

LOS PRINCIPIOS DE ACCION VARIADA Y ESTACIONARIA

por

JOSÉ WÜRSCHMIDT
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Tucumán

Observaciones previas.

a). Como es conocido, se obtiene rápidamente la famosa *ecuación de Schroedinger*, reemplazando en la «ecuación de ondas»:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}\psi = 0$$

$\frac{\nu}{u} = \frac{1}{\lambda}$ por mv (relación de *de Broglie*) y expresando mv por la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv^2 = W - U,$$

significando W la energía total y U la energía potencial del punto material m considerado. Varios autores⁽¹⁾ siguen este camino, para entrar inmediatamente en las consideraciones sobre el

¹⁾ CASTELFRANCHI, CAYETANO: *Física Moderna*. Gili, Barcelona, 1932, p. 624.

HAAS, ARTHUR: *Einführung in die theoretische Physik, II*. Gruyter, Berlín, 1930, p. 43.

HAAS, ARTHUR: *Materiewellen und Quantenmechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1929, p. 49.

Handbuch der Experimentalphysik, Ergänzungswerk, II. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936, p. 148.

PLA, CORTÉS: *Algunos Aspectos de la Física Moderna*. Univ. Nac. del Litoral. Rosario, 1939, p. 75.

WÜRSCHMIDT, JOSÉ: *Resultados y Problemas Modernos de la Física*. Univ. Nac. de Tucumán, N° 204; Dep. de Física, N° 10. Violetto, Tucumán, 1935, 84.

significado de la ecuación, y dando oportunamente sus generalizaciones. Otros⁽²⁾ siguen el procedimiento de *Schroedinger* mismo, quien ha demostrado que los grupos de ondas como conjuntos están regidos por las leyes clásicas «del movimiento»⁽³⁾ y relacionan las propiedades del nuevo tipo de ondas con las consecuencias de las teorías de *Hamilton-Jacobi*; el procedimiento es en realidad el usado por *Hamilton* en 1824⁽⁴⁾.

b) Dada la importancia de estas leyes de la mecánica «clásica» y revisando la bibliografía, nos damos cuenta que la mayoría de los autores⁽⁵⁾ desarrolla la teoría llamada clásica que considera constante la masa del punto material; muy pocos⁽⁶⁾

-
- *) CASTELFRANCHI, I. c., p. 495.
DE BROGLIE, LOUIS: *Einführung in die Wellenmechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1929, p. 10 etc.
FLINT, H. T.: *Wave Mechanics*. Methuen, London, 1938, p. 7 etc.
PLANCK, MAX: *Einführung in die theoretische Physik*, V. Hirzel, Leipzig, 1927, p. 170. etc.
SCHAEFER, CLEMENS: *Einführung in die theoretische Physik, III, 1*. Gruyter, Berlin, 1932, p. 582. etc.
WILSON, H. A.: *Modern Physics*. Blackie, London, 1937, p. 99, 100, 116.
- *) *Handbuch der Experimentalphysik*, I. c., p. 201.
*) SCHAEFER, I. c., p. 582.
*) APPELL, PAUL: *Traité de Mécanique Rationnelle, I*. Gauthier-Villars, Paris, 1926, p. 530 etc.
FUERTH, REINHOLD: *Einführung in die theoretische Physik*. Springer, Wien, 1936, p. 116, 179, 180.
Handbuch der Experimentalphysik, II. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1926, p. 305 etc.
Handbuch der Physik, I. Barth, Leipzig, 1908, p. 329 etc.
NIELSEN, JAKOB: *Vorlesungen über elementare Mechanik*. Springer, Berlin, 1935, p. 349.
- *) PAINLEVÉ, PAUL: *Cours de Mécanique, I*. Gauthier-Villars, Paris, 1930, p. 173, 233.
SCHAEFER, CLEMENS: *Einführung in die theoretische Physik, I*. Gruyter, Berlin, 1929, p. 227 etc.
WEBER, HEINRICH: *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1910, p. 295 etc.
WEBER, RUDOLF-GANS, RICHARD: *Repertorium der Physik, I*. Teubner, Leipzig, 1915, p. 31 etc.
- *) WÜRSCHMIDT, JOSÉ: *Apuntes de Física Teórica, II*. Univ. Nac. de Tucumán, N° 223; Dep. de Física, N° 12. Violetto, Tucumán, 1937, p. 144 etc.
- *) MADELUNG, ERWIN: *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer, Berlin, 1936, p. 280 etc.
SCHAEFER, III, I. c., p. 857 etc.

