XV Encuentro de Economía Pública
Salamanca, 7 y 8 de febrero de 2008

Título de la comunicación: Familias de índices de desigualdad que caracterizan la distribución de la renta.

Luis José Imedio Olmedo

Elena Bárcena Martín

Encarnación M. Parrado Gallardo

Dpto. Estadística y Econometría

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Málaga

Resumen

Este trabajo introduce una familia de medidas de desigualdad a partir de la curva de Bonferroni, considerada como función de distribución. Esta familia, que caracteriza la distribución de la renta, fijada la renta media, presenta una evidente analogía formal con otras ya existentes. Aunque todas las familias objeto de estudio se determinan mutuamente, sus elementos incorporan juicios de valor muy dispares en la medición de la desigualdad y del bienestar. Los aspectos normativos se abordan siguiendo el enfoque de Yaari (1987, 1988). Ello permite establecer comparaciones y, en algunos casos, ordenaciones de los índices según su grado de aversión a la desigualdad, así como estudiar su comportamiento frente a diferentes Principios de Transferencias.

Palabras clave: Curva de Lorenz, curva de Bonferroni, aversión a la desigualdad.
Clasificación JEL: C10, D31, I38.

1. Introducción.

La ordenación de las distribuciones de renta, según su desigualdad relativa, mediante la relación de dominancia entre sus curvas de Lorenz es un orden parcial. Dos distribuciones no son comparables cuando sus respectivas curvas se cortan en algún punto interior del intervalo [0, 1]. Se recurre entonces a criterios de dominancia más débiles[1] o, sobre todo en el trabajo empírico, a medidas escalares de desigualdad.

Cada una de esas medidas induce una ordenación completa del espacio de distribuciones de renta admisibles, al asignar un número real, que sintetiza su nivel de desigualdad, a cada distribución. Sin embargo, índices diferentes pueden dar lugar a distintas ordenaciones, ya que cada uno de ellos incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en la distribución. Por ello, es habitual la utilización de un conjunto de índices a fin de tener en cuenta distintos juicios de valor en la medición. La posible obtención de resultados contradictorios, según el índice empleado, permite extraer conclusiones tan interesantes, según las propiedades de las diferentes medidas, como las que proporcionan los casos robustos.

Las posibilidades de elección de índices de desigualdad son muy amplias. Los más utilizados en las aplicaciones, además de las medidas estadísticas tradicionales que cuantifican la dispersión, son los índices de la familia de Atkinson (1970), los de Entropía Generalizada (Shorrocks, 1980) y los índices de Gini generalizados o S-Gini (Donaldson y Weymarck, (1980, 1983), Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)). Aunque en ocasiones se utilicen de forma conjunta índices cuyo fundamento teórico es muy dispar[2], esta forma de proceder puede dificultar la evaluación de su capacidad como medidas complementarias de desigualdad. Es conveniente disponer de familias de índices de naturaleza homogénea, que proporcionen información suficiente sobre la distribución y que, al mismo tiempo, difieran y se complementen en el ámbito normativo.

Existen varias familias de índices que cumplen las condiciones anteriores. La más conocida en la literatura es la de los Gini generalizados, ya citada. Caracterizan la curva de Lorenz y, a través de ella, determinan la distribución de la renta, dada la renta media. Para esa caracterización basta considerar la subfamilia que se obtiene para los valores enteros positivos del parámetro que interviene en su definición ((Kleiber y Kotz, 2002), (Imedio y Bárcena, 2007)). Incorporan diferentes grados de aversión a la desigualdad[3] y distintos juicios de valor en

[1] Véase, por ejemplo, Shorrocks y Foster (1987), Dardanoni y Lambert (1988) o Zoli (1999).
[2] Una práctica frecuente consiste en combinar el índice de Gini (1912) con índices de Atkinson y/o índices de entropía. En Newbery (1970) se ponen de manifiesto las diferencias, en cuanto a fundamentación, entre el índice de Gini y los de Atkinson. Por su parte, los índices de entropía proceden de la teoría de la información.
[3] Como es sabido, un índice presenta aversión a la desigualdad (o preferencia por la igualdad), si verifica el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Es decir, si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el valor del índice disminuye. Al aumentar el grado de aversión a la desigualdad, mayor es la incidencia de una transferencia de este tipo sobre el valor del índice.

la medición de la misma, presentando en este aspecto un comportamiento análogo al de los índices de Atkinson.

