ALGUNAS FORMULAS ELEMENTALES RELATIVAS A LA TEORIA DE LAS CURVAS UNICURSALES

por

ANTONIO VALEIRAS

1. La teoría elemental de las curvas unicursales de tercero y cuarto orden, cuando se adopta como punto de partida las ecuaciones paramétricas de las mismas, reposa sustancialmente en la condición para que tres puntos de aquéllas se encuentren alineados.

Nos proponemos en primer término establecer esa condición en el caso general y deducir luego de la misma la solución de algunas cuestiones fundamentales.

2. Sea la curva definida por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \\ y=b_0+b_1t+\ldots+b_nt^n \\ z=c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n \end{cases}$$

y sean t_1, t_2, t_3 tres valores asignados al parámetro.

La condición para que los tres puntos correspondientes se encuentren alineados consiste, como se sabe, en que se verifique la relación

$$\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \\ z(t_1) & z(t_2) & z(t_3) \end{vmatrix}=0.$$

Si los valores t_1, t_2, t_3 son las raíces de la ecuación

$$s(t)\equiv s_3-s_2t+s_1t^2-t^3=0,$$

entonces, introduciendo por artificio de demostración otros n—2 valores del parámetro, distintos entre sí y también distintos de los anteriores, la relación escrita más arriba podrá expresarse así:

$$\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \ldots\ldots & x(t_{n+1}) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \ldots\ldots & y(t_{n+1}) \\ z(t_1) & z(t_2) & z(t_3) \ldots\ldots & z(t_{n+1}) \\ s(t_1) & s(t_2) & s(t_3) \ldots\ldots & s(t_{n+1}) \\ t_1 s(t_1) & t_2 s(t_2) & t_3 s(t_3) \ldots\ldots & t_{n+1} s(t_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ t_1^{n-3} s(t_1) & t_2^{n-3} s(t_2) & t_3^{n-3} s(t_3) \ldots\ldots & t_{n+1}^{n-3} s(t_{n+1}) \end{vmatrix} = 0$$

como se verifica separando las tres primeras columnas y desarrollando según la regla de Laplace.

Escrito por extenso el último determinante se comprueba que es el producto del determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & c_3 & \ldots\ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots\ldots & b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & a_3 & \ldots\ldots & c_n \\ s_3 & -s_2 & s_1 & -1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & s_3 & -s_2 & s_1 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -1 \end{vmatrix}$$

por el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots\ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots\ldots & t_2^n \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ 1 & t_{n+1} & t^2_{n+1} & \ldots\ldots & t^n_{n+1} \end{vmatrix}$$

y excluyendo el caso trivial de que se anule este último factor, queda como expresión de la condición buscada:

$$\Delta = 0.$$

Tomando, por ejemplo, la curva

$$x = t^5, \quad y = 1, \quad z = t^3$$

obtenemos rápidamente

$$\Lambda \equiv \begin{vmatrix} -s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & -s_2 & -1 \\ 0 & s_3 & s_1 \end{vmatrix} = 0$$

es decir: $s_1 s_2^2 - s_2 s_3 - s_1^2 s_3 = 0$.

3. Por un procedimiento análogo se obtiene la ecuación de la cuerda que une dos puntos de la curva.

Si llamamos t_1 y t_2 a los valores correspondientes del parámetro, la ecuación de la cuerda determinada por ellos será, como es sabido:

$$\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x \\ y(t_1) & y(t_2) & y \\ z(t_1) & z(t_2) & z \end{vmatrix} = 0.$$

Si se someten los menores de segundo orden que aparecen como coeficientes a una transformación semejante a la que utilizamos en el párrafo anterior, y se simplifica luego suprimiendo un determinante de Vandermonde que aparece como factor común, la ecuación de la cuerda adquiere la forma definitiva siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n & x \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots\dots & b_n & y \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots\dots & c_n & z \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \dots\dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots\dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en donde: $\sigma_1 = t_1 + t_2$, $\sigma_2 = t_1 t_2$.

4. Cuando en la ecuación anterior se reemplazan las coordenadas por las expresiones paramétricas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, se obtienen las intersecciones de la cuerda con la curva.

