SOBRE LA INTEGRAL DE STIELTJES

por

PEDRO PI CALLEJA

Escuela de Ingeniería. - Universidad de Cuyo

San Juan

INTRODUCCION

El Dr. Beppo Levi, Director del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, hoy por suerte entre nosotros, me ha pedido mi modesta colaboración en el volumen que se ofrece en homenaje al prof. Julio Rey Pastor al conmemorar sus 25 años de estancia en la Argentina.

No podía dejar de adherirme con todo entusiasmo a este homenaje tan merecido, pues todos los que nos dedicamos a la matemática en el mundo de habla hispánica tenemos una insaldable deuda de gratitud científica con el Prof. J. Rey Pastor, al que se deben los principales y mejores esfuerzos para elevar en todos los órdenes nuestro nivel matemático. Sus agradecidos discípulos, entre los que tengo el honor de contarme, sabemos además que no es tan sólo en el aspecto científico, sino también en el humano, tan necesario para formar escuela y fomentar vocaciones, donde no en balde podemos demandar su ayuda. siempre pronta y generosa cuando aquella demanda es sincera y honrada.

El tema que desarrollo a continuación me fué precisamente sugerido por el mismo Prof. Julio Rey Pastor al proponerme estudiara la siguiente:

CUESTIÓN. — Supuesta la función $\phi(x)$ de variación acotada y con derivada finita en todo punto del intervalo (a, b), (acotada o no), examinar en qué condiciones es válida la igualdad

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, d\phi(x) = \int_a^b f(x)\, \phi'(x)\, dx.$$

Como cada una de las integrales de ambos miembros de la igualdad (1) puede tomarse en el sentido de Riemann o Lebesgue, diremos se verifica el

Teorema directo si, bajo las condiciones dichas para $\phi(x)$, de la existencia del primer miembro de (1) se deduce la del segundo miembro y la validez de la igualdad (1);

mientras que diremos se verifica el

Teorema recíproco si, bajo las condiciones dichas para $\phi(x)$, la existencia del segundo miembro de (1) asegura la del primero y la validez de la igualdad (1).

Las conclusiones son las siguientes:

Tomando (1) en el sentido (RS = Riemann - Stieltjes; R = Riemann)

$$(2) \qquad RS\int_a^b f(x)\, d\phi(x) = R\int_a^b f(x)\, \phi'(x)\, dx,$$

no se cumple ni el teorema directo, ni el recíproco.

El teorema directo no se cumple ni para $f(x)$ continua y $\phi'(x)$ acotada. En cambio basta suponer $\phi'(x)$ integrable (R) (y en particular continua) para que el teorema directo se cumpla para toda $f(x)$ acotada.

El teorema recíproco tampoco se cumple en general para las $f(x)$ acotadas; en cambio se cumple aplicado a funciones $f(x)$ integrables (R); también se cumple si $\phi'(x)$ es integrable (R) y $f(x)$ es acotada.

Tomando (1) en el sentido (L = Lebesgue)

$$(3) \qquad RS\int_a^b f(x)\, d\phi(x) = L\int_a^b f(x)\, \phi'(x)\, dx,$$

el teorema directo se cumple para toda $f(x)$ acotada, pero no el recíproco. Para $f(x)$ no-acotada puede existir el primer miembro de (3) en el sentido de Cauchy como integral condicionalmente convergente y tampoco verificarse el teorema directo por no existir el segundo miembro, que es siempre absolutamente convergente.

Tomando (1) en el sentido (LS = Lebesgue-Stieltjes)

$$LS\int_a^b f(x)\,d\phi(x) = L\int_a^b f(x)\,\phi'(x)\,dx, \tag{4}$$

se cumplen tanto el teorema directo, como el recíproco, para toda $f(x)$ respecto a la cual uno u otro de ambos miembros exista. Observemos que puede haber funciones $f(x)$ integrables (L) para las que ninguno de ambos miembros existe.

El teorema directo (4) para $\phi(x)$ monótona es consecuencia inmediata del teorema del cambio de variables para la integral de Lebesgue, del cual se dá más adelante una demostración muy sencilla valiéndose del concepto de integral de Stieltjes.

Aun cuando muchos de estos resultados son conocidos, la cuestión es pertinente, porque no tan sólo representa una síntesis de los mismos, completándolos en muchos puntos, sino que también ayuda a corregir la formulación errónea que del teorema directo (2) dan muchos autores, aún tan cuidadosos como P. Dienes (The Taylor Series, Oxford (1931), p. 204).

I

Se justifica el haber impuesto que $\phi(x)$ sea de variación acotada, porque solamente respecto a las funciones de variación acotada tomada como función de medida generalizada tiene sentido el hablar de integral de Stieltjes, si queremos que dicha medida generalizada $\phi(x)$ cumpla la condición de aditividad completa (Ch. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire, 2. éd. Paris, (1934), p. 105).

Dada la cuestión propuesta, se ha restringido también el análisis al caso en que $\phi(x)$ tenga derivada *finita* $\phi'(x)$ en cada punto, porque si admitimos simplemente la existencia de la derivada única $\psi'(x)$ finita o infinita, aparece una función de singularidades, no cumpliéndose entonces ni el teorema directo ni el recíproco para ninguna interpretación de (1), pues en el mismo caso (4), aún cuando para $f(x)=1$ existan ambos miembros, son aquí desiguales. En efecto, basta aplicar a $\phi(x)$ la descomposición canónica de Ch. J. de la Vallée Poussin (obra citada, p. 101) por la que toda función de variación acotada se descompone unívocamente en la suma de una función absolutamente continua más una función singular (más eventualmente una función de saltos si $\phi(x)$ es discontinua) para ver que ambos miembros de (4) diferirán en el valor de dicha función singular, función singular que representa la suma algebraica de las variaciones totales no nulas de $\phi(x)$ en los dos conjuntos de puntos de medida (L) nula en que $\phi(x)$ tiene derivada única infinita, ya positiva, ya negativa.

