ECUACIONES DIFERENCIALES ANALOGAS A LAS DE CLAIRAUT

por

SERGIO SISPÁNOV

Facultad de Ciencias, Asunción, Paraguay

La ecuación de CLAIRAUT representa el ejemplo más sencillo de una amplia clase de ecuaciones diferenciales de primer orden cuya integral general se obtiene muy fácilmente cambiando la derivada $y'=p$ en una constante c.

Las propiedades de las ecuaciones de esta índole dependen principalmente de la forma en que figura en la ecuación la función desconocida y. En vista de esto es mucho más cómodo, tratando de las ecuaciones algebraicas con respecto a y, ordenarlas según las potencias de dicha variable y considerar en adelante las ecuaciones de diferentes grados en y. La dependencia del argumento x y de la derivada p puede ser indistintamente, de carácter algebraico o trascendente.

La dificultad principal del problema sobre la forma general de las ecuaciones análogas a las de CLAIRAUT consiste en una ambigüedad que aparece como resultado de inversión de las funciones. A fin de evitar la influencia indeseable de la multiplicidad de funciones, convendremos en conservar en todos los casos las mismas expresiones para las funciones multiformes, previamente elegidas de una manera determinada. Con tal restricción podremos deducir, por ejemplo, de una igualdad

$$f(\xi_1)=f(\xi_2), \tag{1}$$

otra igualdad

$$\xi_1=\xi_2,$$

suponiendo que $f(\xi)$ es una función de ξ y de otras variables que tienen los mismos valores en ambos miembros de la relación (1).

Para que la restricción acerca de las funciones inversas multiformes no afecte la generalidad de los resultados, podrían introducirse convenientemente variables auxiliares, representando las funciones directas e inversas en una forma paramétrica.

§ 1. Sea

$$\prod_{j=1}^{j=m}[y-f_j(x,y')]=0 \tag{2}$$

una ecuación diferencial de grado m y

$$\prod_{j=1}^{j=m}[y-f_j(x,c)]=0 \tag{3}$$

su integral general que por hipótesis se deduce de la ecuación, sustituyendo en ella la derivada y' por la constante arbitraria c. Los símbolos f_j representan funciones uniformes o expresiones determinadas de las multiformes.

En el caso más general se puede suponer que

$$y-f_1(x,c)=0$$

es la integral de la ecuación

$$y-f_{\alpha_1}(x,y')=0,$$

que

$$y-f_2(x,c)=0$$

es la integral de la ecuación

$$y-f_{\alpha_2}(x,y')=0,$$

etc. ...

A esta correlación biunívoca entre las integrales y las ecuaciones, le corresponde una sustitución

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \end{pmatrix}$$

en donde los números de la segunda fila son los mismos que en la primera, colocados en un cierto orden.

Por el Algebra se sabe que cada sustitución puede descomponerse en ciclos cerrados. Conforme a este resultado y cambiando convenientemente la enumeración, vemos que la integral general (3) y la ecuación general (2) se descomponen en ciclos cuyas componentes tienen respectivamente las formas

$$y = f_1(x, c), \quad y = f_2(x, c), \quad \ldots, \quad y = f_n(x, c)$$

e

$$y = f_2(x, y'), \quad y = f_3(x, y'), \quad \ldots, \quad y = f_1(x, y'),$$

siendo $n \leqq m$.

Las componentes están situadas de tal manera que derivando la primera relación

$$y = f_1(x, c)$$

y eliminando la constante c, se llega a la ecuación

$$y = f_2(x, y').$$

Cambiando en ella y' en c, se obtiene la segunda relación

$$y = f_2(x, c).$$

Una nueva derivación y eliminación de la constante conduce a la ecuación

$$y = f_3(x, y').$$

Otro cambio de y' en c nos da la tercera relación

$$y = f_3(x, c),$$

y así sucesivamente.

Reemplazando y' por c en la última ecuación

$$y = f_1(x, y')$$

volveremos a la primera relación

$$y = f_1(x, c).$$

De lo expuesto se deduce que *las ecuaciones diferenciales, análogas a las de Clairaut, algebraicas con respecto a* y, *y sus integrales generales tienen forma de un ciclo*

$$(y - f_1)(y - f_2) \dots (y - f_n) \tag{4}$$

o bien se descomponen en varios factores de la misma especie.

Por consiguiente el problema general se reduce a la determinación de las funciones f_1 que dan origen a los ciclos de 1er. grado, de 2o. grado, etc. ...