dan oportunamente las modificaciones que la variabilidad de la masa con la velocidad hace necesarias, y algunos ⁽⁷⁾ tratan simultáneamente las expresiones no relativistas y relativistas.

c) Otra observación se refiere a la gran diversidad de los signos usados y además de las denominaciones mismas de algunas funciones; encontramos para la energía potencial los signos: $F, P, U, -U, V, W, \phi$; para la energía cinética: E, L, U, T ; para la energía total: E, W , significando en algunos autores E la energía total clásica y W la relativista; las mismas letras E y W son usadas también para la magnitud mc^2 o también $(m-m_0)c^2$, etc. El potencial cinético o la función de *Lagrange* es: $H, K, T+U, L-V, L$; la función de *Hamilton*: $H, -R$, y las dos funciones de acción son llamadas: H, S, S^* , W y J, S, S_1 respectivamente.

La finalidad del presente trabajo es la demostración de que los dos principios de acción estacionaria, el de *Hamilton*, y el de *Maupertuis*, son nada más que casos especiales de dos principios de acción variada; y que éstos por su parte son otra expresión del principio de *d'Alembert*; el método es tal que la constancia o variabilidad de la masa no entra sino en la parte final; los signos usados son los más racionales, evitando confusiones y contradicciones.

1. El principio de *d'Alembert* y su transformación.

Considerando un sistema de n puntos materiales, entre los cuales existen n' ($< 3n$) ecuaciones condicionales, llamamos $\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$ los impulsos, \bar{F}_i las fuerzas que actúan y escribimos el principio de *d'Alembert* (suprimiendo los índices i):

$$(1.1) \sum_1^n \left[\left(F_x - \frac{dp_x}{dt} \right) \delta x + \left(F_y - \frac{dp_y}{dt} \right) \delta y + \left(F_z - \frac{dp_z}{dt} \right) \delta z \right] = 0.$$

Significando (1.1) una condición de equilibrio en cada momento, se debe considerar constante el tiempo en la formación de los desplazamientos virtuales $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

⁷⁾ DE BROGLIE, l. c., p. 10 etc.

FLINT, l. c., p. 7 etc.

Escribiendo (1.1) en forma vectorial y observando que: (1)

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}, \delta\bar{s}) = \left(\frac{d\bar{p}}{dt}, \delta\bar{s}\right) + \left(\bar{p}, \frac{d}{dt}\delta\bar{s}\right)$$

tenemos:

$$(1.2) \quad \sum_1^n (\bar{F}, \delta\bar{s}) + \sum_1^n \left(\bar{p}, \frac{d}{dt}\delta\bar{s}\right) = \frac{d}{dt} \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{s}).$$

Interpretamos las $3n$ coordenadas de todos los puntos materiales en un momento t como coordenadas de un solo punto en un espacio de $3n$ dimensiones; entonces la sucesión temporal de las posiciones de los puntos es la órbita de este punto. Elegimos para el tiempo t_0 el punto $P_0(x_i, y_i, z_i)$, para un tiempo posterior t_1 el punto $P_1(x_i, y_i, z_i)$, para un tiempo t cualquiera entre t_0 y t_1 el punto $P(x_i, y_i, z_i)$. A esta *órbita verdadera coordinamos una órbita variada*, de manera que al punto $P(x_i, y_i, z_i)$ en el momento t sea coordinado el punto $P'(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ en el momento $t + \delta t$.

A la velocidad \bar{v} en el momento t corresponde la velocidad $\bar{v} + \delta\bar{v}$ en el momento $t + \delta t$. Siendo: $d\delta x = \delta dx$ etc.; $d\delta t = \delta dt$, tenemos:

$$\delta\bar{v} = \delta \frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{dt d\delta\bar{s} - d\bar{s} d\delta t}{dt^2} = \frac{d}{dt} \delta\bar{s} - \frac{d\bar{s}}{dt} \frac{d}{dt} \delta t.$$

Así podemos escribir (1.2) en la forma:

$$(1.3) \quad \sum_1^n (\bar{F}, \delta\bar{s}) + \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{v}) + \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) \frac{d}{dt} \delta t = \frac{d}{dt} \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{s})$$