Un ejemplo muy sencillo es el de la conocida función de M. Cantor (Acta Math., vol. IV, (1884), p. 386) definida sobre el llamado conjunto ternario de G. Cantor (Math. Annal. vol. XXI, (1883), p. 590), sustituyendo cada segmento parcial horizontal que forma la gráfica de la función por una curva de la forma de la fig. 1, para que así dicha función tenga derivada

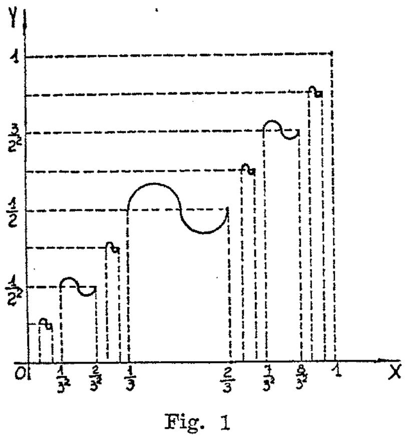

Fig. 1

(finita o infinita) en *todo* punto del intervalo $(0,1)$ y sin embargo sea

$$0=\int_0^1 \phi'(x)\,dx \neq \int_0^1 d\phi=\phi(1)-\phi(0)=1,$$

cualquiera que sea el sentido en que se tomen las integrales (R, L ó D).

El conjunto ternario de Cantor se obtiene en la siguiente forma: Dividamos el interior del intervalo $(0,1)$ del eje OX (fig. 1) en tres partes iguales y suprimamos el *interior* de la de en medio. Con las restantes operemos igual y así sucesivamente. El conjunto restante E es el llamado ternario de Cantor y es perfecto (es decir, acumulado y completo, en terminología antigua denso en sí y cerrado), no es numerable, tiene la potencia del continuo, es no-denso (todo intervalo contiene un intervalo parcial sin puntos de E) y su medida es nula:

$$m(E)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\ldots\right)=0.$$

Los intervalos suprimidos son los llamados *contiguos* al conjunto E.

Consideremos sobre el eje OY el conjunto denso (en sí y en el intervalo) y numerable formado por los puntos

$$y_i=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n} \quad \text{con} \quad a_n=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

puntos que llamaremos *nodos* y que van bisecando sucesivamente los segmentos obtenidos a partir del $(0,1)$. Definamos las funciones monótonas $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ sobre el intervalo $(0,1)$ del eje OY, tales que en los nodos valgan

$$x=\psi_1\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n(a_n+1)}{3^n}; \qquad x=\psi_2\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n}\right)=\psi_1(y_i)-\frac{1}{3^m}$$

y en los demás puntos sus valores funcionales x queden determinados por los límites de los que toman en los nodos; para estos otros puntos es

$$\psi(y)=\psi_1(y)=\psi_2(y), \qquad (y\neq y_i).$$

Se llama *intervalo reducido* $(0,1)$ el conjunto de puntos que queda al suprimir los nodos y_i de $(0,1)$; se llama *conjunto reducido* E el obtenido al suprimir de él los extremos de sus intervalos contiguos; entonces la función $\psi(y)$ define una *aplicación* del intervalo reducido $(0,1)$ sobre el conjunto «perfecto reducido» y no-denso E, llamándose la correspondencia biunívoca definida por $X=\psi(y)$ una *representación paramétrica regular* del conjunto reducido E sobre el intervalo reducido $(0,1)$.

Las funciones monótonas $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ tienen una misma función de saltos cuya suma total $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1$ es igual a la variación total de dichas funciones; también coinciden sus R-integrales.

La función

$$\begin{cases} y_i=\phi(x) & \text{para} \quad \psi_1(y_i)\geqq x\geqq\psi_2(y_i) \\ y=\phi(x) & \text{para} \quad x=\psi_1(y)=\psi_2(y) \text{ en } y\neq y_i \end{cases}$$

es la función de M. Cantor citada, la que es continua, pero no absolutamente continua, porque en el conjunto E de medida (L) nula, la oscilación vale $\phi(1)-\phi(0)=1$.

Dicha función tiene derivada nula $\phi'(x)$ en todos los puntos del conjunto complementario al E, es decir, en casi todos los puntos de su campo de definición $(0,1)$, pero *no* tiene derivada única *finita* en todos los puntos de $(0,1)$. El conjunto E es aquí el de singularidades de $\phi(x)$ y en la descomposición canónica de esta función no existe ni la componente absolutamente continua, ni la función de saltos, es decir esta $\phi(x)$ es una función singular. Esta función ha sido estudiada a fondo por E. Hille y J. D. Tamarkin (Remarks on a known example of a monotone continuous function - Amer. Math. Monthly, vol. XXXVI, (1929), p. 255).

Así pues, si en nuestro caso $\phi(x)$ es de variación acotada y $\phi'(x)$ existe y es finita (acotada o no) en cada punto, la $\phi(x)$ no tendrá componente singular, será por tanto absolutamente continua y además la L-integral indefinida de su derivada.

II

Vamos a ver primeramente que el teorema directo no se cumple para el caso

$$(2) \qquad RS\int_a^b f(x)\,d\phi(x) = R\int_a^b f(x)\,\phi'(x)\,dx,$$

es decir la existencia del primer miembro de (2) no implica, aún para $f(x)$ continua y $\phi'(x)$ acotada, la existencia del segundo miembro de (2). Obsérvese que el error en que se puede fácilmente incurrir es el de suponer implicitamente dicha existencia, ya que entonces la aplicación inmediata del teorema de los incrementos finitos

$$\phi(x_r) - \phi(x_{r-1}) = \phi'(\xi_r)\,.\,(x_r - x_{r-1})$$

asegura la validez de la igualdad (2).

