REMARQUES SUR LE CAS PARABOLIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par

J. Hadamard

École Libre des Hautes Études

Columbia University. New-York N. Y.

Les travaux publiés dans ces dernières années permettent d'étendre aux équations du type parabolique, particulierement à l'équation de la chaleur

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

une série de méthodes et de résultats précédemment obtenus relativement à l'équation classique des potentiels.

1. Une des questions que j'avais étudiées relativement à cette dernière était celle de la possibilité du problème de Cauchy a partir de $x=0$, problème consistant à déterminer une solution de l'équation par la connaissance, pour $x=0$, de l'inconnue et de sa dérivée partielle par rapport à x.

L'équation (e) pose un problème tout semblable, la détermination d'une solution par les conditions de Cauchy

$$u(0, y) = g(y), \ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y).$$

Il est connu que ce problème, toujours possible et déterminé (en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewski et du beau théorème de M. Holmgren) lorsque les données $g(y)$ et $h(y)$ sont holomorphes, cesse, en général, d'être possible lorsque cette hypothèse n'est pas faite: les conditions précises de possibilité ont donné lieu à un brillant résultat de M. Holmgren, complété ensuite par les belles études de M. Gevrey.

Mais, pour que le problème de Cauchy en question soit «correctement posé», il faudrait, non seulement qu'il soit possible et determiné sous de certaines conditions de regularité simples, mais encore [1] que la solution dépende continument des données au sens du Calcul fonctionnel, soit que cette continuité soit d'ordre zéro, soit qu'elle soit tout au moins d'un ordre determiné p.

Cette condition n'est pas remplie plus que la première pour le problème de Cauchy relatif à (e). Ceci est, si l'on veut, évident indirectement: car si la solution, d'existence certaine dans le cas analytique, était continue d'ordre p par rapport aux données $g(y)$, $h(y)$, on pourrait tout d'abord remplacer celles-ci par des polynômes d'approximation g_n, h_n et cela [2] de manière que le voisinage entre g et g_n (cette dernière fonction étant continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p) et, de même, entre h et h_n, soit un voisinage d'ordre p; et, passant à la limite, ce qui est supposé possible en vertu de la continuité, il en résulterait l'existence de la solution pour les données arbitraires g, h. Mais il n'est pas sans interêt de former un exemple précis où cette continuité n'ait pas lieu: autrement dit, un exemple de données numériquement très petites ainsi que leurs derivées jusqu'à l'ordre p, par ailleurs holomorphes, donnant lieu à une solution numériquement très grande pour toute valeur déterminée de x différente de 0. C'est à quoi l'on arrive pour (e) en recourant au type le plus simple de solution, savoir

$$Ae^{\lambda x+\lambda^2 y}, \tag{1}$$

A et λ étant deux constantes arbitraires. Prenons $\lambda=n(1+i)=n\sqrt{2i}$. en désignant par n un paramètre réel auquel nous donnerons

(1) Cette condition ne figurait pas dans notre ancienne définition du probleme correctement posé; elle a été introduite par MM. Hilbert et Courant, que nous suivons sur ce point.

(2) Cf. Tonelli, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* - Circ. Mat. Palermo, T. XXIX, 1910 et nos *Leçons sur le problème de Cauchy.* p. 430, Note.

de très grandes valeurs: la partie réelle de la quantité (1) est alors

$$(2) \qquad Ae^{nx}\cos(nx+2n^2y)$$

et sa dérivée par rapport a x, prise pour $x=0$,

$$nA[\cos 2n^2y - \sin 2n^2y].$$

Pour que ces deux données relatives a $x=0$ soient très petites il suffit de choisir $A=A_n$ tel que nA_n tende vers 0 avec $1/n$ et il en sera de même pour les dérivées jusqu'à l'ordre p si le produit $n^{1+2p}A_n$ est lui-même infinitement petit. Mais ceci n'est nullement incompatible avec le fait que le produit $A_ne^{nx_0}$ augmente indéfiniment avec n, en désignant par x_0 n'importe quelle valeur de x différente de 0: moyennant quoi, la quantité $u(x_0, y)$ donnée par (2) sera très grande (sauf pour les valeurs de y qui rendent le facteur trigonometrique très petit).

On peut encore, si l'on veut, obtenir des valeurs très grandes de $u(x_0, y)$ avec des données nulles pour g et très petites pour h, ou inversement: il suffit de combiner l'expression (2) par addition ou soustraction, avec celle qu'on en déduit en changeant n en $-n$. Pour $x=0$, l'exponentielle fonction de x est alors remplacée par un sinus ou un cosinus hyperbolique.