§ 2. Sea

$$y = f_1(x, c) \tag{5}$$

la primera integral de un ciclo de grado n.

Derivándola con respecto a x se obtiene

$$p = y' = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, c). \tag{6}$$

Consideremos primero un caso especial más sencillo en que el segundo miembro de la última relación depende sólo de c, es decir,

$$p = G(c).$$

La función f_1 tendrá la forma

$$y = f_1(x, c) = G(c) \,.\, x + H(c). \tag{7}$$

Eliminando la constante c resulta

$$y = f_2(x, p) = xp + H[G^{-1}(p)],$$

en donde el símbolo G^{-1} representa una operación inversa a la operación G.

Sustituyendo en la ecuación obtenida la derivada p por una constante c llegamos a la segunda integral del ciclo

$$y = f_2(x, c) = cx + H\,[G^{-1}(c)].$$

Otra derivación nos da

$$p = y' = \frac{\partial f_2}{\partial x}\,(x, c) = c.$$

La eliminación de c conduce a la ecuación

$$y = f_3(x, p) = xp + H[\,G^{-1}(p)],$$

y así sucesivamente.

Por último, tendremos

$$y = f_n(x, c) = cx + H[G^{-1}(c)],$$
$$y = f_1(x, c) = cx + H[G^{-1}(c)].$$

Comparando el resultado obtenido con la expresión (7) vemos que

$$G(c) = c,$$

y por consiguiente todos los factores del ciclo (4) se hacen iguales a

$$y - [cx + H(c)],$$

siendo $H(c)$ una función arbitraria.

La ecuación diferencial correspondiente pertenece al tipo de Clairaut y tendrá la forma

$$[y - xy' - H(y')]^n = 0.$$

§ 3. Pasemos ahora al estudio del caso en que el segundo miembro de la relación (6) depende de x.

Despejando esta variable vamos a tener

$$x=\varphi(p, c),$$

en donde φ representa una expresión determinada de la función inversa a $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, c)$ con respecto a x.

Introduciendo la expresión para x en la fórmula (5) resulta

$$y=f_1(x, c)=f_1[\varphi(p, c);\, c]=\psi(p, c).$$

De este modo la integral (5) queda representada en una forma paramétrica mediante las relaciones

$$x=\varphi(p, c), \quad y=\psi(p, c), \tag{7}$$

desempeñando p el papel del parámetro variable.

Si se resolviese la primera de las ecuaciones (7) con respecto a p, se obtendría la expresión (6). Introduciendo ésta en la segunda ecuación del sistema (7), volveríamos a la fórmula (5).

Despejando c en la primera ecuación del sistema (7) y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación del mismo sistema, obtendríamos

$$y=f_2(x, p),$$

lo que es la ecuación diferencial correspondiente a la integral (5) en virtud de la fórmula (6).

Valiéndonos de la misma fórmula (6) podemos establecer una relación entre las funciones φ y ψ. En efecto, diferenciando el sistema (7) resulta

$$dx=\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, c)\, dp, \quad dy=\frac{\partial \psi}{\partial p}(p, c)\, dp$$

y como

$$p = y' = \frac{\partial y}{\partial x},$$

entonces

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial p}(p, c) : \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, c)$$

o bien

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, c) = p \frac{\partial p}{\partial \psi}(p, c).$$

§ 4. Vamos a considerar ahora al parámetro variable p y a la constante arbitraria c como nuevas variables independientes.

Conforme a lo expuesto, el sistema

$$x = \varphi(p, c), \quad y = \psi(p, c) \tag{8}$$

de variables auxiliares p, c es equivalente al sistema

$$y = f_1(x, c), \quad y = f_2(x, p) \tag{9}$$

de variables primitivas x, y.

Las funciones φ y ψ del sistema nuevo verifican a la condición

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}(p, c) = p \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, c). \tag{10}$$

La función f_1 del sistema antiguo satisface a la igualdad

$$p = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, c).$$

Las fórmulas (8) permiten hallar x, y, conociendo p, c. Para el paso inverso servirán las fórmulas (9). Despejando c en la primera de ellas y p en la segunda encontraremos p, c, conociendo x, y.