En efecto, basta tomar para $\phi(x)$ el ejemplo que dió V. Volterra (Sui principii del calcolo integrale, Giorn. di Mat. Battaglini, vol. XIX, (1881), p. 335) de función continua con derivada finita *acotada* en todo el intervalo (a, b) y *no*-integrable (R). Al ser, sin embargo, esta derivada L-integrable, por la aplicación del teorema de convergencia acotada de Lebesgue la $\phi(x)$ será su L-integral indefinida (ver v. g. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable, vol I, 3. ed., Cambridge, (1927), p. 596), con lo que al ser $\phi(x)$ absolutamente continua será también de variación acotada. Así esta función $\phi(x)$ de Volterra, junto con la función continua $f(x) = 1$ dará el ejemplo más sencillo de *no* cumplimiento del teorema directo (2).

Para los que no conozcan el ejemplo de Volterra será interesante construirlo en la siguiente forma:

El conjunto ternario de Cantor era perfecto y no-denso, pero de medida nula. Consideremos en cambio el siguiente conjunto C de H. J. S. Smith (Proc. London Math. Soc. (1), vol. VI, (1875), p. 147) que es completo, no-denso y de medida *no-nula*: Dividamos el intervalo $(0,1)$ en ν partes iguales y suprimamos el interior de la primera. Cada uno de los $\nu-1$ restantes sub-intervalos se vuelve a dividir en ν^2 partes iguales, suprimiendo el interior de la primera parte de cada sub-intervalo. Las partes restantes se vuelven a dividir en ν^3 partes iguales de las que se suprimen las primeras y así sucesivamente. El completado del conjunto formado por los puntos de división (es decir, éstos y sus puntos de acumulación) forman el conjunto C de Smith. (Si hubiésemos suprimido las segundas partes en vez de las primeras se obtendría un conjunto perfecto). Los segmentos suprimidos después de k operaciones tienen longitud total

$$\frac{1}{\nu}+\frac{\nu-1}{\nu^3}+\frac{(\nu-1)(\nu^2-1)}{\nu^6}+\ldots+\frac{(\nu-1)(\nu^2-1)\ldots(\nu^{k-1}-1)}{\nu^{1/2\,k\,(k+1)}}$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\nu^k}\right),$$

que tiene por límite $1-\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^k}\right)$. Por tanto la medida del conjunto C es $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^k}\right)$ valor situado entre 0 y 1, según sea ν. Para ν suficientemente grande, dicha medida se acerca a 1 tanto como queramos. (Para $\nu=2$ el Sr. A. J. Guarnieri ha calculado que la medida del conjunto C definido en $(0,1)$ es 0'28878 con todas sus cifras exactas, al convertirse el producto infinito $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ en la serie alternada rápidamente convergente

$$\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{(2^2-1)(2^3-1)}+\frac{1}{(2^2-1)(2^3-1)(2^4-1)}-+\ldots).$$

Tomemos sobre cada intervalo (α, β) contiguo al conjunto C la función

$$F(x, \alpha) = (x-\alpha)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x-\alpha}, \qquad F(\alpha, \alpha) = 0.$$

siendo por tanto

$$F'(x, \alpha) = 2(x-\alpha) \operatorname{sen} \frac{\pi}{x-\alpha} - \pi \cos \frac{\pi}{x-\alpha}, \qquad (x \neq \alpha).$$

La función $F'(x, \alpha)$ se anula en infinitos puntos de (α, β) y sea $\alpha+\gamma$ el mayor valor de x no superior a $\frac{\alpha+\beta}{2}$ en el cual es nula $F'(x, \alpha)$. Definamos ahora la función $\phi(x)$ en tal forma que sea $\phi(x)=0$ en los puntos del conjunto C; en cada intervalo (α, β) contiguo a C, sea $\phi(x)=F(x, \alpha)$ para $\alpha \leqq x \leqq \alpha+\gamma$, $\phi(x)=F(\alpha+\gamma, \alpha)$ para $\alpha+\gamma \leqq x \leqq \beta-\gamma$ y $\phi(x)= -F(x, \beta)$ para $\beta-\gamma \leqq x \leqq \beta$. (En la fig. 2 se ha tomado

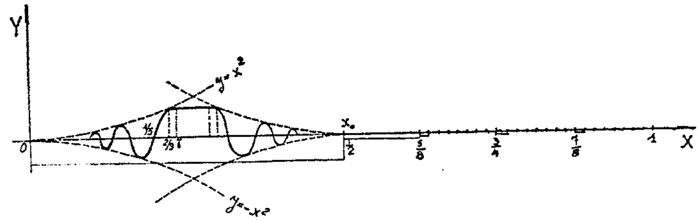

Fig 2

$\nu=2$ y se ha representado $\phi(x)$ en $(0, {}^1/_2)$; el proceso de formación de C se ha llevado hasta $k=3$). La función $\phi(x)$ es continua y tiene en todo punto derivada finita acotada en $(0, 1)$. En los puntos x_0 del conjunto C su derivada $\phi'(x_0)$ es nula ya que el cociente incremental es nulo si x_0+h pertenece a C y si en cambio x_0+h pertenece a un intervalo contiguo a C el cociente incremental no supera en valor absoluto a

$$\left|\frac{\phi(x_0+h)}{h}\right| \leqq \frac{(x_0+h-\alpha)^2}{|h|} \leqq |h|,$$

en que α es el extremo del intervalo contiguo que está en (x_0, x_0+h). La función $\phi'(x)$ tiene una discontinuidad en cada punto de C con oscilación no menor que la de $F'(x,\alpha)$ en $x=\alpha$, es decir, no inferior a 2π; por tener C medida (L) no-nula, la $\phi'(x)$, determinada, finita y acotada en $(0,1)$ no será R-integrable.

