SOBRE LA TRANSFORMACION DEL METODO DE GRAEFFE

por

J. BABINI

Facultad de Química Industrial, etc.
Universidad Nacional del Litoral
Santa Fe

En la resolución de las ecuaciones algebraicas por el método de Graeffe debe transformarse la ecuación dada $f(x)=0$ en otra $F(X)=0$ tal que $X=x^h$ adoptándose, en la práctica, $h=2^r$ por aplicación reiterada de la transformación $X=-x^2$.

Nos proponemos, en esta nota, adoptar $h=3^{r'}$ comparando sus resultados con el método usual. Para eso consideremos, previamente, la transformación general $X=x^n$ y escribamos

$$f(x)=\sum_{p=0}^{m} a_p x^p=\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{s\leq\frac{m}{n}} a_{ns+r}\, x^{ns+r}=\sum_{r=0}^{n-1} x^r \sum_{s=0}^{s\leq\frac{m}{n}} a_{ns+r}\, X^s=\sum_{r=0}^{n-1} x^r f_r$$

donde las f_r son funciones de X. Si se eliminan $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ entre las n ecuaciones $x^s f(x)=0$ $(s=0,1,2,\ldots,n-1)$ se obtendrá la ecuación transformada $F(X)=0$ que será pues el determinante de orden n cuyo elemento A_{rs} (columna r y fila s) es

$$A_{rs}=\begin{cases} f_{r-s} & r\geqq s \\ X f_{n+r-s} & r<s \end{cases}$$

Sea ahora el determinante de orden n, $\varphi(x)\neq 0$ cuyo elemento $B_{rs}=(x\,\varepsilon_s)^{n-r}$ donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ son las n raíces enésimas de la unidad y multipliquemos los dos determinantes $F(x)=0$ y $\varphi(x)\neq 0$. Ese determinante producto tendrá por elemento

$$C_{rs} = \sum_{t=1}^{n} A_{rt} B_{ts} = \sum_{t=1}^{r} (x\,\varepsilon_s)^{n-t} f_{r-t} + \sum_{t=r+1}^{n} (x\,\varepsilon_s)^{n-r} X f_{n+r-t}$$

$$= (x\,\varepsilon_s)^{n-r} \left[\sum_{t=0}^{r-1} (x\,\varepsilon_s)^t f_t + \sum_{t=r}^{n-1} (x\,\varepsilon_s)^t f_t \right] = (x\,\varepsilon_s)^{n-r} \sum_{t=0}^{n-1} (x\,\varepsilon_s)^t f_t$$

$$= (x\,\varepsilon_s)^{n-r} f(x\,\varepsilon_s)\,;$$

por lo tanto

$$F(X)\,\varphi(x) = \varphi(x)\, f(x\,\varepsilon_1)\, f(x\,\varepsilon_2) \ldots f(x\,\varepsilon_n) = 0\,,$$

y, por ser

$$\varphi(x) \neq 0; \qquad F(X) = f(x\,\varepsilon_1)\, f(x\,\varepsilon_2) \ldots f(x\,\varepsilon_n)\,,$$

expresión que nos da la ecuación transformada. (Si la transformación fuera $X = a\,x^n$ su transformada sería $\psi(X) = F\left(\frac{X}{a}\right)$).

Si $X = x^2$, $F(X) = f(x)\, f(-x) = \sum_{p+q=2} a_p\, a_q\, (-1)^q\, x^{p+q} = \sum_{p=0} A_p\, X^p$

donde

$$A_p = a_p^{\,2}\, (-1)^p + 2 \sum_{h=1} a_{p-h}\, a_{p+h}\, (-1)^{p+h}$$

mientras que si

$$X = -\,x^2 \qquad (1)$$

$$A_p = a_p^{\,2} + 2 \sum_{h=1} a_{p-h}\, a_{p+h}\, (-1)^h$$

expresión algo más sencilla que la anterior, lo que justifica su adopción en la práctica.

Si ahora

$$X = x^3 \qquad (2)$$

tendremos, siendo ε una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad,

$$F(X) = f(x)\, f(x\,\varepsilon)\, f(x\,\varepsilon^{-1}) = \sum_{p+q+r=3} a_p\, a_q\, a_r\, \varepsilon^{q-r}\, x^{p+q+r} = \sum_{p=0} A_p\, X^p$$

donde

$$A_p = a_p^3 + 3 \sum_{2h+k=3p} a_h^2\, a_k + 6 \sum_{\substack{h+k+l=3p \\ h\equiv k\equiv l \,(\mathrm{mod.}\ 3)}} a_h\, a_k\, a_l - 3 \sum_{\substack{h+k+l=3p \\ h\equiv k-1\equiv l-2 \,(\mathrm{mod.}\ 3)}} a_h\, a_k\, a_l$$

tomando en cada sumatoria los índices diferentes.

Para comparar las transformaciones (1) y (2) consideremos que para llegar a las raíces con igual aproximación deberá ser $2^r = 3^{r'}$, es decir, $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{\log.3}{\log.2} \cong \dfrac{8}{5}$. Si t y t' es el número de términos que interviene en cada una de esas transformaciones, es decir, la suma total del número de sumandos de que se compone cada A_p, y consideramos la razón $\dfrac{5t'}{8t}$ observaremos que esta razón es menor que uno, para $m \leqq 4$ y mayor que uno para $m > 4$; de donde podemos admitir que hasta las ecuaciones de cuarto grado, inclusive, la transformación (2) puede ser utilizada en lugar de la (1), mientras que en las ecuaciones de grado superior al cuarto esa sustitución ya no sería conveniente. (Habría además que tener en cuenta que en la transformación (1) el cálculo de cada término es más sencillo, aunque el proceso práctico: tabla de logaritmos, máquina de calcular, regla de cálculo, etc. hace menos sensible esta diferencia).