La segunda integral del ciclo (4) y su respectiva ecuación diferencial, también pueden ser transformadas de una manera análoga a la expuesta. En efecto, derivando la segunda integral

$$y = f_2(x, c)$$

e igualando a p el resultado, se obtiene

$$p = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, c).$$

Despejando x resulta

$$x = \varphi_1(p, c).$$

La sustitución de la expresión hallada en la integral nos dará

$$y = f_2(x, c) = f_2[\varphi_1(p, c); c] = \psi_1(p, c).$$

El sistema

$$x = \varphi_1(p, c), \quad y = \psi_1(p, c) \tag{11}$$

en que

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p}(p, c) = p \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(p, c) \tag{12}$$

será equivalente al sistema

$$y = f_2(x, c), \quad y = f_3(x, p) \tag{13}$$

en que

$$p = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, c).$$

Las relaciones (11) determinan x, y en función de p, c.

Despejando c, p en las ecuaciones (13) expresaríamos estas variables en función de x, y.

Continuando el proceso de transformación podemos imaginar todas las componentes del ciclo (4) reducidos a la nueva forma.

§ 5. En este párrafo ocupémonos más detenidamente de los ciclos de 2°. grado que se cierran con la segunda componente, siendo

$$f_3(x, p) = f_1(x, p).$$

A fin de establecer las relaciones entre las funciones φ, ψ y φ_1, ψ_1 supongamos que las variables x, y en las fórmulas (11) y (13) tienen los mismos valores que en las fórmulas (8) y (9).

Las variables auxiliares p, c en los sistemas (11) y (13), y en la ecuación (12), tendrán, naturalmente, valores diferentes de los que tenían en los sistemas (8) y (9), y en la ecuación (10). Designemos por p_1, c_1 respectivamente los valores de las variables p, c en la segunda componente, conservando las letras p, c en la primera.

De tal manera vamos a tener para la 1ª. componente

$$\begin{cases} x = \varphi(p, c) \\ y = \psi(p, c) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = f_1(x, c) \\ y = f_2(x, p) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}(p, c) = p\,\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, c), \tag{14}$$

y para la 2ª. componente

$$\begin{cases} x = \varphi_1(p_1, c_1) \\ y = \psi_1(p_1, c_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = f_2(x, c_1) \\ y = f_1(x, p_1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p_1}(p_1, c_1) = p_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1}(p_1, c_1). \tag{15}$$

Comparando las expresiones para y comprendidas en las segundas columnas, llegamos a las igualdades

$$f_1(x, p_1) = f_1(x, c), \quad f_2(x, c_1) = f_2(x, p)$$

Teniendo en cuenta la restricción a que hemos sometido las funciones inversas tratando de la relación (1) en el prefacio, resulta

$$p_1 = c, \quad c_1 = p.$$

La comparación de las expresiones que están en las primeras columnas nos da

$$\begin{cases} \varphi_1(p_1, c_1) = \varphi_1(c, p) = \varphi(p, c) \\ \psi_1(p_1, c_1) = \psi_1(c, p) = \psi(p, c). \end{cases}$$

Ahora la igualdad (15) se convierte en

$$\frac{\partial \psi}{\partial c}(p, c) = c \frac{\partial \varphi}{\partial c}(p, c). \tag{16}$$

Las relaciones (14) y (16) forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que nos permitirá determinar fácilmente la forma de las funciones φ y ψ.

§ 6. Para resolver el sistema obtenido en el párrafo anterior se deriva la ecuación (14) con respecto a c, y la ecuación (16) con respecto p. Comparando luego, los resultados se tendrá

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \, \partial c}(p, c) = p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial c}(p, c) = c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial c}(p, c),$$

de donde

$$(p - c) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial c}(p, c) = 0.$$

Dejando a un lado la hipótesis $p = c$ de que nos hemos ocupado ya en el párrafo 2, llegamos a la relación

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial c}(p, c) = 0$$

cuya integración nos da

$$x = \varphi(p, c) = M(p) + N(c),$$

siendo $M(p)$ y $N(c)$ funciones arbitrarias.

Reemplazando este resultado en las fórmulas (14) y (16) vamos a tener

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}(p, c) = p M'(p), \quad \frac{\partial \psi}{\partial c}(p, c) = c N'(c)$$

o integrando

$$y = \psi(p, c) = \int p M'(p) \, dp + \int c N'(c) \, dc.$$

Es evidente que a las expresiones obtenidas para x e y podrían agregarse constantes arbitrarias.