Obsérvese que el ejemplo clásico de H. Lebesgue (Annali di Mat. (3) vol. VII, (1902), p. 270)

$$\phi(x)=x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x^2}, \qquad \phi(0)=0,$$

con derivada finita en todo punto del intervalo completo $(0,1)$ y nula en $x=0$, sin que $\phi'(x)$ sea L-integrable y que suele citarse para justificar la introducción de la integral de Denjoy, no nos sirve para nuestro caso, porque esta $\phi(x)$ no es de variación acotada en $(0,1)$. (Si lo fuese, al no existir ni la función de singularidades, ni la función de saltos, por ser la función dada continua y su derivada finita, esta sería L-integrable).

El otro ejemplo dado por H. Lebesgue

$$\phi(x)=x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}, \qquad \phi(0)=0,$$

tampoco es de variación acotada, aparte de que aún siendo continua no tiene derivada en $x=0$.

Es natural que la función de Volterra sea de variación acotada por estar construida a base de la función

$$F(x)=x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}, \qquad F(0)=0,$$

la que se comprueba fácilmente es de variación acotada.

El teorema recíproco tampoco se cumple en general para cualquier función $f(x)$ acotada tomada en (2); por las otras conclusiones anticipadas sabemos hemos de buscar el ejemplo que justifique la anterior afirmación entre las $f(x)$ que no sean R-integrables y las $\phi(x)$ que tengan derivada no-integrable (R); lo construiremos sirviéndonos también del ejemplo citado de Volterra.

Sea $\nu(x)$ la función de Volterra con derivada finita en cada punto y acotada en (a, b), no siendo esta derivada $\nu'(x)$ integrable (R). Sea la cota

$$K > |\nu'(x)|$$

y tomemos

$$\phi(x) = \nu(x) + 2Kx.$$

Entonces existe $\phi'(x)$ en cada punto de (a, b), no es R-ingrable y cumple

$$K < \phi'(x) < 3K.$$

Tomemos

$$f(x) = [\phi'(x)]^{-1}.$$

Esta función es acotada y cumple

$$\frac{1}{3K} < f(x) < \frac{1}{K},$$

siendo por tanto discontinua en los mismos puntos que $\phi'(x)$.

La condición necesaria y suficiente para que exista el primer miembro de (2) para $f(x)$ acotada y $\phi(x)$ *absolutamente continua* es que $f(x)$ sea continua en *casi* todos los puntos en que $\phi'(x) \neq 0$ (Ver v. g. S. Saks, Théorie de l'intégrale, Warzawa, (1933), Cap. V, Teor. 19). En nuestro ejemplo, al no ser $f(x)$ continua en casi todos los puntos en que $\phi'(x) \neq 0$, no existirá el primer miembro de (2) y en cambio existe el segundo y vale $b - a$, con lo que queda probada la *no* validez en general del teorema recíproco (2).

III.

W. H. Young (Proc. London Math. Soc. (2), vol. XIII, (1913), p. 133) ha demostrado que para $f(x)$ acotada y $\phi(x)$ de variación acotada en (a, b), la condición necesaria y suficiente para la existencia del primer miembro de (1) como RS-integral es que la variación de $\phi(x)$ sea nula en el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$, (es decir, pueda hacerse tan pequeña como se quiera la suma de oscilaciones de $\phi(x)$ correspondientes a los intervalos de una sucesión finita o infinita numerable de ellos convenientemente elegida que cubra el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$). En este teorema para que la condición sea necesaria se ha de tomar la RS-integral en sentido restringido, es decir, como límite de sumas tomadas a lo Riemann, pues es sabido que para la integral de Stieltjes el método de sumación de Darboux, (es decir, considerando los *extremos* de $f(x)$ en los sub-intervalos de cada partición de Jordan en vez de valores *intermedios cualesquiera*) da una RS-integral más general (definida por la coincidencia de las integrales superior e inferior de Darboux) que puede existir aún teniendo $f(x)$ y $\phi(x)$ un punto de discontinuidad común, si ambas son continuas en lados distintos de dicho punto (S. Pollard, Quarterly Journal of Math., vol. XLIX, (1923), p. 137).

Pero aún para esta RS-integral más general la condición de Young será suficiente para su existencia y en particular lo será para el caso en que se suponga $\phi(x)$ absolutamente continua, como ocurre en nuestra cuestión y en la que el primer miembro de (2), si existe en sentido general, también existe en sentido restringido; el teorema de Young se convierte entonces en el contenido en la obra de Saks citado anteriormente.

Para $f(x)$ integrable (R), se cumplirá el teorema *recíproco* (2), pues entonces existirá el primer miembro de (2) al ser de medida (L) nula el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$ y será igual al segundo (*supuesto existente*).

Observaremos que H. Lebesgue en sus conocidas «Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives» (2ª. éd., Paris, (1928)) introduce la RS-integral en sentido restringido (p. 271) sirviéndose de las integrales superior e inferior de Darboux, pero haciendo notar que para la convergencia de las sumas de Riemann se ha de cumplir (p. 276) una condición necesaria y suficiente (equivalente a la dada por el teorema de Young) que enuncia valiéndose del concepto de grupo integrable debido a P. Du Bois Reymond, con la salvedad en este caso de llamar grupo integrable respecto a $\phi(x)$ a todo conjunto de puntos que pueda estar contenido en el *interior* de intervalos (es decir en intervalos *abiertos*) en número finito respecto a los cuales la suma de oscilaciones correspondientes de $\phi(x)$ sea tan pequeña como se quiera. La condición necesaria y suficiente de integrabilidad (RS) es así la de que el conjunto de puntos en los que $f(x)$ tenga una discontinuidad mayor o igual a ε, sea para cualquier $\varepsilon > 0$, un grupo integrable respecto a $\phi(x)$. Con la palabra *interior* excluye los puntos en que $\phi(x)$ es discontinua, pues cada uno de ellos (aún presentándose aislados) no forma grupo integrable; así si $f(x)$ y $\phi(x)$ tienen un punto de discontinuidad común no podrá existir la RS-integral en este sentido restringido.