En Aaberge (2000) se define una familia numerable de medidas de desigualdad cuyos elementos son transformaciones lineales de los momentos, respecto del origen, de la curva de Lorenz, considerada como función de distribución (L-momentos). Estas medidas caracterizan, salvo un factor de proporcionalidad, la distribución de la renta, pero ninguna de ellas es particularmente sensible a los cambios que puedan tener lugar en la cola izquierda de la distribución (rentas bajas), presentando un grado moderado de aversión a la desigualdad. Al referirse a esa limitación, Aaberge (2007) argumenta que la convexidad de la curva de Lorenz implica que sus momentos sean más sensibles a los cambios que se producen en las rentas intermedias y altas. En ese trabajo se propone la utilización de una transformación de la curva de Lorenz, como representación gráfica de la desigualdad. Se trata de la curva de Bonferroni. Los momentos respecto a ésta última (B-momentos) dan lugar a una familia de medidas formada por los L-momentos y el índice de Bonferroni (1930). Este índice presenta una aversión a la desigualdad mayor que la del coeficiente de Gini y su uso es adecuado si el interés se centra en la cola izquierda de la distribución (Nygard y Sandström, 1981). De este modo, la nueva familia incluye un elemento que presta mayor atención al reparto existente en las rentas bajas, pero a diferencia de lo que sucede con los Gini generalizados, su espectro normativo, en cuanto al grado de aversión a la desigualdad, es limitado en el sentido de que a través de sus elementos no es posible la aproximación a la aversión máxima o leximin rawlsiano[4].

En este trabajo se introduce una nueva familia numerable de índices que también caracteriza la distribución, fijada la renta media. Sus elementos se obtienen como valores medios de funciones potenciales, considerando la curva de Bonferroni como función de distribución, de forma análoga a la que puede emplearse para construir los Gini generalizados a partir de la curva de Lorenz. El primer elemento de esta familia es el índice de Bonferroni y al ir avanzando en la sucesión, los índices correspondientes presentan una aversión creciente a la desigualdad, asignando más peso a la cola izquierda de la distribución y, en el límite, su postura frente a la desigualdad coincide con la rawlsiana.

Al estudiar esta nueva familia, sus propiedades se relacionan con las de las familias ya citadas y, en particular, con la generada por los B-momentos, tratando de establecer sus analogías y divergencias. Ambas tienen como elemento común el índice de Bonferroni y están formadas por medidas que pueden obtenerse ponderando la desigualdad local existente en cada

[4] Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Entre dos distribuciones prefiere aquella cuya renta mínima es mayor o, en caso de igualdad, aquella en que la renta mínima presente menor frecuencia. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

percentil de renta. Sus distintos esquemas de ponderación generan distintas actitudes en la valoración de la desigualdad a lo largo de la distribución.

Los aspectos normativos se abordan siguiendo el enfoque de Yaari (1987). Para cada índice se obtiene su distribución de preferencias sociales, lo que permite relacionar bienestar y desigualdad. Se establece, como consecuencia, que la unión de la nueva familia y la de los B-momentos está ordenada de forma monótona según su grado de aversión a la desigualdad y cubre todo el espectro, desde la indiferencia hasta la aversión máxima. En este aspecto su comportamiento conjunto es similar al que presentan los L-momentos y los S-Gini.

Aunque en todos los índices de las familias objeto de estudio subyace una preferencia por la igualdad y satisfacen, por lo tanto, el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD), es relevante en el ámbito normativo el análisis de la sensibilidad particular que incorporan los índices frente a las transferencias progresivas que puedan tener lugar en los diferentes tramos de la distribución. A este respecto se analizan sus respuestas frente al llamado Principio de Sensibilidad Posicional de las Transferencias (PSPT), así como frente al Principio de Transferencias Decrecientes (PTD). El cumplimiento del PSPT depende de las propiedades de la distribución de preferencias asociada a cada índice, mientras que el PTD se satisface según la relación entre dichas propiedades y las de la distribución de la renta sobre la que se aplica el índice.

El artículo sigue el siguiente esquema. En la sección segunda, se establece el marco de análisis, se comparan las curvas de Lorenz y de Bonferroni en cuanto al tipo de información que proporcionan y se hace referencia a los índices de desigualdad de uso más frecuente asociados a ellas, los coeficientes de Gini y de Bonferroni. En la sección tercera se introduce la nueva familia de índices y se relaciona con otras ya existentes en la literatura, analizando, en particular, sus analogías y diferencias con la de los B-momentos. Los aspectos normativos se abordan en la sección cuarta, previa obtención de las funciones de preferencia social. El grado de concavidad de dichas funciones determina la actitud de sus índices asociados respecto a la desigualdad. En la sección quinta se presentan algunos resultados sobre los principios de transferencias y se aplican a los elementos de las familias estudiadas. También se incluye una ilustración empírica sobre el comportamiento de los índices utilizando como fuente los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida, para el año 2004. En la última sección se sintetizan los resultados obtenidos y se incluyen algunos comentarios. Finalmente, en un Apéndice figuran las demostraciones de las proposiciones enunciadas a lo largo del trabajo.