Si en el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x &= M(p) + N(c) \\ y &= \int p M'(p) \, dp + \int c N'(c) \, dc \end{aligned} \right. \tag{17}$$

se elimina p, se llega a la primera integral

$$y = f_1(x, c).$$

Eliminando c, obtenemos la ecuación diferencial correspondiente

$$y = f_2(x, p).$$

Permutando en estos resultados p y c, encontramos la segunda integral y su respectiva ecuación diferencial.

La forma general de la ecuación diferencial de 2º. grado en y, cuya integral se deduce cambiando y' en c, será

$$[y-f_1(x,y')]\cdot[y-f_2(x,y')]=0.$$

§ 7. Haremos algunos ejercicios que nos aclararán la teoría expuesta. Sean, por ejemplo,

$$M=ip^{-1/2}, \quad N=-ic^{-1/2},$$

siendo $i=\sqrt{-1}$.

El sistema (17) toma la forma

$$\begin{cases} x=i(p^{-1/2}-c^{-1/2}) \\ y=-\dfrac{i}{2}\displaystyle\int p^{-1/2}\,dp+\dfrac{i}{2}\int c^{-1/2}\,dc=-i\,(p^{1/2}-c^{1/2}). \end{cases}$$

Despejando $c^{1/2}$ en la primera ecuación resulta

$$c^{1/2}=\frac{p^{1/2}}{1+ixp^{1/2}}.$$

Sustituyendo en la segunda

$$y=-i\left(p^{1/2}-\frac{p^{1/2}}{1+ixp^{1/2}}\right)=\frac{xp}{1+ix\sqrt{p}}.$$

Análogamente, eliminando p

$$p^{1/2}=\frac{c^{1/2}}{1-ixp^{1/2}}$$

$$y=-i\left(\frac{c^{1/2}}{1+ixc^{1/2}}-c^{1/2}\right)=\frac{xc}{1-ix\sqrt{c}}.$$

La ecuación diferencial buscada será

$$\left(y-\frac{xy'}{1+ix\sqrt{y'}}\right)\left(y-\frac{xy'}{1-ix\sqrt{y'}}\right)=0$$

o bien

$$y^2-\frac{2xy'}{1+x^2y'}\,y+\frac{x^2y'^2}{1+x^2y'}=0.$$

Finalmente

$$x^2\,.\,y'^2+xy(xy-2)\,.\,y'+y^2=0.$$

Escribiendo aquí c en vez de y' se llega a la integral general

$$c^2x^2+c\,xy(xy-2)+y^2=0.$$

Consideremos otro ejemplo. Sean

$$M=\frac{1}{p},\quad N=\operatorname{arc\,sen} c.$$

Las fórmulas (17) nos dan

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{p}+\operatorname{arc\,sen} c \\ y=-\displaystyle\int\frac{dp}{p}+\int\frac{c\,dc}{\sqrt{1-c^2}}=-\ln p-\sqrt{1-c^2}. \end{cases}$$

De la primera relación se deduce que

$$c=\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{p}\right)\cdot$$

Sustituyendo en la segunda

$$y=-\ln p-\cos\left(x-\frac{1}{p}\right)\cdot$$

La eliminación de p nos da

$$p=\frac{1}{x-\operatorname{arcsen} c}$$

e

$$y=\ln(x-\operatorname{arcsen} c)-\sqrt{1-c^2}.$$

La ecuación diferencial tendrá la forma

$$\left[y+\ln y'+\cos\left(x-\frac{1}{y'}\right)\right]\cdot\left[y+\sqrt{1-y'^2}-\ln(x-\operatorname{arc\,sen} y')\right]=0.$$

Para obtener su integral general basta poner c en vez de y'.

A fin de evitar valores imaginarios y ambigüedad de signos deben cumplirse las desigualdades

$$-1\leqq c\leqq +1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{c}-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{c}+\frac{\pi}{2}.$$

§ 8. Si los símbolos M y N en las fórmulas (17) se hacen iguales, es decir, representan la misma operación, el sistema se convierte en

$$\begin{cases} x=M(p)+M(c) \\ y=\int p\,M'(p)\,dp+\int c\,M'(c)\,dc. \end{cases} \tag{18}$$

y los resultados de eliminación de p y de c tendrán la misma forma

$$y=f(x,c) \quad \text{e} \quad y=f(x,p).$$

Ambos factores de que se compone en el caso considerado el ciclo (4) se hacen iguales, convirtiéndose éste en el cuadrado de una sola componente de 1er. grado.