J. M. Whittaker (Proc. London Math. Soc. (2), vol. XXV, (1926), p. 213) ha probado la validez del teorema directo y recíproco (2) para $f(x)$ acotada y $\phi'(x)$ *no-negativa* y R-integrable. El teorema de J. M. Whittaker, del cual E. W. Hobson (obra citada, vol. I, p. 555) da otra demostración dice así:

Si $\phi_1(x)$ $(\geqq 0)$ es R-integrable en (a, b) y $f(x)$ es acotada en dicho intervalo, para la función monótona

$$\phi(x) = R\int_a^x \phi_1(x)\,dx \tag{5}$$

es válida la igualdad (2) siempre y cuando uno u otro de ambos miembros de (2) exista, tomando el primero *en sentido general.*

Respecto a este teorema hemos de observar que siendo $\phi(x)$ (absolutamente) continua, la RS-integral del primer miembro de (2), cuando exista en sentido general, existirá *también en sentido restringido,* y que la restricción de suponer $\phi_1(x) \geqq 0$ *es innecesaria*. En efecto, si $\phi_1(x) \gtreqless 0$ es R-integrable y $f(x)$ acotada en (a, b), definamos

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{|\phi_1(x)| + \phi_1(x)}{2} \\ \gamma_1(x) &= \frac{|\phi_1(x)| - \phi_1(x)}{2} \end{aligned}\right\} \phi_1(x) = \psi_1(x) - \gamma_1(x);$$

$$\phi(x)=\int_a^x \phi_1(x)\,dx;\quad \psi(x)=\int_a^x \psi_1(x)\,dx;\quad \gamma_1(x)=\int_a^x \gamma_1(x)\,dx,$$

y entonces al ser (Ver v. g. E. W. Hobson, obra citada, p. 539)

$$RS\int_a^b f(x)\,d\phi = RS\int_a^b f(x)\,d\psi - RS\int_a^b f(x)\,d\gamma,$$

el teorema de J. M. Whittaker subsiste para esta $\phi_1(x) \gtreqless 0$.

Esto también lo deducimos del teorema citado por S. Saks (obra citada, Cap. V, Teor. 19) en forma mucho más rápida y completa de como lo hacen J. M. Whittaker y E. W. Hobson. En efecto, los puntos de continuidad de $f(x)\,\phi'(x)$ en que $\phi'(x) \neq 0$ sea continua, son también puntos de continuidad de $f(x)$, es decir si existe el segundo miembro de (2) existirá el primero y recíprocamente los puntos en que $\phi'(x)$ sea continua e igual a cero, la $f(x)\,\phi'(x)$ será continua (se supone que $f(x)$ está acotada) y por tanto si existe el primer miembro de (2) existirá el segundo (supuesta $\phi'(x)$ integrable (R)); la igualdad de ambos miembros de (2) es entonces una consecuencia inmediata del teorema de los incrementos finitos.

Observemos que $\phi_1(x)$ y $\phi'(x)$ sólo pueden diferir en un conjunto de medida (L) nula y que es indiferente escribir una u otra función en el segundo miembro de (2).

Así, pues, podemos afirmar que tanto el teorema directo como el recíproco (2) se cumplen supuestas $\phi'(x)$ integrable (R) y $f(x)$ acotada en (a, b).

IV

El teorema directo

$$RS\int_a^b f(x)\,d\phi(x) = L\int_a^b f(x)\,\phi'(x)\,dx, \tag{3}$$

válido para toda $f(x)$ acotada, es el teorema más conocido que suelen incluir todos los textos que tratan correctamente esta cuestión. (Ver v. g. H. Lebesgue, obra citada, p. 258 o S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, (1932), p. 63, enunciados sólo para $f(x)$ continua, y S. Saks, obra citada, Cap. V, teor. 19, enunciado para $f(x)$ acotada cualquiera.).

Así pues, si existe el primer miembro de (3) para una $\phi(x)$ de variación acotada y con derivada finita en todo punto de (a, b) y para $f(x)$ acotada, entonces existe el segundo miembro de (3) y esta igualdad es válida.

En cambio, el teorema recíproco (3) no se cumple, pues para verlo basta tomar $\phi(x)=x$; entonces, para cualquier $f(x)$ integrable (L), pero no integrable (R), existirá el segundo miembro de (3) y no el primero.

Es pertinente observar que para las $f(x)$ no-acotadas es posible definir una RS-integral generalizada, condicionalmente convergente en el sentido de Cauchy y respecto a la cual tampoco se verificará el teorema directo, ya que el mismo caso $\phi(x)=x$ hace ver puede existir el primer miembro de (3) y no el segundo, siempre absolutamente convergente.

V

En el caso

$$LS\int_a^b f(x)\,d\phi(x)=L\int_a^b f(x)\,\phi'(x)\,dx, \tag{4}$$

los teoremas directo y recíproco son válidos, es decir la igualdad (4) es cierta para toda $f(x)$ si uno u otro de ambos miembros existen, como consecuencia de teoremas conocidos, pero en los que nos detendremos especialmente para poder incluir unas cuantas observaciones y complementos que creemos nuevos e interesantes.

Recordemos que supuesta $\phi(x)$ acotada y monótona no-decreciente (lo que como veremos, no quita generalidad al concepto), acaso la forma más elemental de introducir la integral de Lebesgue-Stieltjes consiste en hacer corresponder a un punto x de continuidad de $\phi(x)$ el punto $\xi = \phi(x)$ y a un punto x' de discontinuidad de $\phi(x)$ todo el intervalo *completo* $(\phi(x'-0),\ \phi(x'+0))$; entonces se dice que un conjunto de las x es medible (ϕ), si su correspondiente de las ξ es medible (L). Desde luego corresponde siempre a un conjunto medible (B) de las x un conjunto medible (B) de las ξ; pero además en nuestro caso al ser $\phi(x)$ absolutamente continua, todo conjunto medible (L) de las x será medible (ϕ), lo que puede no ocurrir en general.