2. Las curvas de Lorenz y de Bonferroni. Medidas de desigualdad asociadas.

Supondremos que la distribución de la renta en una población está representada por la variable aleatoria X, cuyo recorrido es la semirrecta real positiva, $R^+ = [0, \infty)$, siendo F su función de distribución[5], y $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ su renta media.

La curva de Lorenz asociada, L(p), p=F(x), se define mediante:

$$L:[0,1]\to[0,1]\ ,\ L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t)dt\ ,\ 0 \le p \le 1\ , \qquad [1]$$

siendo $F^{-1}(t) = \inf\{s: F(s)\ge t\}$, $0\le t\le 1$, la inversa de F, continua por la izquierda, que proporciona la renta correspondiente al percentil t de la distribución. Para cada p=F(x), L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que para $0\le p\le 1$ es $L(p)\le p$, siendo L(p)=p en caso de equidistribución y L(p)=0 para $0\le p<1$, si la concentración es máxima. Para cualquier distribución, X, la curva de Lorenz es creciente, convexa y, dada la renta media, la función de densidad de X se obtiene a partir de la curvatura[6] de L(p).

Mediante la curva de Lorenz se define el índice de desigualdad de Gini, G, como

$$G = 2\int_0^1 (p - L(p))dp = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp\ . \qquad [2]$$

Su valor es el doble del área comprendida entre la curva de Lorenz de la distribución y la correspondiente al caso de equidistribución. Es un índice normalizado, $G\in[0, 1]$.

Una sencilla transformación de la curva de Lorenz da lugar a una interpretación alternativa de la información contenida en ella. Bonferroni (1930), al definir su índice de desigualdad, considera la curva[7]

$$B:[0,1]\to[0,1]\ ,\ B(p) = \begin{cases} \dfrac{L(p)}{p}\ , 0 < p \le 1, \\ 0\ ,\ p = 0. \end{cases} \qquad [3]$$

Para una distribución igualitaria se tiene que B(p)=1, $0<p\le 1$, mientras que, en el otro caso extremo, cuando la concentración es máxima, B(p)=0 si $0\le p<1$ y B(1)=1.

---

[5] En ocasiones, para facilitar la obtención de resultados teóricos, se supondrá la continuidad de F. En tal caso, f(x)=F´(x) es la función de densidad de la distribución.

[6] Estas propiedades son consecuencia de las siguientes igualdades

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{F^{-1}(p)}{\mu} > 0\ ,\ \frac{d^2L(p)}{dp^2} = \frac{1}{\mu f(F^{-1}(p))} > 0\ ,\ 0 < p < 1.$$

[7] En la siguiente igualdad, si la renta mínima es $x_0>0$, entonces $B(0) = \lim_{x\to 0^+}(L(p)/p) = L'(0^+) = x_0/\mu$.

La función B(p) se conoce en la literatura como curva de Bonferroni o curva de medias condicionadas relativas, de acuerdo con su significado. Dado un nivel de renta x>0, la renta media de la distribución truncada que resulta al restringir la variable X al intervalo [0, x], viene dada por

$$E(X/X\leq x)=\frac{1}{F(x)}\int_0^x s dF(s)=\mu\frac{L(p)}{p},\ 0<p=F(x)\leq 1,$$

y, como consecuencia, se verifica

$$B(p)=\frac{E(X/X\leq F^{-1}(p))}{\mu},\ 0<p=F(x)\leq 1,\ B(0)=0. \qquad [4]$$

Es decir, si p=F(x) es la proporción de unidades cuya renta es menor o igual que x, B(p) es el cociente entre la renta media de ese grupo y la media de la población. En particular, fijada una línea de pobreza, z, si p_z=F(z) es la proporción de pobres, B(p_z) es la renta media de los pobres expresada como fracción de la renta media global.

Aunque desde el punto de vista formal la curva de Bonferroni proporciona una representación de la desigualdad equivalente a la de la curva de Lorenz y cada una de estas curvas queda determinada por la otra, la información que ofrecen es de naturaleza diferente. Los valores de L(p) son participaciones en la renta total, mientras que los de B(p) se refieren a niveles relativos de renta. La forma en que se presenta la información mediante la curva de Bonferroni es la utilizada por las oficinas de estadística cuando al analizar las distribuciones de renta facilitan, por ejemplo, las rentas medias de determinados cuantiles como fracciones de la media de la población.

