SOBRE SERIES DIVERGENTES Y PROLONGACION ANALITICA

por

MARIO O. GONZÁLEZ
Universidad de la Habana

La presente nota tiene por objeto dar a conocer un nuevo método de sumación de series divergentes. En una teoría donde existen ya tan numerosos métodos especiales con eficacia diversa no tendría casi interés un método más si no fuese por la circunstancia de que éste que ofrecemos ahora está basado en ideas diferentes de las que sirven de fundamento a los métodos clásicos.

1. Consideremos la serie numérica de términos cualesquiera

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

así como la serie de potencias que llamaremos *asociada*

$$u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots+u_nz^n+\ldots \tag{2}$$

tal que para $z=z_0$ sea $a_n=u_nz_0{}^n$ (*). Supondremos que la serie (2) no tiene radio de convergencia nulo ni infinito, esto es,

$$0<\varlimsup_{n\to\infty}|u_n|^{-\frac{1}{n}}=R<\infty.$$

Se puede siempre tomar $R=1$, pues la sencilla transformación $z=Rz'$ reduce el caso general a éste.

La serie (2) define un elemento de una función analítica

(*) Otra serie asociada cualquiera $\sum v_n z^n$, es decir tal que para $z=z_1$ se tenga $a_n=v_n z_1{}^n$ no difiere esencialmente de (2) pues se pasa de una a otra por el cambio de variable $z'=(z_1:z_0)z$.

$f(z)$ en el círculo de radio 1. Cuando $f(z)$ no sea uniforme se considerará sustituído el plano-z por la «estrella» (no necesariamente rectilínea) de $f(z)$ respecto a 0. Supongamos que $f(z)$ tenga todas sus singularidades en el semiplano $R(z) > 0$. Los trabajos de Hadamard, Leau, Faber, Dienes, Mandelbrojt y otros, sobre las singularidades de las funciones analíticas, permiten determinar *en ciertos casos* los puntos singulares de una función cuando se conocen los coeficientes de su desarrollo tayloriano (*). Si los coeficientes de la serie (2) fuesen de tal naturaleza que la aplicación de los criterios mencionados resultase imposible, o dejase subsistir cierta duda acerca de la distribución de las singularidades de $f(z)$, siempre cabría situarse dentro de las condiciones supuestas mediante el procedimiento siguiente: se aplica a la serie (2) la transformación de Euler

$$z = \frac{z'}{1-z'}$$

la cual transforma el círculo $|z| < 1$ en el semiplano $R(z') < \frac{1}{2}$ y la nueva función (**)

$$g(z') = \frac{1}{1-z'} f\left(\frac{z'}{1-z'}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n z'^n}{(1-z')^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z'^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!\,m!} z'^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z'^k \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!\,(k-n)!} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z'^k,$$

en donde

$$v_k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} u_n,$$

será analítica regular en $R(z') < \frac{1}{2}$. Si se efectúa ahora la traslación $z' = z'' + \frac{1}{2} - \delta$ en donde δ es un número positivo peque-

(*) HADAMARD, *La Série de Taylor et son prolongement analytique*. DIENES, *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques*. DIENES, *The Taylor Series*, Oxford, 1931.

(**) TITCHMARSH, *Theory of Functions*, p. 216.

ño, la función obtenida será holomorfa en $R(z'') < \delta$ y, por consiguiente, todas sus singularidades estarán en el semiplano $R(z'') \geqq \delta$.

2. Sentado esto, consideremos la función

$$\phi(xz) = \sum_0^\infty (-1)^n u_n z^n x^n = \sum_0^\infty v_n x^n, \quad v_n = (-1)^n u_n z^n. \tag{3}$$

Para cada valor de z la serie anterior define una función de x en el círculo

$$|x| < \frac{1}{|z|}.$$

Restrinjamos los valores de z a una región D tal que para $z \varepsilon D$ la función analítica completa $\phi(xz)$ (de la cual (3) es un elemento), considerada como función de x, no tenga singularidades en el semiplano $R(x) \geqq 0$. Las singularidades de $\phi(xz)$ son de la forma

$$-xz = a + bi, \qquad a > 0$$

y, si $z = \xi + i\eta$, resulta

$$x = \frac{-a-bi}{\xi+i\eta} = \frac{-a\xi-b\eta}{\xi^2+\eta^2} + \frac{a\eta-b\xi}{\xi^2+\eta^2}\, i.$$

Todas estas singularidades estarán en el semiplano $R(x) < 0$ si el binomio $-a\xi - b\eta$ es negativo. El conjunto de los puntos z que hacen negativo dicho binomio es el dominio D. Este dominio siempre incluye el semieje real positivo, pues si $\eta = 0$, queda $-a\xi$ y este producto es negativo pues $\xi > 0$, $a > 0$.