$\sum_1^n (\bar{F}, \delta\bar{s}) = \delta'A$ es el trabajo de las fuerzas \bar{F}_i en el desplazamiento virtual; multiplicando (1.3) por dt e integrando entre t_0 y t_1 , resulta:

(1) Siendo \bar{u}, \bar{v} vectores, (\bar{u}, \bar{v}) representa el producto escalar.

$$(1.4) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt [\delta'A + \sum_1^n (\bar{p}, \delta v) + \sum_1^n (\bar{p}, \dot{v}) \frac{d}{dt} \delta t] = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{s}) \right|_{t_0}^{t_1}$$

Las fuerzas pueden ser conservadoras o no; en el primer caso tenemos: $\bar{F}_i = -\text{grad } U^*_i$ ($i=1, 2, \dots, k$), siendo los potenciales U^*_i funciones de las coordenadas; en el segundo caso tenemos, excluyendo el caso de fuerzas que no poseen potencial, también $\bar{F}_i = -\text{grad } U^{**}_i$ ($i=k+1, k+2, \dots, n$), pero los U^{**}_i dependen también del tiempo t . El trabajo $d'A$ que corresponde a los desplazamientos reales dx_i, dy_i, dz_i , realizados en el tiempo dt , es:

$$d'A = \sum_1^n (\bar{F}, d\bar{s}) = \sum_1^n \left(\frac{d\bar{p}}{dt}, d\bar{s} \right) = \sum_1^n (d\bar{p}, \dot{v}).$$

Según el principio del trabajo ^(s) $d'A$ produce un aumento de la «energía E» del sistema (en la Mecánica «clásica» se dice: de la energía cinética T):

$$(1.5) \quad d'A = dE = \sum_1^n (d\bar{p}, \dot{v}).$$

Por otra parte este trabajo $d'A$ es:

$$d'A = \sum_1^k (\bar{F}, d\bar{s}) + \sum_{k+1}^n (\bar{F}, d\bar{s}) = -\sum_1^k dU^*_i - \sum_{k+1}^n dU^{**}_i + \sum_{k+1}^n \frac{\partial U^{**}_i}{\partial t} dt.$$

O también:

$$(1.6) \quad d'A = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

O, llamando W la suma de la «energía» E y de la «energía potencial» U ($W = \text{«energía total»}$):

^{s)} STECK, MAX: Revista de la Univ. Nac. de Tucumán, Serie A: Matemáticas y Física teórica, 1, 67, 1940.

$$(1.7) \quad dW = \frac{\partial U}{\partial t} dt = dE + dU = \sum_1^n (d\bar{p}, \bar{v}) + dU.$$

Se vé que sólo en el caso de que U no depende del tiempo t resulta: $dW=0$, o «la conservación de la energía»: $W = E + U = \text{const.}$

El trabajo $\delta'A$ que corresponde a los desplazamientos virtuales de (1.1) es:

$$\delta'A = \sum_1^n (\bar{F}, \delta\bar{s}) = -\delta U \quad (\text{con } t = \text{const.})$$

(compare también (1.6)), o con la energía total W :

$$(1.8) \quad \delta'A = -\delta(W-E) = \sum_1^n (\delta\bar{p}, \bar{v}) - \delta W.$$

Reemplazando el valor de $\delta'A$, dado por (1.8), en (1.4) resulta:

$$(1.9) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_1^n (\delta\bar{p}, \bar{v}) - \delta W + \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{v}) + \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) \frac{d}{dt} \delta t \right] \\ = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{v}) \right|_{t_0}^{t_1}$$

o también:

$$(1.10) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) - \delta W + \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) \frac{d}{dt} \delta t \right] = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta\bar{s}) \right|_{t_0}^{t_1}$$

y a esta ecuación, que es nada más que la expresión del *principio de d'Alembert*, podemos dar distintas formas, según que queremos considerar la función:

$$(1.11) \quad L = \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) - W$$

que llamaremos *función de Lagrange o potencial cinético*,

o la función:

$$(1.12) \quad \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v})$$

que podemos llamar: *función de Maupertuis*.