Otra diferencia entre las curvas L(p) y B(p) viene dada por la incidencia que sobre la forma geométrica de ambas tienen las características de la distribución subyacente F. Como se indicó, L(p) es para cualquier distribución una función creciente y convexa. Sin embargo, aunque B(p) es también creciente[8], su forma, en cuanto a concavidad/convexidad, depende de la de F. Esto último se deduce de la expresión de la derivada segunda de B(p), dada por

$$B''(p)=-\frac{1}{\mu p^3}\int_0^p\frac{t^2 f'(F^{-1}(t))dt}{(f(F^{-1}(t)))^3},$$

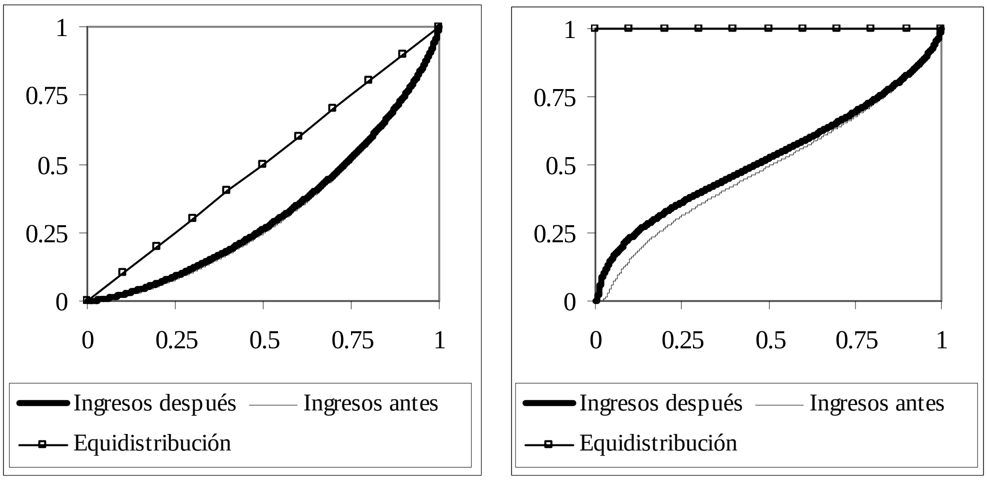
siempre que $\lim_{p\to 0^+}(p^2/f(F^{-1}(p)))=0$. Con lo cual, si F es convexa (cóncava), en cuyo caso f es creciente (decreciente) y la mayoría de la población tiene rentas altas (bajas), B(p) es cóncava (convexa). Si en una distribución f es campaniforme y asimétrica a la derecha, F es convexa/cóncava y B(p) cóncava/convexa. Cuando la función de distribución es

[8] Su primera derivada es $B'(p)=\frac{1}{\mu p^2}\int_0^p\frac{tdt}{f(F^{-1}(t))}>0$.

cóncava/convexa, las rentas más bajas y las más altas son las más frecuentes, existiendo una tendencia hacia la polarización, en cuyo caso B(p) es convexa/cóncava. Es decir, la forma de la curva de Bonferroni, a diferencia de lo que sucede con la curva de Lorenz, proporciona información sobre la distribución asociada.

En el análisis gráfico, las diferencias en desigualdad entre dos distribuciones se perciben mejor con sus respectivas curvas de Bonferroni que cuando se emplean las curvas de Lorenz. Así, el Gráfico 1 representa estas curvas para las distribuciones del ingreso anual disponible de los hogares españoles antes y después de transferencias, en el año 2003.

GRÁFICO 1. Curva de Lorenz y de Bonferroni



Elaboración propia a partir de la ECV 2004

La diferencia entre las curvas de Lorenz es casi inexistente, mientras que la separación entre las curvas de Bonferroni, sobre todo en la cola inferior de las distribución, es mayor. Aunque este tipo de apreciación no es estadísticamente significativa, facilita las comparaciones.

Es sabido que si entre dos distribuciones, con iguales medias, existe una relación de dominancia en términos de sus curvas de Lorenz, la distribución dominante se puede obtener de la otra mediante una sucesión finita de transferencias progresivas. Este resultado, como indica Aaberge (2007), es también válido cuando la condición de dominancia se expresa en términos de la curva de Bonferroni[9], al ser B(p)=L(p)/p.