Por un procedimiento análogo al expuesto en el párrafo 5 se puede demostrar que la identidad de los símbolos M y N, suficiente para que los resultados de la eliminación tengan la misma forma, es también necesaria, una vez que las funciones inversas están uniformadas. De suerte que la ecuación hallada

$$y = f(x, y')$$

es una ecuación general de 1er. grado con la integral de la misma forma, salvo el caso excepcional considerado en el párrafo 2.

En conclusión hagamos constar que, como antes, en los segundos miembros de las fórmulas (18) pueden añadirse constantes arbitrarias.

Tomemos un ejemplo, haciendo

$$M = ap,$$

en donde, a, es una constante.

Por las fórmulas (18) encontramos

$$x = a(p + c), \quad y = \frac{a}{2}(p^2 + c^2).$$

La primera nos da

$$c = \frac{x}{a} - p.$$

Reemplazando esta expresión en la segunda resulta

$$y = \frac{a}{2}\left[p^2 + \left(\frac{x}{a} - p\right)^2\right] = ap^2 - xp + \frac{x^2}{2a}.$$

De manera que

$$y = \frac{x^2}{2a} - xy' + ay'^2$$

es la ecuación diferencial pedida e

$$y = \frac{x^2}{2a} - cx + ac^2$$

su integral general.

He aquí otro ejemplo:

Poniendo $M = \alpha \ln p$, en donde α, es constante, y recordando que a los segundos miembros de las fórmulas (18) podrían agregarse constantes arbitrarias, tendremos

$$x = \alpha \left(\ln p + \ln c + \ln \frac{\alpha}{a}\right), \quad y = \alpha(p + c),$$

siendo a, otra constante.

De la primera fórmula se deduce

$$c = \frac{a}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot \frac{1}{p}.$$

Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$y = \alpha p + ae^{\frac{x}{\alpha}} \cdot \frac{1}{p}.$$

Finalmente se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$y = \alpha y' + \frac{ae^{\frac{x}{\alpha}}}{y'},$$

cuya integral general se deduce cambiando y' en c.

§ 9. Dejando a un lado el problema más difícil sobre la forma general de las ecuaciones de 3er. grado que será tema de otro artículo, indiquemos un procedimiento particular que nos permitirá formar ecuaciones de cualquier grado con respecto a y.

Supongamos que la variable y es una función lineal de la constante arbitraria c

$$y = f_1(x, c) = g(x) \,.\, c + h(c), \tag{19}$$

siendo $g(x)$ y $h(x)$ funciones analíticas.

Derivando vamos a tener

$$y' = g'(x) \,.\, c + h'(x).$$

Despejando c y sustituyendo el resultado en (19) se llega a la ecuación diferencial

$$y = f_2(x, y') = \frac{g(x)}{g'(x)} \,.\, y' + \left[h(x) - \frac{g(x)}{g'(x)} \,.\, h'(x)\right]$$

cuya integral general es (19).

La integral siguiente tendrá la forma

$$y = f_2(x, c) = \frac{g(x)}{g'(x)} \,.\, c + \left[h(x) - \frac{g(x)}{g'(x)} \,.\, h'(x)\right].$$

Para abreviar las fórmulas designemos por el símbolo $\delta(g)$ la operación diferencial $\dfrac{g(x)}{g'(x)}$

La integral obtenida se convierte en

$$y = f_2(x, c) = g_1(x) \,.\, c + [h(x) - g_1(x) \,.\, h'(x)],$$

siendo

$$g_1(x) = \delta(g) = \frac{g(x)}{g'(x)} \,.$$

Derivando esta integral, eliminando c y cambiando otra vez y' en c, llegamos a la tercera integral, y así sucesivamente.

Continuando el proceso vamos a tener la siguiente serie de integrales

$$
\begin{aligned}
&f_1(x, c) = g \,.\, c + h \\
&f_2(x, c) = g_1 \,.\, c + (h - g_1 h') \\
&f_3(x, c) = g_2 \,.\, c + [h - g_2(h' - g_1 h'')] \\
&f_4(x, c) = g_3 \,.\, c + \left\{ h - g_3 [(h' + g_1 h'') - g_2(h'' - g_1 h''')] \right\}
\end{aligned} \tag{20}
$$

....

en donde

$$
\begin{aligned}
&g_1 = \delta(g) = \frac{g}{g'} \\
&g_2 = \delta[\delta(g)] = \frac{g/g'}{(g/g')'} = \frac{gg'}{g'^2 - gg''} \\
&g_3 = \delta\left\{ \delta[\delta(g)] \right\} = \frac{gg'(g'^2 - gg'')}{(gg')'(g'^2 - gg'') - gg'(g'^2 - gg'')'} = \\
&= \frac{g(g'^3 - gg'g'')}{g'^4 - g^2 g''^2 - gg'^2 g'' + g^2 g' g'''}
\end{aligned} \tag{21}
$$

....