2. *Los dos principios de acción variada y los de acción estacionaria.*

Introduciendo en (1.10) la función (1.11), tenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta L + L \frac{d}{dt} \delta t \right] = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{s}) \right|_{t_0}^{t_1} - \left| W \delta t \right|_{t_0}^{t_1},$$

mientras con (1.12) resulta:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta \cdot \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) + \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) \frac{d}{dt} \delta t \right] = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{s}) \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt$$

o también:

$$(2.1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{s}) - W \delta t \right|_{t_0}^{t_1}$$

$$(2.2) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) dt = \left| \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{s}) \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt$$

Las dos fórmulas (2.1) y (2.2)⁽⁹⁾ dan el valor producido por la variación δ , aplicada a una función que tiene la dimensión de una *acción* o del producto de energía por tiempo,

⁹⁾ DE BROGLIE, (I. c., p. 17) llega a las mismas expresiones; pero deduce primero el principio de *Hamilton*; lo amplía luego al principio de la acción *L* variada; con algunas transformaciones llega a la expresión para la otra función, y con las condiciones, también arriba mencionados, al principio de *Maupertuis*.

refiriéndose la variación a la función L o a la función $\sum_1^n(\bar{p}, \bar{v})$ respectivamente y al tiempo: ambas expresan un *principio de acción variada*.

En (2.1) la función de acción que variamos es:

$$(2.3) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

que llamamos: *función de acción de Hamilton*: en (2.2) la función es:

$$(2.4) \quad S^* = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n(\bar{p}, \bar{v}) dt$$

que llamamos: *función de acción de Maupertuis-Euler*.

Ahora bien, ambas fórmulas permiten establecer con toda facilidad las condiciones bajo las cuales se anula el segundo miembro.

En (2.1) deben anularse en los límites t_0 y t_1 los desplazamientos $\delta\bar{s}$ y la variación del tiempo δt . Bajo esta condición es decir, manteniendo fijos en la variación los puntos P_0 y P_1 y los tiempos t_0 y t_1 , tenemos:

$$(2.5) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

o el *principio de Hamilton*. Escribiendo el principio en la forma (2.5), al punto $P(x_i, y_i, z_i)$ en el momento t está coordinado el punto $P'(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ en el momento $t + \delta t$; podemos elegir también para P' el mismo tiempo t ; pues (1.10) con $\delta t = 0$ da inmediatamente (2.5), supuesto que se anulan los desplazamientos en los límites t_0 y t_1 . Por lo tanto, en (2.5) la variación δ no necesita referirse al tiempo t ; se puede escribir:

$$(2.5)' \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0.$$

En (2.2) deben anularse en los límites t_0 y t_1 los desplazamientos y además debe ser constante la energía total W ; bajo estas condiciones resulta:

$$(2.6) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) dt = 0$$

o el principio de Maupertuis-Euler. La variación se refiere también al tiempo t .

Ambos principios son principios de acción estacionaria; una función cualquiera se llama estacionaria, si se anula su variación (expresión usual en la bibliografía inglesa; en la alemana se dice que la función tiene un valor extremo, si se anula su variación).

De las fórmulas (1.7) para la energía total y (1.11) para la función de Lagrange:

$$dW = \sum_1^n (d\bar{p}, \bar{v}) + dU$$

$$L = \sum_1^n (\bar{p}, \bar{v}) - W.$$

obtenemos:

$$(2.7) \quad dL = \sum_1^n (\bar{p}, d\bar{v}) - dU;$$

evidentemente, si hubiéramos puesto en (1.4) $\delta'A = -\delta U$ y $\delta t = 0$ y exigido que los desplazamientos se anulen en los límites, con:

$$\delta L = \sum_1^n (\bar{p}, \delta \bar{v}) - \delta U$$

hubiera resultado directamente el principio de Hamilton.