De forma análoga a como se calcula el índice de Gini mediante L(p), el índice de Bonferroni, B, se define a partir de la curva B(p) como

[9] Es decir, si X e Y son dos distribuciones tales que $\mu_X=\mu_Y$, son equivalentes las afirmaciones: (i) $X \geq_B Y$; (ii) X se puede obtener a partir de Y mediante una sucesión de transferencias progresivas; (iii) Para todo índice de desigualdad, I, que satisfaga el Principio de Simetría y el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton, es $I_X \leq I_Y$.

$$B = 1 - \int_0^1 B(p)dp = \int_0^1 (1 - B(p))dp = \int_0^1 \frac{p - L(p)}{p} dp \, . \qquad [5]$$

Su valor coincide con el área comprendida entre la curva de Bonferroni de la distribución vigente y la que correspondería al caso de equidistribución. Es evidente que $B \in [0, 1]$.

Por otra parte, teniendo en cuenta [4], resulta que la función

$$1 - B(p) = \frac{\mu - E(X / X \leq x)}{\mu}, \; p = F(x) \, , \qquad [6]$$

puede interpretarse como una medida de la desigualdad local acumulada hasta el percentil p de la distribución, ya que representa la diferencia relativa entre la renta media de la población y la renta media de quienes están situados por debajo de ese percentil. Por lo tanto, el índice de Bonferroni es el valor esperado de dichas diferencias a lo largo del recorrido de la variable renta. A pesar de su buen comportamiento, si el evaluador social tiene preferencia por la igualdad, se trata de un índice al que se ha dedicado escasa atención en la literatura económica[10].

Tanto el índice de Gini como el de Bonferroni pertenecen a la clase de medidas lineales de desigualdad de Mehran (1976). Esto es, ambos pueden obtenerse ponderando, a lo largo de la escala de rentas, la desigualdad local representada por las diferencias de Lorenz, $p - L(p)$ [11], aunque lo hacen de forma muy diferente. En el índice de Gini, expresión [2], esas diferencias se ponderan con un peso, $w_G(p) = 2$, constante a lo largo de la escala de rentas. Sin embargo, como muestra [5], el índice de Bonferroni las pondera con la función $w_B(p) = 1/p$, estrictamente decreciente y estrictamente convexa para p>0. Ello implica que al aumentar el nivel de renta, y con él p, se asigna un peso decreciente a la desigualdad local y la tasa de decrecimiento aumenta con el nivel de renta. En consecuencia, B asigna mayor importancia a la desigualdad existente en las rentas bajas. Así, los índices G y B evalúan de distinta forma la desigualdad existente a lo largo de la distribución. Al abordar los aspectos normativos se justificará, mediante sus respectivas distribuciones de preferencias, que B incorpora mayor aversión a la desigualdad que G.

[10] Se hace referencia a sus propiedades en Nygard y Sandström (1981), Giorgi (1998), Tarsitano (1990), Giorgi y Crescenzi (2001), Chakravarty y Muliere (2003) y Aaberge y otros (2004). En Imedio (2007) se hace un estudio normativo y estadístico, comparándolo en ambos sentidos con el índice de Gini, mientras que en Chakravarty (2005) y Bárcena e Imedio (2007), el índice B se interpreta como medida de privación social.

[11] Observése que $p - L(p)$ es la diferencia entre la participación que tendría el conjunto de individuos con renta menor o igual que x, en el volumen total de renta, si la distribución fuese igualitaria, y su participación real en la distribución considerada.

3. Familias de índices asociadas a las distribuciones inducidas por las curvas de Lorenz y de Bonferroni.

Como consecuencia de sus propiedades, las curvas L(p) y B(p) cumplen las condiciones formales necesarias para ser consideradas funciones de distribución: tienen carácter acumulativo, son crecientes y su recorrido es el intervalo $[0,1]$. Como tales, cada una de ellas quedará determinada por el conjunto de sus respectivos momentos respecto al origen[12], $\{E_L(p^h)\}_{h\in N}$, $\{E_B(p^h)\}_{h\in N}$, siendo $E_L(.)$ y $E_B(.)$ los operadores esperanza matemática o valores medios, respecto a las distribuciones L y B, y N={1, 2, ..., n, ...} el conjunto de los enteros positivos. Una caracterización alternativa de L(p) y de B(p) la proporcionan, respectivamente, las sucesiones de esperanzas[13] $\{E_L((1-p)^h)\}_{h\in N}$ y $\{E_B((1-p)^h)\}_{h\in N}$. Lo relevante, en el contexto de este trabajo, es que estos valores medios, o transformaciones lineales de ellos, son medidas de desigualdad.