Suponiendo ξ positivo, η estará sujeto a la condición

$$-b\eta < a\xi$$

o

$$|\eta| < \frac{a\xi}{|b|}.$$

Sustituyendo a por su extremo inferior A y b por su extremo superior B, resultará

$$|\eta| < \frac{A\xi}{B}$$

y, por tanto, el campo de variabilidad de z será, en estas condiciones, un ángulo cuya línea media es el eje OX y tiene por valor

$$2 \tan^{-1} \frac{A}{B}.$$

Este ángulo es tanto mayor cuanto más alejadas estén las singularidades del eje imaginario y cuanto más cerca estén del eje real. Por razones que en seguida se apreciarán convendrá sustituir este ángulo por el ángulo ligeramente inferior

$$2 \tan^{-1} \frac{A-\varepsilon}{B+\varepsilon'} \qquad (\varepsilon, \varepsilon' > 0)$$

y nos referimos brevemente a esta región angular llamándola Δ.

Para todo punto z de Δ se verifica

$$|\eta|(B+\varepsilon') < \xi(A-\varepsilon). \tag{4}$$

3. Efectuemos, mediante la integral de Borel, la prolongación analítica de $\phi(xz)$ respecto a x, la cual será válida en el polígono de sumabilidad. Este polígono, incluye siempre el semieje real positivo, en virtud de lo establecido en el párrafo anterior. Se supone que el punto z se mantiene a distancia finita del origen.

Por tanto, la fórmula

$$\phi(xz) = \int_0^{\infty} e^{-u} \sum_0^{\infty} v_n \frac{(xu)^n}{n!}\, du \tag{5}$$

define ϕ como función de x en el intervalo $(0, \infty)$.

Designemos por ζ una variable compleja y pongamos, por definición,

$$S(\zeta, z) = \frac{\operatorname{sen} \zeta\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}}{1+x} \phi(xz)\, dx \tag{6}$$

todas las veces que exista la integral impropia del segundo miembro.

Empleamos la letra S como característica de esta función porque, como se verá después (núm. 6), representa en cierto modo una generalización de la suma de los n primeros términos de la serie (2).

En el cálculo efectivo de esta función encontraremos potencias de la forma $z^{-\zeta}$, las cuales tienen infinitos valores y conviene precisar desde ahora cuál de ellos elegiremos. Tenemos

$$z^{-\zeta} = e^{-\zeta \log z} = e^{-\zeta(\log \rho + i(\vartheta + 2k\pi))}$$

en donde $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$. La cuestión se reduce a seleccionar un valor del argumento $\vartheta + 2k\pi$. Tomaremos este valor en un intervalo cualquiera negativo (*), sea éste el $(-4\pi, -2\pi)$; denotando dicho valor por φ tendremos, pues,

$$-4\pi < \varphi \leqq -2\pi.$$

4. Por la teoría de las funciones analíticas sabemos que el coeficiente u_n de la serie $f(z) = \Sigma u_n z^n$ puede expresarse en la forma

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} \tag{7}$$

en donde C es una curva cerrada cualquiera (rectificable) alrededor del origen, que no incluya ninguna singularidad de $f(z)$.

Calculemos ahora la función $\phi(xz)$ según la fórmula (5), teniendo para esto en cuenta la expresión (7):

$$\phi(xz) = \int_0^\infty e^{-u}\, du \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^n (xu)^n}{2\pi i n!} \int_C \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} =$$

(*) Como más adelante se advertirá, no habría inconveniente en elegir un intervalo *positivo* cualquiera.