2. Abandonnant maintenant le problème de Cauchy, revenons au problème classique qui concerne l'équation (e) ou plutot sa transformée en $v=ue^{-ky}$, savoir

$$(e_1) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial y}-kv=0.$$

Admettons donc que l'on se donne les valeurs de v le long d'un contour L satisfaisant aux conditions géométriques bien connues (contour coupé en deux points seulement par une caractéristique $y=$ const. quelconque, sauf pour la valeur minima de y, laquelle est, en général, représentée par tout un segment de caractéristique). On sait que, ces données le long de L étant supposées continues, la solution est unique [1]. Qu'arrive-t-il si.

[1] C'est, comme on sait, pour éviter une difficulté dans la démostration de ce fait qu'il est utile d'introduire le parametre k et de passer de (e) a (e_1).

a) un potentiel de double couche à densité distribuée analytiquement le long d'une courbe ou, plus généralement, d'une variété σ analytique, peut être continué analytiquement au dela de σ,

proposition démontrée par M. Bruns (Voir aussi notre *Mémoire sur les plaques élastiques encastrées*, Ac. des Sc. Paris, Mémoires des savants étrangers T. XXXIII - 1908) et de ce que

b) l'intégrale au second membre de (3) est fonction holomorphe de s, quelle que soit, sous le signe $\int$, la fonction μ,

ce dernier fait résultant de ce que le noyau $K(s, S) = \dfrac{d \log \frac{1}{r}}{dN} = \dfrac{d\vartheta}{dS}$ de l'équation intégrale (3) — où s, S désignent des abscisses curvilignes le long de la courbe; r la distance des deux points ainsi obtenus et ϑ, l'argument de la corde qui les joint — est fonction holomorphe de s et de S.

Mais ce cas de l'équation des potentiels plans est exceptionnel. Quand on passe à d'autres équations du type elliptique, la solution du problème de Dirichlet est encore représentable par une sorte de potentiel de double couche analogue a (3); mais le noyau n'est plus holomorphe; dés l'équation à deux variables analytique la plus générale, dont la solution élementaire, formée par Emile Picard, est de la forme $w + v \log \frac{1}{r}$, le noyau, holomorphe tant que $s \neq S$, contient le terme logarithmique et, dès lors [1] l'intégrale (3) n'est pas non plus holomorphe lorsqu'on

(1) Qu'une intègrale de la forme (3) ne soit pas holomorphe dans le cas géneral, c'est ce qui résulte immédiatement de ce qu'elle représente, pour μ arbitraire, n'importe quel potentiel de simple couche.

Une vérification directe s'obtient inmédiatement en prenant pour σ le cercle de rayon 1 et pour μ un développement trigonometrique $\Sigma\,(A_n \cos ns + B_n \sin ns)$. L'intégrale (3), soit

$$\int_0^{2\pi} \mu\,(S)\, \log \left| \sin \frac{S-s}{2} \right| d\,S = \int_0^{2\pi} \mu\,(s+\sigma)\, \log \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| d\,\sigma$$

aura, en s, un développement trigonométrique qui ne sera pas, en général, choisit $\mu(S)$ arbitrairement: la proposition b) n'est certaine qu'en tenant compte de ce que la fonction sous le signe $\int$ est la même que celle qui figure en dehors de ce signe, c'est à dire la solution de l'équation intégrale. Par contre, au moins pour le cas linéaire auquel nous nous bornerons ici, on peut démontrer l'analyticité de cette solution par l'emploi d'une belle méthode due à Eugenio Elia Levi (Circ. Mat. Palermo, t. XXIV, 1907, N°. 20, 24). Pour démontrer cette analyticité au voisinage d'une valeur déterminée de s, on remarque d'abord qu'on peut limiter l'intégration à un petit intervalle (α_1, α_2) contenant à son intérieur la valeur en question $(\alpha_1 = s - \varepsilon,\ \alpha_2 = s + \varepsilon)$, les termes relatifs aux intervalles restants étant sûrement holomorphes et pouvant être considérés comme joints au terme tout connu: cet intervalle (α_1, α_2) pourra évidemment être pris assez petit pour que l'intégrale $\int |K(s, S)| dS$ correspondante soit inferieure a 1, c'est à dire pour permettre la résolution de l'équation par la méthode de Liouville-Neumann. Dans ces conditions, imaginons qu'on étende la définition de la fonction μ à des valeurs complexes $s = s' + is''$ de s telles que les deux différences $s - \alpha_1$, $s - \alpha_2$ aient des arguments inférieurs en valeur absolue a une quantité donnée η. Le paramètre s ayant une telle valeur, on remplacera, dans le plan de la variable complexe S, l'intégration suivant le segment réel (α_1, α_2) par une intégration suivant la ligne brisée $\alpha_1 s \alpha_2$, en introduisant une variable réelle t par rapport à laquelle on intégrera de 0 a 1 et en fonction de laquelle S sera exprimée succesivement par chacune des deux formules