He aquí los coeficientes de la ecuación transformada según la transformación (2) para las ecuaciones de grado no superior al cuarto:

$$A_0 = a_0^3$$

$$A_1 = a_1^3 + 3a_0^2\, a_3 - 3a_0\, a_1\, a_2$$

$$A_2 = a_2^3 + 3a_1^2\, a_4 + 3a_3^2\, a_0 - 3a_1\, a_2\, a_3 - 3a_0\, a_1\, a_2$$

$$A_3 = a_3^3 + 3a_4^2\, a_1 - 3a_2\, a_3\, a_4$$

$$A_4 = a_4^3$$

Cabe, por último, observar que la transformación $X = -x^2$ proporciona las raíces reales solamente en valor absoluto, mientras que la transformación $X = x^3$ las da en valor y signo, lo que constituye, sin duda, una ventaja de esta última transformación sobre la anterior.

Veamos, para terminar, un par de ejemplos. Sea resolver, utilizando la transformación (2) y con la regla de cálculo (sistema Rietz) la ecuación cúbica

$$x^3 + 17{,}5\,x^2 - 75\,x - 250 = 0$$

Los cálculos necesarios son:

1)	$1{,}75^{1}$	$-7{,}5^{1}$	$-2{,}5^{2}$
	$5{,}36^{3}$	$-4{,}22^{5}$	$-1{,}56^{7}$
	$-0{,}75$	$1{,}87$	
	$3{,}94$	$-9{,}85$	
3)	$8{,}55^{3}$	$-1{,}22^{6}$	$-1{,}56^{7}$
	$6{,}25^{11}$	$-1{,}82^{18}$	$-3{,}79^{21}$
	$0{,}31$	$-0{,}49$	
9)	$6{,}56^{11}$	$-2{,}31^{18}$	$-3{,}79^{21}$
log. A_p	$11{,}817$	$18{,}364_n$	$21{,}579_n$
log. x^9	$11{,}817_n$	$6{,}547$	$3{,}215_n$
log. x	$1{,}313_n$	$0{,}727$	$0{,}357_n$

$x_1 = -20{,}56$ $\quad x_2 = 5{,}34$ $\quad x_3 = -2{,}28$

Sea resolver la ecuación

$$x^4 - 2\,x^3 - 61\,x^2 + 150\,x - 89 = 0$$

A continuación indicamos todos los cálculos necesarios, utilizando logaritmos a partir de la primera transformada. Después de la tercera transformada la ecuación se fragmentó en dos ecuaciones de segundo grado resueltas también logarítmicamente.

1)	-2	-61	150	-89
	-8	$-2{,}26981^{5}$	$3{,}375^{6}$	$-7{,}04969^{5}$
	450	$-0{,}01068$		
		$0{,}675$	$-0{,}047526$	

	-366	$-0{,}549$	$-2{,}443050$	
		$-0{,}16287$		
3)	$7{,}6^{1}$	$-2{,}31736^{5}$	$8{,}84424^{5}$	$-7{,}04969^{5}$
log. A_p	$1{,}880814$	$5{,}364993_n$	$5{,}946661$	$5{,}848170_n$
	$4{,}38976^{5}$	$-1{,}24445^{16}$	$6{,}91803^{17}$	$-3{,}50356^{17}$
	$26{,}53275$	$0{,}00023$	$0{,}00113$	
	$528{,}35750$	$0{,}00467$	$-4{,}33456$	
		$-0{,}00005$		
9)	$5{,}59280^{7}$	$-1{,}23960^{16}$	$2{,}58460^{17}$	$-3{,}50356^{17}$
log. A_p	$7{,}747629$	$16{,}093282_n$	$17{,}412393$	$17{,}544510_n$
	$1{,}74939^{23}$	$-1{,}90478^{48}$	$1{,}72655^{52}$	$-4{,}30061^{52}$
	$20{,}7985$		$-0{,}33675$	
27)	$2{,}25479^{24}$	$-1{,}90478^{48}$	$1{,}38980^{52}$	$-4{,}30061^{52}$
log. A_p	$24{,}353106$	$48{,}279846_n$	$52{,}142952$	$52{,}633530_n$

$$\log. \frac{p}{2} = 24{,}052076 \qquad \log. \sqrt{-q} = 24{,}139923$$

$$\log. \left(\frac{-p}{2}\right) = 3{,}562076 \qquad \log. \sqrt{q} = 2{,}176842$$

$$\log. \operatorname{tg}. \beta = 0{,}087847 \qquad \log. \operatorname{sen} \beta = \bar{2}{,}614766$$

$$\frac{\beta}{2} = 25^{\circ}\, 22'\, 40'' \qquad \frac{\beta}{2} = 1^{\circ}\, 10'\, 49''$$

$$\log. \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \bar{1}{,}676108 \qquad \log. \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \bar{2}{,}313921$$

27 log. x	$24{,}463815_n$	$23{,}816031$	$3{,}862921$	$0{,}490763$
log. x	$0{,}906067_n$	$0{,}882075$	$0{,}143071$	$0{,}018177$
	$x_1 = -8{,}05502$	$x_2 = 7{,}62210$	$x_3 = 1{,}39018$	$x_4 = 1{,}04274$

Santa Fe, 1942.