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-u}\,du\int_C \frac{f(t)dt}{t}\,[1-\frac{zxu}{1!t}+\frac{z^2x^2u^2}{2!t^2}-\ldots]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-u}\,du\int_C \frac{f(t)dt}{t}\,e^{-\frac{zxu}{t}}$$

e invirtiendo el orden de las integraciones,

$$\phi(xz)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t}\int_0^\infty e^{-u\left(1+\frac{zx}{t}\right)}\,du.$$

Escogiendo z en Δ, x real y positivo y t sobre un contorno C adecuadamente seleccionado, será siempre positiva la parte real de $1+\frac{xz}{t}$. En efecto, si se pone

$$z=\xi+i\eta, \qquad t=p+qi,$$

se tiene

$$\mathrm{R}\left(1+\frac{zx}{t}\right)=1+\frac{x(p\xi+q\eta)}{p^2+q^2}.$$

Cuando t se halla en el cuadrante 2°. o en el 3°. tomaremos por contorno una semicircunferencia C'' y siempre puede escogerse el radio de la misma bastante grande para que sea

$$\left|\frac{x(p\xi+q\eta)}{p^2+q^2}\right|<1. \tag{8}$$

Cuando t se halla en el 1er. cuadrante o en el 4°., a veces no puede cumplirse la condición anterior, y entonces es preciso que se verifique

$$p\xi>|q\eta| \tag{9}$$

en caso de ser negativo el producto $q\eta$. Veremos que siempre puede lograrse (8) o (9).

Sea s la singularidad más próxima al eje imaginario y s' la más alejada del eje real (o una cualquiera de ellas si hay más).

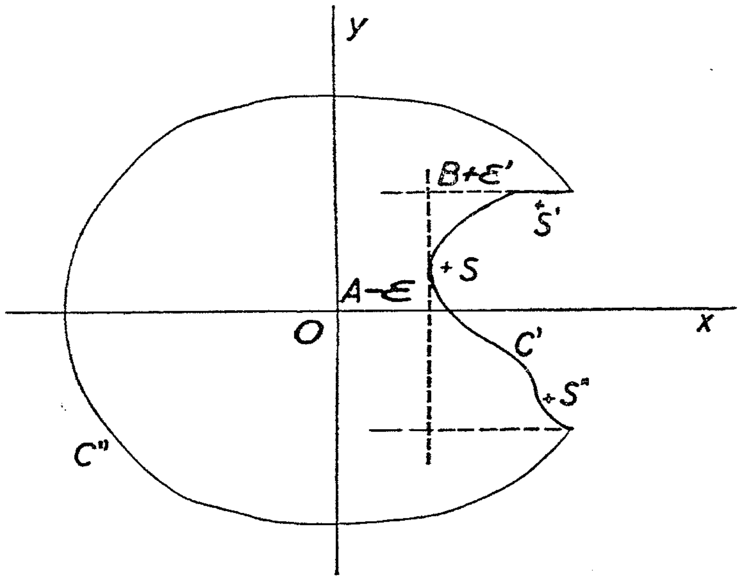
Como la porción C' del contorno C debe dejar fuera las singularidades de la función, hay un momento en que t se acerca a OY una distancia $p = A - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrario) y otro en que se aleja de OX una distancia $|q| = B + \varepsilon'$ ($\varepsilon' > 0$). Vamos a probar que si

$$p \geqq A - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |q| \leqq B + \varepsilon'$$

se verifica (9). Basta para ello recordar que los valores ξ y η satisfacen la condición (4):

$$(A - \varepsilon)\xi > (B + \varepsilon')|\eta|$$

Como no hay singularidades más altas que s', podremos continuar el contorno C' hacia la derecha a lo largo de la recta



$\pm y = B + \varepsilon'$ con lo que se verificará siempre (9), pues p es creciente, tanto como sea necesario para que comience a verificarse (8), y entonces regresaremos a lo largo de un arco de centro O hacia el eje imaginario.