Para que el ciclo (4) de integrales se cierre después de la enésima componente es necesario y suficiente que

$$f_{n+1}(x, c) = f_1(x, c),$$

lo que nos conduce, ante todo, a la siguiente ecuación diferencial con respecto a la función $g(x)$

$$g_n = \underbrace{\delta\, \delta \ldots \delta}_{n}\,(g) = g. \tag{22}$$

§ 10. Consideremos en primer lugar el caso particular en que $n = 2$.

Con auxilio de la segunda relación del grupo (21) la ecuación (22) toma la forma

$$g_2 = \frac{gg'}{g'^2 - gg''} = g$$

o simplificando

$$g'^2 - gg'' = g'. \tag{23}$$

Adoptando $t = g'(x)$ por variable independiente, tendremos las siguientes fórmulas de paso

$$g' = \frac{dg}{dx} = t, \quad g'' = \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{t}{g'} \tag{24}$$

El símbolo g' que figura en el segundo miembro de la segunda fórmula representa la derivada de la función g relativa al argumento t.

De esta manera la ecuación diferencial (23) se reduce a dos ecuaciones sucesivas de primer orden cuya integración nos da

$$g = ae^{\frac{x}{\alpha}} - \alpha,$$

siendo a y α constantes arbitrarias distintas de 0.

Para g_1 tendremos

$$g_1 = \frac{g(x)}{g'(x)} = -\frac{\alpha}{a}(\alpha e^{\frac{x}{\alpha}} - a).$$

Comparando las expresiones (20) para $f_1(x, c)$ y $f_3(x, c)$ que en el caso considerado son iguales y recordando que $g_2 = g$ llegamos a la ecuación para h

$$h = h - g(h' - g_1 h'').$$

Simplificando resulta

$$h' = g_1 h'',$$

y como g_1 es igual a $\frac{g}{g'}$, entonces

$$\frac{h''}{h'} = \frac{g'}{g}.$$

La sustitución de g por su expresión anteriormente hallada y las integraciones sucesivas nos dan

$$h = -ab\,e^{\frac{x}{\alpha}} + bx + \beta,$$

en donde b y β son constantes de integración.

Ahora podemos calcular sin dificultad la expresión

$$h - g_1 h' = \alpha^2 \frac{b}{a} e^{-\frac{x}{\alpha}} + (bx + \beta) - 2b\alpha.$$

Introduciendo todos estos resultados en la primera y en la segunda fórmula del grupo (20) tendremos

$$\begin{cases} f_1(x, c) = (ae^{\frac{x}{\alpha}} - \alpha)\,.\,c - ab\,e^{\frac{x}{\alpha}} + (bx + \beta), \\ f_2(x, c) = -\dfrac{\alpha}{a}\,(\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} - a)\,.\,c + \alpha^2 \dfrac{b}{a} e^{-\frac{x}{\alpha}} + (bx + \beta) - 2\,b\alpha. \end{cases}$$

De conformidad con los cálculos efectuados, la ecuación general de 2°. grado con respecto a y e y' será

$$[y + \frac{\alpha}{a}(\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} - a)\,.\,y' - \alpha^2 \frac{b}{a} e^{-\frac{x}{\alpha}} - (bx + \beta) + 2b\alpha]\,.$$

$$.\,[y - (ae^{\frac{x}{\alpha}} - \alpha)\,y' + ab\,e^{\frac{x}{\alpha}} - (bx + \beta)] = 0.$$

La integral respectiva se obtiene cambiando y' en c.

En conclusión, hagamos constar que la ecuación hallada podría también deducirse de las fórmulas generales (17) haciendo en ellas

$$M = \ln(p - b),\ N = -\ln(c - b),$$

y agregando a los segundos miembros constantes convenientemente elegidas. De esta manera se tendrían

$$\begin{cases} x = \alpha\,[\ln\frac{\alpha}{a} + \ln(p-b) - \ln(c-b)], \\ y = (\beta - b\alpha) + \alpha\,(p-c) + bx. \end{cases}$$

§ 11. Pasemos al estudio del caso: $n=3$.