Definición 1 (Aaberge, 2000). Para cada $h\in N$, sea

$$L_h = \frac{h+1}{h} E_L(p^h) - \frac{1}{h} = \frac{h+1}{h}\int_0^1 p^h dL(p) - \frac{1}{h}. \qquad [7]$$

El conjunto $\Lambda = \{L_h\}_{h\in N}$ es una familia numerable o sucesión de índices de desigualdad. Sus elementos, denominados L-momentos, también se pueden expresar como

$$L_h = 1-(h+1)\int_0^1 p^{h-1}L(p)dp = (h+1)\int_0^1 p^{h-1}(p-L(p))dp,\ h\in N. \qquad [8]$$

Definición 2 (Yitzhaki, 1983). Si $\beta>0$, el índice de Gini generalizado de parámetro β, $G(\beta)$, se expresa como

$$G(\beta) = 1-\beta(\beta+1)\int_0^1 (1-p)^{\beta-1}L(p)dp. \qquad [9]$$

Es sencillo comprobar que se verifica

$$G(\beta) = 1-(\beta+1)E_L((1-p)^\beta),\ \beta>0. \qquad [10]$$

---

[12] Para una demostración de que una distribución queda unívocamente determinada por el conjunto de sus momentos respecto del origen, cuando éstos existen, véase Kendall, Stuart y Ord (1994), cap. 4.

[13] Es evidente que los conjuntos $\{E(p^h)\}_{h\in N}$ y $\{E(1-p)^h)\}_{h\in N}$ se determinan mutuamente, como consecuencia de las igualdades $(1-p)^h = \sum_{i=0}^{h}(-1)^i\binom{h}{i}p^i$, $p^h = \sum_{i=0}^{h}(-1)^i\binom{h}{i}(1-p)^i$.

Como consecuencia de la igualdad anterior y dado que la sucesión de esperanzas $\{E_L((1-p)^h)\}_{h\in N}$ caracteriza la curva de Lorenz, la familia formada por los índices de Gini generalizados cuyo parámetro es entero positivo, $\Lambda^* = \{L_h^* \equiv G(h)\}_{h\in N}$, determina la distribución de la renta, fijada la renta media.

Es evidente que los elementos de Λ y de Λ^* son consistentes con el criterio de ordenación inducido por la curva de Lorenz[14] y que la intersección de ambas familias es el coeficiente de Gini

$$L_1 = L_1^* = G = 2\int_0^1 (p - L(p))dp .$$

Por otra parte, como consecuencia de la fórmula del binomio de Newton, cada índice de Λ^* se puede expresar como combinación lineal de índices de Λ, y recíprocamente. Se verifican las igualdades

$$L_h^* = 1 + (h+1)\sum_{i=1}^{h}(-1)^i \binom{h}{i} \frac{i}{i+1}\left(1 - L_i\right), \ h \in N, \qquad [11]$$

$$L_h = 1 + \frac{h+1}{h}\sum_{i=1}^{h}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{h}{i}\left(1 - L_i^*\right), \ h \in N. \qquad [12]$$

Aunque se determinen mutuamente, los elementos de Λ y Λ^* incorporan claras divergencias en el ámbito normativo. En Imedio y Bárcena (2007) se realiza un estudio conjunto de estas familias y, entre otros resultados, se demuestra que los índices de Λ presentan una aversión decreciente a la desigualdad, mientras que para los de Λ^* sucede lo contrario y que la unión de ambas familias cubre todo el espectro, desde la indiferencia hasta la aversión máxima.

Considerando la curva de Bonferroni como función de distribución, sus momentos respecto al origen (B-momentos) también dan lugar a una familia numerable de índices.

Definición 3 (Aaberge, 2007). Para cada $h \in N$, sea

$$B_h = E_B(p^h) = \int_0^1 p^h dB(p). \qquad [13]$$

El conjunto $\mathbf{B} = \{B_h\}_{h\in N}$ es una familia numerable de índices de desigualdad, cuyos elementos se pueden expresar como

[14] Es decir, si X e Y son dos distribuciones de renta tales que $L_X(p) \geq L_Y(p)$, $0 \leq p \leq 1$, entonces se verifica $L_{X,h} \leq L_{Y,h}$, $L_{X,h}^* \leq L_{Y,h}^*$.

$$B_h = 1 - h\int_0^1 p^{h-1}B(p)dp = 1 - h\int_0^1 p^{h-2}L(p)dp\,,$$

o bien

$$B_h = h\int_0^1 p^{h-2}(p - L(p))dp = h\int_0^1 p^{h-1}(1 - B(p))dp\,,\ h \in N\,. \qquad [14]$$

Esta familia de medidas de desigualdad, **B**=$\{B_h\}_{h\in N}$, es la de los L-momentos, $\Lambda = \{L_h\}_{h\in N}$, ampliada con el índice de Bonferroni. Es decir, **B**=$\Lambda\cup\{B\}$, ya que

$$B_1 = B = 1 - \int_0^1 \frac{L(p)}{p}dp\,,$$

$$B_2 = L_1 = G\,,$$

y, en general

$$B_{h+1} = L_h\,,\ h\in N.$$

Los elementos de **B** caracterizan la curva de Bonferroni y a través de ella, fijada la renta media, determinan la distribución. Al incluir el coeficiente de Bonferroni, la familia **B** aporta, respecto a Λ, un índice que es más sensible a los cambios que se puedan producir en las rentas bajas.