Por tanto, se puede justificar la inversión de las integraciones realizada, por la convergencia uniforme de la integral

$$\int_0^\infty e^{-u\left(1+\frac{zx}{t}\right)}\, du = \frac{1}{1+\frac{zx}{t}}$$

y, por consiguiente, resulta

$$\phi(xz) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t+zx}.$$

Llevando esta expresión de ϕ a la fórmula (6) tenemos

$$S(\zeta, z) = \frac{\operatorname{sen}\zeta\pi}{2\pi^2 i}\int_0^\infty dx \int_C \frac{x^{\zeta-1} f(t)dt}{(1+x)(t+zx)};$$

e invirtiendo el orden de las integraciones, lo que aquí también es legítimo para $0 < \mathrm{R}(\zeta) < 1$, resulta

$$S(\zeta, z) = \frac{\operatorname{sen}\zeta\pi}{2\pi^2 i}\int_C f(t)\, dt \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{(1+x)(t+zx)};$$

pero

$$\frac{1}{(1+x)(t+zx)} = \frac{1}{t-z}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{z}{t+xz}\right],$$

luego

$$S(\zeta, z) = \frac{\operatorname{sen}\zeta\pi}{2\pi^2 i}\int_C \frac{f(t)dt}{t-z}\left\{\int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{1+x} - \frac{z}{t}\int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{1+\frac{z}{t}\, x}\right\}.$$

Estas integrales se calculan fácilmente. Para la primera se tiene (*)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\zeta\pi}$$

(*) Ver, por ejemplo, Copson, *Theory of Functions of a Complex Variable*, p. 140.

siempre que $0 < R(\zeta) < 1$. La segunda integral se reduce a la primera haciendo $\frac{xz}{t} = y$, pues resulta

$$\int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1} dx}{1+\frac{xz}{t}} = \left(\frac{t}{z}\right)^\zeta \int_0^\infty \frac{y^{\zeta-1}\, dy}{1+y} = \left(\frac{t}{z}\right)^\zeta \frac{\pi}{\operatorname{sen} \zeta\pi}$$

con la misma condición $0 < R(\zeta) < 1$. Por tanto

$$S(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} \left[1 - \left(\frac{z}{t}\right)^{1-\zeta}\right]. \tag{10}$$

Si interpretamos la potencia de base y exponente complejos en la forma convenida anteriormente (núm. 3) y ponemos $\zeta = a + i\tau = 1 - b + i\tau$, en donde b es un valor fijo tal que $0 < b < 1$, tendremos, haciendo $\frac{z}{t} = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$,

$$\left(\frac{z}{t}\right)^{1-\zeta} = e^{(b-i\tau) \operatorname{Log} \frac{z}{t}} = e^{(b-i\tau)(\log\rho + i\varphi)}$$

luego

$$\left|\left(\frac{z}{t}\right)^{1-\zeta}\right| = e^{b \log \rho + \varphi\tau}$$

Puesto que φ es negativo, si hacemos $\tau \to \infty$ resulta (*)

$$\left|\left(\frac{z}{t}\right)^{1-\zeta}\right| \to 0.$$

Como no pueden existir puntos singulares tan próximos como se quiera al eje imaginario (pues entonces habría también puntos singulares sobre dicho eje, lo que es contrario a nuestra hipótesis), y z es un valor no infinitamente alejado del origen, el módulo ρ permanece acotado ($\rho < K$) cualquiera que sea t. Por consiguiente la convergencia hacia cero de

(*) Se podría haber tomado φ en un intervalo positivo cualquiera y entonces hacer tender τ a $-\infty$.

$$\left(\frac{z}{t}\right)^{1-\zeta} \qquad \text{para } \tau \longrightarrow \infty$$

es uniforme respecto a t, lo cual permite tomar límite bajo el signo integral en (10). Así resulta

$$\lim_{\zeta \to a + i\infty} S(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{t-z} = f(z)$$

suponiendo que $z \varepsilon \Delta$ puede ser incluído en el recinto limitado por el contorno C, esto es, que z no es punto singular de la función.

5. El resultado anterior significa que el límite de la función $S(\zeta, z)$ cuando se hace tender ζ al infinito según una paralela al eje imaginario situada en la zona $0 < \mathrm{R}(\zeta) < 1$, da el valor correcto de la serie (2), esto es, el valor que se obtendría por prolongación analítica. O también: que la expresión

$$\lim_{\zeta \to a + i\infty} \frac{\operatorname{sen} \zeta\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}}{1+x} \phi(xz)\, dx$$

es una fórmula de prolongación analítica efectiva de $f(z) = \Sigma u_n z^n$ válida al menos en la región angular Δ, situada en el semiplano donde se encuentran las singularidades de la función. Esta región contiene siempre puntos que no pertenecen al polígono de sumabilidad correspondiente a la misma función, suponiendo que la circunferencia del círculo de convergencia no es una cortadura o línea singular de ésta, es decir, siempre que sea posible la prolongación analítica.

