor de $G(C)$ entre las correspondientes $R(\alpha_0)=\alpha_0$ y $R(\alpha_1)=\alpha_{-1}$ será $-\sigma$, porque es conveniente considerar esta área como negativa, ya que el orden cíclico de los puntos sobre la frontera de esta región se altera por R. La relación anterior se puede generalizar probándola para todo par de curvas $\{\alpha_i\}$ y por el paso al límite para todo par de conjuntos $\{\gamma\}$. En forma explícita se tiene $G[R(C)]=-G(C)$, donde C es un área entre dos conjuntos de $\{\gamma\}$ lo que prueba que la transformación R es para la circunferencia F exactamente una reflexión con respecto al diámetro que pasa por O. Como $T=RU$ corresponde a una rotación de E, U ha de corresponder a una reflexión, y β, β' han de corresponder a los puntos $-\frac{\sigma}{2}$, $\pi-\frac{\sigma}{2}$ de F.

VII. Si J es una curva invariante simple respecto a la transformación $T=RU$, y no hay puntos periódicos para la transformación T, J también es invariante respecto a R y a U.

La curva $R(J)$ es invariante para la transformación T, pues por la definición:

$$T(J)=J \to T^{-1}(J)=J.$$

$$\to T[R(J)]=R[T^{-1}(J)]=R(J).$$

La curva α_0 forzosamente ha de cortar J. Si P está contenido en $\alpha_0 \times J$, entonces P pertenece a J y $P=R(P)$ pertenece a $R(J)$, y por el teorema anterior J y $R(J)$ han de coincidir. En la misma forma $U(J)=J$.

Tanto R como U cambian el orden cíclico de los puntos sobre J. De allí se ve que el papel de T, R y U sobre el área entre J y una de las circunferencias de frontera es el mismo que sobre el anillo completo.

En particular la relación $G(R(C))=-G(C)=G(U(C))$, es cierta para toda área abierta limitada por subconjuntos conexos de $\{\gamma\}$ y arcos de curvas invariantes simples $\{J\}$ (incluyendo las circunferencias de frontera) (*).

(*) J. LIFSHITZ está actualmente estudiando el problema de existencia de las curvas invariantes.