Dado que a partir de la sucesión $\{E_L((1-p)^h)\}_{h\in N}$ puede construirse la familia de los índices de Gini generalizados, Λ^*, parece natural preguntarse si la sucesión de esperanzas $\{E_B((1-p)^h)\}_{h\in N}$, semejante a la anterior pero obtenida mediante la curva de Bonferroni, permite generar una nueva familia de índices. La respuesta es afirmativa. La definición siguiente proporciona las expresiones de los índices de la nueva familia.

Definición 4. Para cada h$\in$N, sea

$$B_h^* = 1 - E_B((1-p)^h) = 1 - \int_0^1 (1-p)^h dB(p)\,. \qquad [15]$$

$\mathbf{B}^*$= $\{B_h^*\}_{h\in N}$ es una sucesión de índices relativos de desigualdad con rango el intervalo [0, 1]. Expresiones equivalentes de sus elementos son

$$B_h^* = 1 - h\int_0^1 (1-p)^{h-1}B(p)dp = 1 - h\int_0^1 \frac{(1-p)^{h-1}}{p}L(p)dp\,, \qquad [16]$$

$$B_h^* = h\int_0^1 \frac{(1-p)^{h-1}}{p}(p - L(p))dp = h\int_0^1 (1-p)^{h-1}(1 - B(p))dp\,,\ h \in N\,. \qquad [17]$$

Es inmediato que B_1^*=B es el índice de Bonferroni, de manera que $\mathbf{B}\cap\mathbf{B}^* = \{B\}$.

Al estar generada por $\{E_B((1-p)^h)\}_{h\in N}$, la familia $\mathbf{B}^*$ caracteriza a la curva de Bonferroni y, fijada la renta media, a la distribución. Esta propiedad es común, por lo tanto, a las familias de índices Λ, Λ^* y $\mathbf{B}$.

Los elementos de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$ son consistentes con el criterio de ordenación inducido por la curva de Bonferroni[15] y al igual que los pertenecientes a Λ y Λ^*, son índices de compromiso[16]. Esto es, $\mathbf{B}_A=\{\mu B_h\}_{h\in N}$ y $\mathbf{B}^*_A=\{\mu B^*_h\}_{h\in N}$ son dos familias numerables de medidas absolutas de desigualdad. Dado que Λ y $\mathbf{B}$ sólo difieren en el índice de Bonferroni y que éste pertenece a $\mathbf{B}^*$, basta probar la propiedad para los índices de $\mathbf{B}^*$.

Proposición 1. Para cada $h\in N$, μB^*_h es un índice absoluto, invariante frente a cambios de origen en la distribución.

Una relación análoga a la existente entre los elementos de Λ y Λ^*, igualdades [11] y [12], se puede establecer entre cualquier par de familias del conjunto $\{\Lambda, \Lambda^*, \mathbf{B}, \mathbf{B}^*\}$. Es decir, cualquier índice de una de ellas puede obtenerse a partir de los pertenecientes a cualquier otra. Ello es consecuencia de la proposición siguiente.

Proposición 2. Para cada $h\in N$, se verifica

$$B^*_h = h\sum_{i=h}^{\infty} L^*_i / i(i+1) \ , \quad h\sum_{i=h}^{\infty} 1/i(i+1) = 1, \qquad [18]$$

$$L^*_h = (h+1)B^*_h - hB^*_{h+1}. \qquad [19]$$

Cada B^*_h es, por lo tanto, una media ponderada de los S-Gini con parámetro entero positivo, mayor o igual que h. En particular, el índice de Bonferroni (h=1) es la media ponderada de todos los Gini generalizados cuyo parámetro es entero positivo. El resultado anterior, junto a las expresiones [11] y [12], prueba que a partir de los elementos de una de las familias del conjunto $\{\Lambda, \Lambda^*, \mathbf{B}, \mathbf{B}^*\}$ se pueden obtener los de las restantes. Sin embargo, esta determinación mutua desde el punto de vista operativo es independiente de los aspectos éticos que subyacen en los índices de las distintas familias.