Si $z_0 \varepsilon \Delta$ no es punto singular de $f(z)$, el valor $f(z_0)$ dará, por definición, la suma generalizada de la serie (1).

6. Desde un punto de vista formal la fórmula (10) define la función interpolatriz de las sumas parciales $S_n(z)$ de la serie (2), respecto a la variable n. En efecto, si en dicha fórmula se hace $\zeta = -n$ resulta

$$S(-n, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{t-z} \left[1 - \left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\right] \tag{11}$$

que es precisamente la suma de los $n+1$ primeros términos de (2), pues si en la expresión

$$S_n(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n$$

se pone

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}},$$

se obtiene

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t}\left[1 + \frac{z}{t} + \ldots + \frac{z^n}{t^n}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}\left[1 - \left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\right]$$

que coincide con (11) (*).

Expresado a groso modo podría decirse que el método aquí expuesto consiste en hallar el límite de las sumas parciales de la serie llevando n al infinito según una paralela al eje imaginario, en vez de hacerlo a lo largo del semieje real positivo.

7. *Ejemplo.* Sea la serie

$$\begin{aligned} 1 + 2(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) + 2^2(\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta) + 2^3(\cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta) \\ + \ldots\ldots = 1 + 2e^{i\vartheta} + 2^2 e^{2i\vartheta} + 2^3 e^{3i\vartheta} + \ldots\ldots \qquad (1) \end{aligned}$$

siendo ϑ un ángulo cualquiera, pero fijo, perteneciente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \delta,\ \frac{\pi}{2} - \delta\right), \delta > 0.$

Si consideramos la serie potencial asociada $\sum\limits_0^\infty 2^n e^{ni\vartheta} z^n$ su radio de convergencia será $\frac{1}{2}$. Haciendo el cambio de variable $z = z' : 2$ resulta la serie

$$1 + e^{i\vartheta} z' + e^{2i\vartheta} z'^2 + e^{3i\vartheta} z'^3 + \ldots \qquad (2)$$

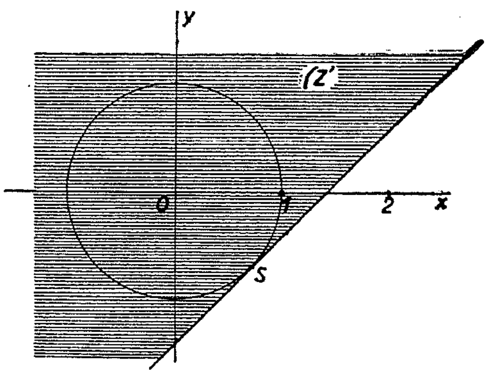
(*) Recalcamos el aspecto puramente formal de la relación que antecede, pues la fórmula (10) se estableció con la condición $0 < R(\zeta) < 1$.

que tiene por radio de convergencia la unidad; esta serie se reduce a (1) para $z' = 2$.

Sin necesidad de poseer otra representación de la función que define la serie (2), puede asegurarse, en virtud de un teorema de Leau y Faber (*), que la única singularidad de ella es el punto

$$z' = e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

Por la restricción impuesta al ángulo ϑ este punto singular está en el semiplano $R(z') > 0$. Por ejemplo, si $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ la singularidad ocupa la posición que muestra la figura.



Si en dicho punto singular se traza la tangente a la circunferencia quedan determinados dos semiplanos y aquél que contiene al origen, el cual se ha sombreado en la figura, es la región de sumabilidad de la serie (2) por el método de Borel. Es claro, pues, que la serie (1) sólo será sumable por este método cuando ϑ sea en valor absoluto mayor o igual que $\frac{\pi}{3}$, puesto que $\sec\frac{\pi}{3} = 2$, y entonces queda incluído el punto $z' = 2$ en la región de sumabilidad.

Tiene, pues, interés la aplicación de nuestro método a los casos en que ϑ está en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right)$ pues entonces el método de Borel es inaplicable.