---

celui d' une fonction holomorphe, savoir

$$\sum \alpha_n (A_n \cos n s + B_n \sin n s) \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \int_0^{2\pi} \cos n\sigma \log \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma = \frac{1}{*}$$

De ce fait, une démonstration donnée par nous dans le Bull. Soc. Math. de Kazan, (fascicule consacré au centenaire de Lobatschewsky), est erronée et doit etre resplacée par le raisonnement que j'indique dans le texte.

M. Serge Bernstein (Math. Ann., t. LXII, 1906, p. 253) démontre pour l'équation générale analytique a deux variables indépendantes $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$ (en désignant par f une fonction analytique) une conclusion ressemblant au premier abord à la notre. Mais dans son hypothèse, il s'agit d'un contour fermé constitué entiérement par *une ligne analytique unique* et *tout le long de laquelle* la suite des valeurs de u est analytique au lieu que nos hypothèses sont seulement relatives à un *arc* analytique.

$$S = S' + iS'' = s + t\,(\alpha_i - s) \qquad (i = 1, 2).$$

On appliquera alors la méthode de Liouville-Neumann en partant d'une fausse position de départ quelconque (admettant partout une dérivée) que l'on prolongera dans la region ci-dessus définie du plan complexe d'une manière quelconque, à la seule condition que les dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial s'}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial s''}$ existent (par exemple en prenant $\mu(s' + is'') = \mu(s')$, quel que soit s''). La quantité $\left(\frac{\partial}{\partial s'} + i\frac{\partial}{\partial s''}\right)\mu$ sera, en général differente de 0; mais la méthode de E. E. Levi montre qu'il n'en sera pas de même lorsqu'on appliquera la même opération differentielle au résultat limite des approximations succesives, c'est à dire à la solution de l'équation intégrale.

Ceci s'applique de même aux équations à un plus grand nombre de variables independantes. Conformément à la méthode de E. E. Levi (loc. cit.), l'intervalle (α_1, α_2) sera alors remplacé par un petit cercle ou une sphère ou une hypersphère dans l'espace des variables réelles; la ligne brisée $(\alpha_1\, s\, \alpha_2)$ par une multiplicité conique $(m-1)$ fois étendue ayant cette variété sphérique pour base et le point où l'on veut calculer la solution pour sommet.

4. La méthode que nous venons d'indiquer peut-elle être étendue au cas parabolique? Bornons nous à l'équation (e) et au prolongement d'une solution de cette équation au dela d'une ligne analytique

$$L_1: \qquad x = X_1(y),$$

X_1 étant une fonction holomorphe de y. Une solution de (e) pourra être considerée comme définie par ses valeurs le long d'une caracteristique $y = a$ (celles-ci pouvant être prises nulles), le long d'un arc de L_1 et d'un arc d'une autre ligne analogue L_2 que l'on pourra prendre arbitrairement, par exemple, le long d'une parallèle à l'axe des y, $X_2(y) = \text{const.} = c > X_1(y)$ et, comme l'on fait M. Holmgren et Gevrey (1), cette quantité u sera représentable par la somme de deux intégrales étendues respectivement à deux portions des lignes L_1, L_2: moyennant quoi, on est ramené à deux équations intégrales de deuxième espèce et du type de Volterra dont les noyaux sont analytiques et absolument intégrables par rapport à Y jusqu'à la limite y.

La méthode de E. E. Levi montre encore que les fonctions qui satisfont à ces deux équations sont analytiques, la seule modification du raisonnement étant, puisque les équations sont du type de Volterra, que l'intégration dans le plan de la variable complexe y aura lieu suivant un seul segment de droite joignant le point $y=y'+iy''$ au point fixe α suffisamment rapproché de lui pour que l'intégrale $\int |K(y,Y)|dY$ correspondante soit plus petite que 1.

Mais la conclusion ainsi obtenue n'est pas suffisante puisque, nous le savons, le théorème a lieu en imposant seulement au fonctions $X_1(y)$ et $u(y)$ la condition d'être de classe deux, au lieu que nous avons été obligés de les supposer analytiques, hypothèse indispensable à notre méthode, puisque celle-ci consiste a passer aux variables complexes.

(1) HOLMGREN, Arkiv för Mat. t. t. III, nº 12, *Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra* - 1907. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*. Journal de Math. t. IX (6), 1913, p. 305 et suiv., Nº 5.