3. *Coordenadas generalizadas, ecuaciones de Lagrange II, ecuaciones canónicas y ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi.*

Introduciendo coordenadas generalizadas q_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, r$) cuyo número r es igual al grado de libertad $3n - n'$ del sistema, tenemos, escribiendo en vez de las coordenadas x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) $3n$ coordenadas x_i :

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_r)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r,$$

es decir, las componentes de las velocidades son funciones de las coordenadas generalizadas q_ρ y de sus derivadas \dot{q}_ρ . Por lo tanto la función de Lagrange L es función de q_ρ, \dot{q}_ρ, t , y su variación es:

$$\delta L = \sum_1^r \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \sum_1^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t.$$

El potencial U es función de las coordenadas q_ρ y del tiempo. Escribimos el principio de *Hamilton* (sin variar el tiempo):

$$(3.1) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_1^r \frac{\partial L}{\partial q_\rho} \delta q_\rho + \sum_1^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \delta \dot{q}_\rho \right] = 0.$$

Considerando que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

y que los desplazamientos se anulan en los límites:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^r \delta q_\rho \left[\frac{\partial L}{\partial q_\rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \right) \right] = 0.$$

Los r desplazamientos δq_ρ son independientes entre sí; por lo tanto tenemos las r ecuaciones:

$$(3.2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \right) = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

que se llaman: *ecuaciones de Lagrange, de la segunda especie.*

En el caso de un solo punto material se identifican las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

con las ecuaciones:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

es decir, tenemos, generalizando, las relaciones:

$$(3.3) \quad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = -\frac{\partial U}{\partial q_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = p_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

y las ecuaciones de movimiento:

$$(3.5) \quad -\frac{\partial U}{\partial q_\rho} = \frac{dp_\rho}{dt} \quad (\rho = 1, 2, \dots, r).$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por dq_ρ y sumando, tenemos (suprimiendo el índice ρ):

$$\sum_1^r \frac{\partial U}{\partial q} dq = \sum_1^r \frac{dp}{dt} dq = \sum_1^r dp \dot{q} = dE$$

(10) SCHAEFER (1. c., 248 etc.), después de deducir el *principio de Hamilton*, lo amplía también a un "principio de *Hamilton* de acción *variante*" (Prinzip der *varieden* Wirkung); pero no enuncia el principio de *Maupertuis*. Habiendo dado EULER la formulación analítica de este principio (*Weber-Gans*, 1 e., p. 32), lo denominamos según *Maupertuis-Euler*.

o también:

$$-dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt = dE$$

y poniendo: $W = E + U$:

$$(3.6) \quad dW = \frac{\partial U}{\partial t} dt = \sum_1^r dp \dot{q} + dU$$

Por otra parte, multiplicando (3.3) por dq , (3.4) por $d\dot{q}$ y sumando:

$$\sum_1^r \frac{\partial L}{\partial q} dq + \sum_1^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \sum_1^r p d\dot{q} - \sum_1^r \frac{\partial U}{\partial q} dq$$

o:

$$dL_{t=const.} = \sum_1^r p d\dot{q} - dU_{t=const.}$$

es decir, también:

$$(3.7) \quad dL = \sum_1^r p d\dot{q} - dU.$$

Sumando (3.6) y (3.7), resulta también:

$$(3.8) \quad L + W = \sum_1^r p \dot{q}$$

Las relaciones ganadas (3.6), (3.7) y (3.8) corresponden perfectamente a las anteriores (1.7), (2.7) y (1.11).

En (3.8) la energía W es expresada en el primer término $\sum p \dot{q}$ en función de los impulsos y de las velocidades, en el segundo término $-L$ en función de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo. Representaremos ahora la energía en función de las coordenadas, de los impulsos y del tiempo (*variables canónicas*), escribiendo $H(p, q, t)$; tenemos entonces:

$$(3.9) \quad dH_{t=const.} = \sum \frac{\partial H}{\partial p} dp + \sum \frac{\partial H}{\partial q} dq.$$

Por otra parte, con (3.8):

$$\begin{aligned} dW_{t=const.} &= d[\sum p\dot{q} - L] \\ &= \sum dp\dot{q} + \sum p d\dot{q} - \sum \frac{\partial L}{\partial q} dq - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}. \end{aligned}$$

O anulándose con (3.4) la suma del segundo y cuarto término:

$$(3.10) \quad dW_{t=const.} = \sum \dot{q} dp - \sum \frac{\partial L}{\partial q} dq,$$

es decir, la energía aparece, como en (3.9), en función de p y q . Comparando (3.9) y (3.10), resulta:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} &= \dot{p}; \end{aligned}$$

estas son las *ecuaciones canónicas de Hamilton*.