(*) DIENES, *The Taylor Series*, p. 337.

Formemos la función

$$\phi(xz') = 1 - e^{i\vartheta} z'x + e^{2i\vartheta} z'^2x^2 - e^{3i\vartheta} z'^3x^3 + \ldots \qquad (3)$$

la cual considerada como función de x tiene la singularidad

$$x = -e^{i\vartheta} : z'$$

o sea, poniendo $z' = a + bi$, con $a > 0$,

$$x = \frac{-a\cos\vartheta + b\operatorname{sen}\vartheta}{a^2+b^2} + i\,\frac{a\operatorname{sen}\vartheta + b\cos\vartheta}{a^2+b^2}.$$

Dicha singularidad está siempre en el semiplano $R(x) < 0$ si se toma $b = 0$, o sea, z' en el eje real (como es el caso en el ejemplo que estamos considerando) y aun cuando z' esté fuera de dicho eje, siempre que

$$|b| < a\,|\cot\vartheta|.$$

Formemos entonces la función

$$\phi\,(xz') = \int_0^\infty e^{-u}\,du \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{ni\vartheta} z'^n x^n u^n}{n!}$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \cdot e^{-e^{i\vartheta} z'xu}\,du = \int_0^\infty e^{-u(1+e^{i\vartheta} z'x)}\,du.$$

En virtud de la condición impuesta a z' el producto

$$e^{i\vartheta} z' = (a\cos\vartheta - b\operatorname{sen}\vartheta) + i\,(a\operatorname{sen}\vartheta + b\cos\vartheta)$$

tiene su parte real positiva, y lo mismo sucede al multiplicar por el número positivo x; por tanto, la última integral converge y da

$$\phi\,(xz') = \frac{1}{1+e^{i\vartheta} z'x} \qquad (4)$$

expresión que es válida para $z' \varepsilon \Delta$ y x número real positivo (o cero).

Llevando (4) a nuestra fórmula tenemos

$$S(\zeta, z') = \frac{\operatorname{sen}\zeta\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\,dx}{(1+x)(1+e^{i\vartheta} z'x)},$$

expresión que puede escribirse así:

$$S(\zeta, z') = \frac{\operatorname{sen} \zeta\pi}{\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta} z'} \left\{ \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{1+x} - e^{i\zeta} z' \int_0^\infty \frac{x^{\zeta-1}\, dx}{1+e^{i\vartheta} z'x} \right\};$$

y teniendo en cuenta los valores conocidos de las integrales, resulta

$$S(\zeta, z') = \frac{1}{1-e^{i\vartheta} z'} \left[1 - (e^{i\vartheta} z')^{1-\zeta}\right]$$

luego

$$f(z') = \lim_{\zeta \to a+i\infty} S(\zeta, z') = \frac{1}{1-e^{i\vartheta} z'} \tag{5}$$

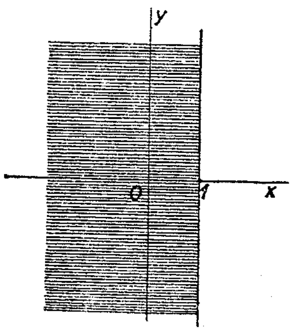
para todos los valores z' del ángulo $2(90^\circ - |\vartheta|)$ que tiene el eje real positivo por línea media, excepto $z' = e^{-i\vartheta}$. Haciendo en este resultado $z' = 2$ tenemos el valor de la suma generalizada de la serie propuesta

$$S = \frac{1}{1-2e^{i\vartheta}}$$

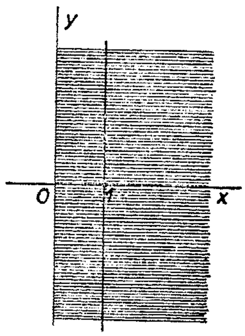
Caso particular. Para $\vartheta = 0$ la serie (2) es $1 + z' + z'^2 + \ldots.$ y según (5) su suma vale

$$\frac{1}{1-z'}$$

en todos los puntos del semiplano derecho, excepto el $z' = 1$. Las figuras adjuntas muestran las regiones de sumabilidad de $\Sigma z'_n$ por el método de la integral de Borel (I) y por el método aquí expuesto (II).



(I)



(II)