Haciendo

$$F(\xi) = F(\phi(x)) = f(x),$$

si existe el primer miembro de

$$L\int_{\alpha}^{\beta} F(\xi)\, d\xi = LS\int_{a}^{b} f(x)\, d\phi(x) \tag{6}$$

con $\alpha = \phi(a), \beta = \phi(b)$, se dice existe con igual valor el segundo en el sentido de Lebesgue. (Ver v. g. E. W. Hobson, obra citada, vol. 1, p. 662; a este respecto observaremos un pequeño error contenido en dicha obra al afirmar en la p.

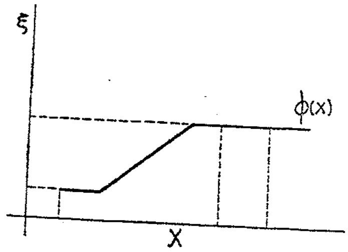

Fig. 3

341 que a un intervalo abierto de las x corresponde siempre un intervalo abierto de las ξ; esto es cierto sólo si $\xi = \phi(x)$ es propiamente monótona, es decir $\phi(x_1) < \phi(x_2)$ para todo par $x_1 < x_2$; en otro caso la fig. 3 hace ver que a intervalos abiertos de las x pueden corresponder intervalos completos de las ξ;

claro está que asimilando los puntos aislados a intervalos completos, a un intervalo abierto de las x corresponderá una suma de a lo más tres intervalos (abiertos o completos) de las ξ y esto basta para que todo conjunto medible (B) de las x corresponda un conjunto medible (B) de las ξ, con las demás conclusiones contenidas en el texto de Hobson).

T. H. Hildebrandt (On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals, Bull. Amer. Math. Soc. (2), vol. XXIV, (1918), p. 198) ha aplicado a la integral de Stieltjes el procedimiento de sumación de W. H. Young (On the general theory of integration, Phil. Trans., vol. CCIV, (1905), p. 221; Proc. London Math. Soc. (2), vol. II, (1905), p. 52) para definir la integral de Lebesgue y que, paralelamente a lo que ocurre en la partición riemanniana, da una *HLS*-integral más general que la *LS*-integral antes considerada. Así, dividido (a, b) en un número finito o infinito numerable de partes e_n sobre las que $\phi(x)$ sea medible con variación δ_n y siendo M_n y m_n los extremos de $f(x)$ en ellos, los extremos inferior y superior respectivamente de las sumas $\Sigma M_n \delta_n$, $\Sigma m_n \delta_n$ para todos los modos de sub-división de (a, b) en partes e_n *medibles* (B), definen, cuando coinciden, la *HLS*-integral de $f(x)$ respecto a la $\phi(x)$.

Esta *HLS*-integral existe siempre para toda $f(x)$ integrable (L), aún cuando puede hacerse infinita. En nuestro caso, supuesta $\phi(x)$ absolutamente continua, si existe la *HLS*-integral, también existirá en el sentido restringido (LS). Sin embargo conviene hacer notar que limitando el significado «integrable» al caso en que la sumación tiende a un valor *finito*, una nueva medida (ϕ) dada por una función absolutamente continua $\phi(x)$, si bien conserva la mensurabilidad (L), puede no conservar la integrabilidad (L).

Un ejemplo muy sencillo es el siguiente:

Sea la función

$$\phi(0) = 0; \quad \phi(x) = x^{3/2} \operatorname{sen} \pi/x, \qquad (x \neq 0),$$

que es de variación acotada con derivada finita en todo punto de $(0, 1)$:

$$\phi'(0) = 0; \qquad \phi'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \operatorname{sen} \pi/x - \pi x^{-1/2} \cos \pi/x \qquad (x \neq 0).$$

Teniendo en cuenta que para

$$\frac{4n-1}{4}\pi < \frac{\pi}{x} < \frac{4n+1}{4}\pi \qquad \text{es} \qquad \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| > \frac{1}{2}$$

y para $x < \frac{1}{9}$ es $\left|\frac{3}{2}x^{1/2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right| < \frac{1}{2}$, podremos establecer que en los intervalos

$$e_n = \left(\frac{4}{4n+1} < x < \frac{4}{4n-1}\right)$$

de amplitud $\frac{8}{16n^2-1}$, es para $n > 10$,

$$\pi\sqrt{4n+1} > |\phi'(x)| > \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{4n-1}}{2}; \qquad (-1)^{n+1}\phi'(x) > 0.$$

Formemos la función

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}\dfrac{16n^2-1}{8}(4n-1)^{-3/2} & \text{en los intervalos } e_n, \\ 0 & \text{en lo restante.} \end{cases}$$

Esta función, aun cuando no acotada, es L-integrable, por ser convergente la serie $\Sigma(4n-1)^{-3/2}$. En cambio el producto $f(x)\,\phi'(x)$ no es L-integrable, por ser divergente la serie $\Sigma(4n-1)^{-1/2}$, y en virtud de la validez del teorema directo (4), la $f(x)$ no será LS-integrable.

Este ejemplo es un caso particular de la posibilidad ya observada por H. Lebesgue (Annales de Toulouse (3), vol. I, (1909), p. 38) de que el producto de dos funciones L-integrables puede no ser L-integrable.

El teorema directo (4) para $\phi(x)$ *monótona* es consecuencia directa del teorema del cambio de variable de H. Lebesgue

(Ann. Toulouse (3), vol. I, (1909), p. 44) que asegura la validez de

$$(7) \qquad L\int_{\alpha}^{\xi} F(\xi)\, d\xi = L\int_{a}^{x} f(x)\, \phi_1(x)\, dx$$

cuando existe el primer miembro y es monótona y existe

$$\phi(x) = \alpha + L\int_{a}^{x} \phi_1(x)\, dx \qquad \text{con} \qquad F(\phi(x)) = f(x);$$

un proceso análogo al que hemos aplicado para generalizar el teorema de J. M. Whittaker permite demostrar el teorema directo (4) para una $\phi(x)$ de variación acotada y absolutamente continua cualquiera (ver v. g. E. W. Hobson, obra citada, vol. I, p. 655).