En tal ocasión la ecuación diferencial (22) se convierte en

$$g_3 = \delta\delta\delta(g) = g$$

o con auxilio de la tercera relación del grupo (21)

$$\frac{g(g'^3 - gg'g'')}{g'^4 - g^2g''^2 - gg'^2g'' + g^2g'g'''} = g.$$

Simplificando resulta

$$g'^4 - g^2g''^2 - gg'^2g'' + g^2g'g''' = g'^3 - gg'g''.$$

A fin de disminuir el orden tomemos, como antes, $t = g(x)$ por argumento. Añadiendo a las fórmulas de paso (24) la expresión para la tercera derivada

$$g''' = \frac{d^3g}{dx^3} = \frac{t}{g'^3}\,(g' - tg'')$$

y efectuando el cambio de variable en la ecuación obtenida, vamos a tener

$$t^4 - \frac{t^2g^2}{g'^2} - \frac{t^3g}{g'} + \frac{t^2g^2}{g'^3}\,(g' - tg'') = t^3 - \frac{t^2g}{g'}$$

o simplificando

$$(1-t)\,.\,gg'^2 - t\,(1-t)\,.\,g'^3 = t\,.\,g^2g'',$$

en donde las derivadas son relativas a t.

Otro cambio de variable con auxilio de las relaciones

$$g = e^{\int \frac{dt}{z}}, \quad g' = \frac{1}{z} \cdot e^{\int \frac{dt}{z}}, \quad g'' = \frac{1-z'}{z^2} \cdot e^{\int \frac{dt}{z}}$$

permite disminuir una vez más el orden, llegando a la ecuación diferencial de ABEL

$$\frac{dt}{dz} = \left(2 - \frac{1}{t}\right) + (1-t) \cdot \frac{1}{z}$$

que no pertenece a los tipos que se reducen a cuadraturas, ni admite integrales particulares algebraicas.

Por mayor razón no podemos tener esperanza de llegar a las ecuaciones integrables en los casos de ser $n > 3$.

§ 12. A pesar del resultado negativo del párrafo anterior. se pueden formar ecuaciones diferenciales análogas a las de CLAIRAUT y de cualquier grado en y valiéndose de la integral particular

$$g = x - k,$$

siendo k constante, integral que verifica a la ecuación (22) para todos los valores enteros positivos de n.

En efecto, en tal ocasión encontramos

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_n = x - k$$

y por consiguiente

$$f_1(x, c) = g \cdot c + h = c \cdot (x - k) + h,$$
$$f_2(x, c) = g_1 \cdot c + (h - g_1 h) = c \cdot (x - k) + [h - (x - k) \cdot h'].$$

Introduciendo nuevas variables bajo las condiciones

$$x - k = e^{-u}, \quad h = (x - k)\, v, \tag{25}$$

tendremos

$$\frac{dh}{dx} = v - \frac{dv}{du}.$$

De suerte que

$$h - (x - k) \, . \, h' = h - (x - k) \, . \, \frac{dh}{dx} = (x - k) \, . \, \frac{dv}{du}$$

y las relaciones (21) reciben la forma

$$f_1(x, c) = (x - k)\,(c + v), \quad f_2(x, c) = (x - k)\,(c + v'),$$
$$f_3(x, c) = (x - k)\,(c + v''), \quad \ldots, \quad f_{n+1}(x, c) = (x - k)\,(c + v^{(n)}),$$

en donde las derivadas v', v'', ..., $v^{(n)}$ se toman con respecto a u.

Suponiendo que el ciclo (4) consta de n factores, vamos a tener

$$f_{n+1}(x, c) = f_1(x, c),$$

es decir,

$$(x - k)\,(c + v) = (x - k)\,(c + v^{(n)}),$$

lo que nos conduce a la siguiente ecuación diferencial para v

$$v^{(n)} = v.$$

Su integral general es

$$v = k_0 e^u + k_1 e^{u\varepsilon} + k_2 e^{u\varepsilon^2} + \ldots + k_{n-1} e^{u\varepsilon^{n-1}},$$

siendo k_0, k_1, ..., k_{n-1} constantes de integración y

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

raíz primitiva de la unidad de enésimo grado.