Finalmente llegaremos, siguiendo un procedimiento, indicado en *Madelung* (1. c., p. 233), a las relaciones que permiten comparar los fenómenos ondulatorios con los del movimiento del punto material, considerando la función de acción S (2.3). Eligiendo el límite inferior $t_0=0$ y el límite superior como variable t , e interpretando S como función de q, \dot{q}, t , tenemos:

$$dS = \sum \frac{\partial S}{\partial q} dq + \sum \frac{\partial S}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

O con (2.3):

$$(3.12) \quad dS = \int_0^t dt \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q} dq + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \right] + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

Siendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q},$$

escribimos (3.12):

$$dS = \int_0^t dt \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq - \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dq \right] + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

Con (3.2) se anula la suma del primer y tercer término bajo la integral, y queda:

$$(3.13) \quad dS = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

es decir, resulta para $t = \text{const.}$:

$$(3.14) \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p.$$

Reemplazando por otra parte en (3.13) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ por p , tenemos:

$$dS = \sum p dq + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

o también:

$$(3.15) \quad \frac{dS}{dt} = \sum p \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Reemplazando por fin $\frac{dS}{dt}$ por $L = \sum p \dot{q} - W$, queda:

$$(3.16) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -W$$

Las tres ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16) son el punto de partida para la comparación mencionada. La última, interpretando la energía como función de las variables canónicas p, q, t , es decir, escribiendo H , en vez de W , es también:

$$(3.17) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0$$

o, con (3.14):

$$(3.18) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0;$$

es la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi.

4. Los valores de L, E, W, H en la mecánica de un punto material.

Escribimos las fórmulas (1.7) con (1.5), (2.7) y (1.11) para un solo punto material:

$$dW = (d\bar{p}, \bar{v}) + dU = dE + dU$$

$$dL = (\bar{p}, d\bar{v}) - dU$$

$$W + L = (\bar{p}, \bar{v}).$$

En la Mecánica «clásica» que considera constante la masa resulta:

$E = T = 1/2 mv^2$ (la «energía» se identifica con la «energía cinética».

$$(4.1) \quad W = T + U$$

$$(4.2) \quad L = T - U$$

$$W + L = 2T$$

Con:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

se obtiene:

$$(4.3) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U$$

$$(4.4) \quad L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U$$

siendo:

$$W + L = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mv^2$$

Se ve que $E = mc^2$ es la energía de la masa m en la mecánica general o relativista, o la suma de la «energía de reposo» $m_0 c^2$ y la «energía cinética» relativista:

$$(4.5) \quad T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

«La mecánica clásica desprecia sistemáticamente la energía interior» o de reposo. Sin embargo, podemos escribir también:

$$(4.6) \quad W' = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] + U$$

o con (4.5):

$$(4.7) \quad W' = T + U.$$

Sólo es necesario en este caso, para que sea válida la ecuación (1.11), escribir la función de Lagrange:

$$(4.8) \quad L' = m_0 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] - U$$

Las fórmulas (4.6) y (4.8) permiten pasar inmediatamente a las fórmulas clásicas (4.1) y (4.2).

Resumiendo, en la mecánica «general» las funciones W y L pueden ser escritas:

Sea:		O sea:
(4.9)		(4.10)
$W = E + U$		$W' = T + U$
$L = -E \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - U$		$L' = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U$

siendo:

$$E = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la «energía» del punto material,

siendo:

$$T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

la «energía cinética» del punto material.

Consecuentemente, también la función $H(p, q, t)$ es:

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + U \quad \text{o:} \quad H' = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2 + U$$

respectivamente. Se aclaran así las divergencias entre los varios autores respecto a las funciones mencionadas⁽¹¹⁾.

RESUMEN

1. Del principio de d'Alembert se deducen dos principios de acción variada que son otra expresión del primero. Se establecen las condiciones bajo las cuales los mencionados principios son de acción estacionaria, es decir, los de Hamilton y de Maupertuis-Euler.

2. Se deducen las expresiones para las funciones que intervienen en los principios de *Hamilton* y de *Maupertuis-Euler* en coordenadas generalizadas, igualmente como las ecuaciones importantes de la teoría.

3. Se dan los valores de estas funciones en la Mecánica general (relativista) y clásica.

¹¹⁾ FLINT, l. c., p. 13 tiene para L ambas expresiones, usando p. 18 solo la función E .

BROGLIE, l. c., p. 12 y 15, tiene (4.9).

MADELUNG, l. c., p. 182, tiene (4.10), igualmente SCHAEFER, l. c., p. 859.