El teorema recíproco (4) es consecuencia del teorema de la Ch. J. de la Vallée Poussin (Trans. Amer. Math. Soc., vol. XVI, (1915), p. 441) que afirma subsiste (7) si existe su segundo miembro para una $\phi(x)$ absolutamente continua (aún cuando no sea monótona).

Una función

$$H(\xi) = L\int_{\alpha}^{\xi} F(\xi)\, d\xi$$

puede ser absolutamente continua, serlo también $\xi = \phi(x)$ y en cambio no conservarse absolutamente continua la $H[\phi(x)]$, observación que como dice Ch. J. de la Vallée Poussin en su memoria arriba citada, le fué hecha por Dunham Jackson. Esta sorprendente no-conservación se debe a que la condición de absoluta continuidad (ver v. g. E. W. Hobson, obra citada, vol. I, p. 291) se refiere a intervalos *no-rampantes* y al pasar por medio de $\xi = \phi(x)$ de las x a las ξ, los valores de $\phi(x)$ pueden caer *intercalados* en tal forma que respecto a ellos ya no se verifique la condición de absoluta continuidad de $H(\xi)$.

En cambio si $H(\xi)$ y $\xi=\phi(x)$ son absolutamente continuas y además $\phi(x)$ es *monótona*, se ve directamente en forma inmediata que $H[\phi(x)]$ es función absolutamente continua de x, pues aquella intercalación ya no es posible. De ahí el porqué se exige en el teorema del cambio de variable sea $\phi(x)$ monótona, condición que puede sustituirse por la más general de ser $H[\phi(x)]$ absolutamente continua, como ha hecho Ch. J. de la Vallée Poussin en la memoria arriba citada.

G. H. Fichtenholz (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, (1922), nº. 6, 7, p. 430) ha demostrado que la condición necesaria y suficiente para que $H[\phi(x)]$ sea absolutamente continua es que lo sean $H(\xi)$ y $\phi(x)$ y además que $H[\phi(x)]$ sea de variación acotada.

De la necesidad de esa condición deducimos que la absoluta continuidad se conserva en sentido inverso (lo que a primera vista parece menos evidente que la conservación fallida en sentido directo), es decir, si $H[\phi(x)]$ como función de x es absolutamente continua (y por tanto de variación acotada) y $\xi=\phi(x)$ es absolutamente continua, entonces $H(\xi)$ como función de ξ es también absolutamente continua, lo que por otra parte será consecuencia inmediata del teorema recíproco (4).

Dicho teorema recíproco (4) puede también deducirse directamente del concepto de *LS*-integral aplicando las condiciones necesarias y suficientes que da H. Lebesgue en sus citadas «Leçons sur l'intégration» (p. 288) para que una función $G(x)$ sea una *LS*-integral indefinida respecto a una función de variación acotada $\phi(x)$ como función de medida (ϕ), y que son: 1) $G(x)$ es de variación acotada; 2) en todo punto los saltos a la derecha y a la izquierda de $G(x)$ son proporcionales a los de $\phi(x)$; 3) puede hacerse tan pequeña como se quiera la suma de los valores absolutos de los incrementos de $G(x)$ extendida a un conjunto cualquiera de intervalos abiertos que en total tengan medida (ϕ) suficientemente pequeña.

Para nuestro caso, la función supuesta existente

$$G(x)=L\int_a^x f(x)\,\phi'(x)\,dx,$$

al ser absolutamente continua con $\phi(x)$, cumple dichas tres condiciones y puede escribirse

$$G(x) = LS\int_a^x g(x)\, d\phi(x).$$

(Obsérvese que la verificación de la tercera condición de Lebesgue no es inmediata, sino consecuencia del teorema citado de G. H. Fichtenholz sobre la conservación de la absoluta continuidad en sentido inverso). Por cumplirse el teorema fundamental del cálculo integral respecto a la medida (ϕ), (H. Lebesgue, obra citada, p. 301), es

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{\phi(x+h)-\phi(x)} = g(x),$$

salvo en un conjunto de medida (ϕ) nula. Por otra parte, dadas las condiciones en que estudiamos (1), al ser

$$\phi(x+h) - \phi(x) = h\,\phi'(x+\vartheta h), \quad (0<\vartheta<1),$$

podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \phi'(x+\vartheta h) = \phi'(x);$$

con la observación de que el anterior paso al límite del valor *intermedio* $\phi'(x+\vartheta h)$ no significa sea $\phi'(x)$ continua; lo será si además el

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \phi'(x)$$

converge *uniformemente* respecto a x.

De ahí y de la aplicación del teorema fundamental del cálculo integral al segundo miembro de (4), se deduce

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{\phi(x+h)-\phi(x)} = G'(x) \frac{1}{\phi'(x)} = f(x),$$

salvo para $\phi'(x)=0$ y para un conjunto de medida (L) nula que es también conjunto de medida (ϕ) nula, por ser $\phi(x)$ absolutamente continua; en un conjunto de medida (ϕ) nula están comprendidos los puntos para los que $\phi'(x)=0$. Por tanto la función $G(x)$ coincide con el primer miembro de (4) y el teorema recíproco (4) queda demostrado.

VI

La conservación de la absoluta continuidad para $\phi(x)$ *monótona,* consecuencia inmediata de su definición, nos puede dar una demostración sencillísima (aunque empleando el concepto de LS-integral) del teorema sobre cambio de variable (7) de Lebesgue; la demostración que suelen traer los textos es muy complicada, aún simplificándola para $F(\xi)$ no-acotada por medio de un conocido teorema de convergencia de Beppo Levi (Rend. dell'Istit. Lombardo (2), vol. XXXIX, (1906), p. 775).