Volviendo a las variables antiguas mediante las relaciones (25) encontramos

$$h = k_0 + (x-k) \, . \, [k_1 (x-k)^{-\varepsilon} + k_2 (x-k)^{-\varepsilon^2} + \\ + \ldots + k_{n-1} (x-k)^{-\varepsilon^{n-1}}].$$

Una vez hallada la función h, sin dificultad calculamos la primera y la segunda integrales

$$y = f_1(x, c) = k_0 + (x-k) \, . \, [c + k_1 (x-k)^{-\varepsilon} + k_2 (x-k)^{-\varepsilon^2} + \\ + \ldots + k_{n-1} (x-k)^{-\varepsilon^{n-1}}].$$

$$y = f_2(x, c) = k_0 + (x-k) \, . \, [c + k_1 \varepsilon (x-k)^{-\varepsilon} + k_2 \varepsilon^2 (x-k)^{-\varepsilon^2} + \\ + \ldots + k_{n-1}{}^{\varepsilon^{n-1}} (x-k)^{-\varepsilon^{n-1}}].$$

Observando que la segunda integral se deduce de la primera multiplicando los coeficientes k_1, k_2, ..., k_{n-1} por las potencias sucesivas ε, ε^2, ..., ε^{n-1} podemos escribir las expresiones para las demás integrales por analogía, sin ningún cálculo.

Multiplicando los resultados, llegamos a la integral general y cambiando luego, c en y', a la ecuación buscada que tendrá la forma

$$\prod_{j=0}^{j=n-1} \left\{ (y - k_0) - (x-k) \, . \, [y' + k_1 \varepsilon^j (x-k)^{-\varepsilon} + k_2 \varepsilon^{2j} (x-k)^{-\varepsilon^2} + \right. \\ \left. \ldots + k_{n-1} \varepsilon^{(n-1)j} (x-k)^{-\varepsilon^{n-1}}] \right\} = 0,$$

siendo arbitrarios los coeficientes

$$k, \, k_0, \, k_1, \, k_2, \, \ldots, \, k_{n-2}, \, k_{n-1}.$$

Conforme a lo expuesto en el párrafo 1 un producto de varios ciclos del tipo indicado, también conduce a una ecuación diferencial análoga a las de CLAIRAUT.

§ 13. Consideremos algunos casos particulares. Si $n=3$, las ecuaciones componentes serán

$$\begin{cases} (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'=(x-k)\,.\,[k_1(x-k)^{-\varepsilon}+k_2(x-k)^{-\varepsilon^2}] \\ (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'=(x-k)\,.\,[k_1\varepsilon(x-k)^{-\varepsilon}+k_2\varepsilon^2(x-k)^{-\varepsilon^2}] \\ (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'=(x-k)\,.\,[k_1\varepsilon^2(x-k)^{-\varepsilon}+k_2\varepsilon(x-k)^{-\varepsilon^2}] \end{cases}$$

en donde

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \quad \varepsilon^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

Reconcentrando todos los términos en los primeros miembros y multiplicando, luego, los resultados, se llega a una ecuación de 3er. grado.

Si, a fin de obtener la ecuación con coeficientes reales y de una forma más sencilla, se hacen, por ejemplo,

$$k=k_0=0 \quad \text{y} \quad k_1=k_2=1,$$

se obtiene la siguiente ecuación cúbica

$$(y-xy')^3-3x^3\,.\,(y-xy')=2x^{1}\sqrt{x}\,\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\ln x\right).$$

En el caso de que sea $n=4$ las componentes serán

$$\begin{cases} (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'= \\ \qquad (x-k)\,.\,[k_1(x-k)^{-i}+k_2(x-k)+k_3(x-k)^{+i}] \\ (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'= \\ \qquad (x-k)\,.\,[k_1 i(x-k)^{-i}-k_2(x-k)-k_3 i(x-k)^{+i}] \\ (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'= \\ \qquad (x-k)\,.\,[-k_1(x-k)^{-i}+k_2(x-k)-k_3(x-k)^{+i}] \\ (y-k_0)-(x-k)\,.\,y'= \\ \qquad (x-k)\,.\,[-k_1 i(x-k)^{-i}-k_2(x-k)+k_3 i(x-k)^{+i}]. \end{cases}$$

Poniendo

$$k = k_0 = k_2 = 0 \quad \text{y} \quad k_1 = k_3 = \frac{1}{2},$$

resulta la ecuación bicuadrada más sencilla

$$(y - xy')^4 - x^2(y - xy')^2 + \frac{1}{4} x^4 [\operatorname{sen}(2 \ln x)]^2 = 0.$$