Si designamos por $\sigma(t) \equiv \sigma_2 - \sigma_1 t + t^2$ al polinomio cuyas raíces son t_1 y t_2 resulta luego mediante transformaciones sencillas:

$$\sigma(t) \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots\cdots & c_n & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \cdots\cdots & 0 & t \\ . & . & . & \cdots\cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & t^{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

y descartando aquí el factor $\sigma(t)$ nos queda la ecuación del grupo de $n-2$ puntos en que tal cuerda vuelve a cortar a la curva.

5. De la ecuación de la cuerda se deduce inmediatamente la ecuación de la tangente suponiendo que $t_1 = t_2 = \tau$. Resulta entonces: $\sigma_2 = \tau^2$, $\sigma_1 = 2\tau$, y con esto obtenemos como ecuación de la tangente:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n & x \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n & y \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots\cdots & c_n & z \\ \tau^2 & -2\tau & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & -2\tau & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots\cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De aquí se sacan inmediatamente las ecuaciones tangenciales de la curva, a saber:

$$u = \Delta(\tau;\, b, c); \quad v = \Delta(\tau;\, c, a); \quad w = \Delta(\tau;\, a, b)$$

en donde, p. ej.:

$$\Delta(\tau; b, c) \equiv \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots\dots & b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots\dots & c_n \\ \tau^2 & -2\tau & 1 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \tau^2 & -2\tau & \dots\dots & 0 \\ . & . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Del resultado anterior, o bien del § 4, se deduce la ecuación del grupo de $n-2$ puntos en los cuales la tangente vuelve a cortar a la curva, a saber:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots\dots & b_n & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots\dots & c_n & 0 \\ \tau^2 & -2\tau & 1 & \dots\dots & 0 & 1 \\ 0 & \tau^2 & -2\tau & \dots\dots & 0 & t \\ . & . & . & \dots\dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & t^{n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Este resultado es particularmente importante en la teoría de las cúbicas, en donde tal grupo se reduce a un punto único, llamado *tangencial* del punto de contacto, mediante cuya determinación se obtiene casi siempre la construcción más simple de la tangente.

Tomando por ejemplo la cisoide, cuyas ecuaciones son, como se sabe, las siguientes:

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad z = 1 + t^2$$

si se sustituye en la relación que figura más arriba, el determinante se desarrolla fácilmente, y obtenemos como ecuación del tangencial de un punto τ la siguiente:

$$\tau^2 + 2\tau t = 0 \quad \text{luego} \quad t = -\tau : 2,$$

de donde resulta una construcción inmediata de la tangente.

Hemos mencionado esta aplicación, pues tanto los tratados como los textos persisten rutinariamente en exponer una construcción ciertamente más complicada, que procede de Fermat, y en la que se utiliza una propiedad ocasional de la subtangente.

7. Cuando la ecuación obtenida en el párrafo anterior se satisface para $t = \tau$, eso significa que la tangente es inflexional, y por lo tanto la ecuación de los puntos de inflexión se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots\dots & b_n & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots\dots & c_n & 0 \\ \tau^2 & -2\tau & 1 & \dots\dots & 0 & 1 \\ 0 & \tau^2 & -2\tau & \dots\dots & 0 & \tau \\ . & . & . & \dots\dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & \tau^{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

siendo posible también llevarla a la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots\dots & b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots\dots & c_n \\ \tau^3 & -3\tau^2 & 3\tau & -1 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \tau^3 & -3\tau^2 & 3\tau & \dots\dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

que se deduce de $\Delta = 0$ cuando se supone: $t_1 = t_2 = t_3 = \tau$.

8. Basándose en los resultados anteriores sería posible presentar también otras cuestiones. Así, p. ej. los puntos múltiples aparecen, siguiendo un procedimiento clásico, cuando la ecuación del grupo de $n-2$ puntos en que una cuerda vuelve a cortar a la curva se torna indeterminada.

Pero las ecuaciones que así se establecen no presentan una relación inmediata con la matriz de coeficientes de las ecuaciones de la curva. Por este motivo y también desde el punto de vista del rigor son preferibles otros métodos de determinación.

Buenos Aires, 27 de marzo de 1943.