En efecto, por suponer existe el primer miembro de (7), que entonces será función absolutamente continua de ξ y ser $\phi(x)$ *monótona* y absolutamente continua, se deduce directamente de la definición de continuidad absoluta que el primer miembro de

$$L\int_{a}^{\Phi(x)} F(\xi)\, d\xi = L\int_{a}^{x} g(x)\, dx$$

es función absolutamente continua en x y por tanto podrá escribirse en la forma expresada por el segundo miembro.

Salvo en un conjunto de medida (ϕ) nula, el primer miembro de la igualdad anterior tiene por derivada respecto a la medida (ϕ) a $F(\xi)=f(x)$ y salvo en un conjunto de medida (L) nula, que es también de medida (ϕ) nula por ser $\phi(x)$ absolutamente continua, la derivada $\phi'(x)$ de $\phi(x)$ existe y y es igual a $\phi_1(x)$. Por tanto, salvo en un conjunto de medida (ϕ) nula, aplicando la regla de derivación de función de función, es:

$$g(x)=f(x)\,.\,\phi'(x). \tag{8}$$

Todo esto ya queda observado en la excelente obra de E. C. Titchmarsh «The theory of functions» (Oxford, 1932, p. 378), pero añade que la dificultad está en que para (8) el conjunto excepcional de medida (ϕ) nula, no es necesariamente un conjunto de medida (L) nula (ni siquiera se sabe si es medible (L)), por lo que renuncia a seguir este camino y recurre a la demostración clásica del teorema del cambio de variable.

Aquella dificultad queda sin embargo salvada sin más que observar que los puntos de medida (ϕ) nula son los compuestos por los de medida (L) nula y por los puntos en que $\phi'(x)=0$, por lo que en virtud de (8) existirá el segundo miembro de (7) y será igual al primero. En efecto, los conjuntos E de *medida exterior* (L) positiva en los que $\phi'(x)>0$ no pueden ser de medida (ϕ) nula. Dada la sucesión monótona de números positivos $\varepsilon_n \to 0$, basta descomponer

$$E=E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots$$

en conjuntos E_n tales que en E_n sea $\phi'(x)>\varepsilon_n$. Por ser la medida exterior (L) de E no mayor que la suma de medidas exteriores de los E_n hay algún E_ν con medida m_ν exterior (L) positiva y podemos encerrar cada punto x de E_ν en un intervalo $(x-h_2,\ x+h_1)$ tal que en él, al existir $\phi'(x)>\varepsilon_\nu$, sea

$$\phi(x+h_1)-\phi(x-h_2)=\phi(x+h_1)-\phi(x)+$$
$$\phi(x)-\phi(x-h_2)>\frac{1}{2}\,\varepsilon_\nu\,(h_1+h_2).$$

Esto nos dice que la medida (ϕ) de E, no menor que la de E_ν, (la medida (ϕ) es completamente aditiva) será mayor o igual a $\frac{1}{2}\,\varepsilon_\nu\,m_\nu>0$, es decir, no nula.

Obsérvese que este razonamiento en el *caso particular* de considerar conjuntos medibles (ϕ) que a más sean medibles (L), es equivalente a dar la medida (ϕ) de E por medio de la integral

$$L\int_E \phi'(x)\,dx$$

y recordar que si la medida (L) de E es mayor que cero y $\phi'(x) \geqq 0$, sólo se anula la integral, si $\phi'(x)$ se anula en casi todo punto de E.

Finalmente diremos que el citado teorema de cambio de variable, enunciado como teorema de cambio de medida, está incluído con máxima generalidad en la edición inglesa de la obra citada de S. Saks (Theory of the integral, 2ed. rev. ed., Warzawa - New York, (1937), Cap. I, Teor. 15).

BIBLIOGRAFIA CITADA

S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, (1932).

G. CANTOR, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Annalen, vol. XXI, (1883), p. 590.

G. CANTOR, *De la puissance des ensembles parfaits de ponts.* Acta Math., vol. IV, (1884), p. 386.

P. DIENES, *The Taylor series*, Oxford, (1931).

G. H. FICHTENHOLZ, *Bull. de l' Acad. roy. de Belgique*, (1922), nº 6, 7, p. 430.

T. H. HILDEBRANDT, *On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. (2), vol. XXIV, (1918), p. 198.

E. HILLE y J. D. TAMARKIN, *Remarks on a known example of a monotone continuos function*, American Math. Monthly, vol. XXXVI, (1929), p. 255.

E. W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, vol. I, 3ed., (1927), vol. II, 2 ed., (1926), Cambridge.

H. LEBESGUE, *Annali di Mat.* (3), vol. VII, (1902), p. 270.

H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières*, Ann. Fac. des Sci. de Toulouse (3), vol. I, (1909), p. 25.

H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2º éd., Paris, (1928).

BEPPO LEVI,*Sopra l'integrazione delle serie.* Rend dell' Istit. Lombardo (2), vol. XXXIX, (1906), p. 775.

S. POLLARD, *Quarterly Journal of Math.*, vol. XLIX, (1923), p. 137.

S. Saks, *Théorie de l' intégrale*, Warzawa, (1933).

S. Saks, *Theory of the integral*, 2º rev. ed., Warzawa-New York, (1937).

H. J. S. Smith, *Proc. London Math. Soc.* (I), vol. VI, (1875), p. 147.

E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford, (1932).

Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l' intégrale de Lebesgue*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. XVI, (1915), p. 441.

Ch. J. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d' ensemble, Classes de Baire*, 2º éd., Paris (1934).

V. Volterra, *Sui principii del calcolo integrale*, Giorn. Mat. di Battaglini, vol. XIX, (1881), p. 335.

J. M. Whittaker, *Proc. London Math. Soc.* (2), vol. XXV. (1926), p. 213.

W. H. Young, *On the general theory of integration*, Phil. Trans., vol. CCIV, (1905), p. 221; Proc. London Math. Soc. (2), vol. II, (1905), p. 52.

W. H. Young, *Integration with respect to a function of bounded variation*, Proc. London Math. Soc. (2), vol. XIII, (1923), p. 133.