[15] A partir de [14] y de [17], si X e Y son dos distribuciones de renta tales que $B_X(p) \geq B_Y(p)$, $0\leq p\leq 1$, entonces se verifica $B_{X,h} \leq B_{Y,h}$, $B^*_{X,h} \leq B^*_{Y,h}$. Además, para distribuciones cuya renta mínima sea nula la L-consistencia y la B-consistencia, son equivalentes.

[16] Un índice relativo de desigualdad, I, es de compromiso si μI es un índice absoluto. Análogamente, un índice absoluto J es de compromiso si J/μ es un índice relativo.

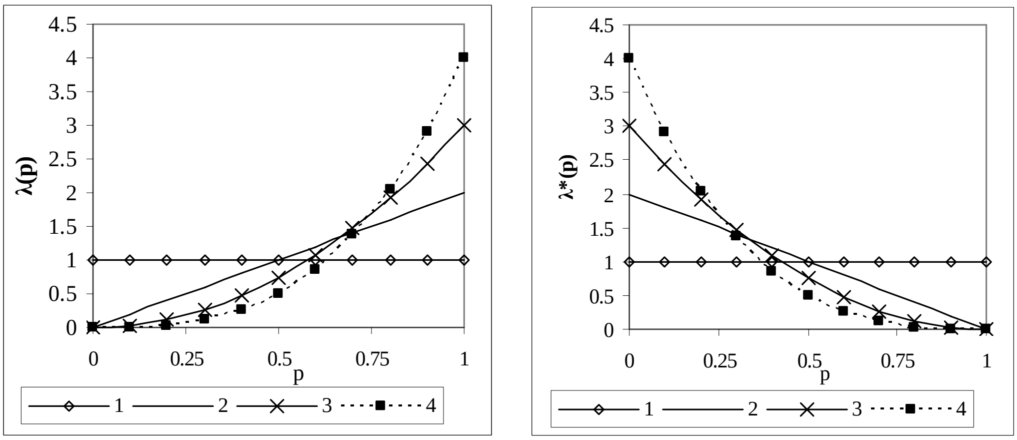
El tipo de consideraciones realizadas para poner de manifiesto que los coeficientes de Gini y de Bonferroni valoran de distinto modo la desigualdad local existente a lo largo de la escala de rentas, se pueden extender, en general a los elementos de las familias **B** y **B***. Las expresiones [14] y [17] prueban que todos ellos son medidas lineales de las introducidas por Mehran (1976) y que, por lo tanto, se pueden obtener ponderando las diferencias de Lorenz $p-L(p)$, 0<p<1. Sin embargo, por la propia definición de los índices, a partir de la curva de Bonferroni, parece más natural evaluar la desigualdad local mediante $1-B(p)$. Escribiendo las igualdades [14] y [17] como

$$B_h = \int_0^1 (1-B(p))\lambda_h(p)dp\,,\ \lambda_h(p) = hp^{h-1},\ \int_0^1 \lambda_h(p)dp = 1,\ h \in N\,,$$

$$B_h^* = \int_0^1 (1-B(p))\lambda_h^*(p)dp\ ,\ \lambda_h^*(p) = h(1-p)^{h-1},\ \int_0^1 \lambda_h^*(p)dp = 1, h \in N\,,$$

queda clara la discrepancia que, en la forma de valorar la desigualdad local, presentan los índices de ambas familias. Para h=1, B_1 y B_1^* coinciden con el índice de Bonferroni. Si h>1, $\lambda_h(p)$ (resp. $\lambda_h^*(p)$) es una función estrictamente creciente (decreciente) de p, y para valores de h>2, tanto $\lambda_h(p)$ como $\lambda_h^*(p)$ son estrictamente convexas. Con ello, los índices B_h, h>2, (resp. B_h^*, h>2) al aumentar el nivel de renta asignan un peso cada vez mayor (menor) a la desigualdad local y lo hacen a una tasa de variación creciente. Por otra parte, para un valor fijo de p, 0<p<1, las sucesiones $\{\lambda_h(p)\}_{h\in N}$ y $\{\lambda_h^*(p)\}_{h\in N}$ presentan un comportamiento diferente. Si p≤1/2, $\{\lambda_h(p)\}_{h\in N}$ es decreciente, mientras que $\{\lambda_h^*(p)\}_{h\in N}$ también lo es para p≥1/2. Es decir, si se fija un nivel de renta, al aumentar h, los índices B_h (B_h^*) asignan una ponderación cada vez menor a la desigualdad acumulada hasta esa renta si ésta es inferior (superior) a la mediana. En el Gráfico 2 se representan las ponderaciones correspondientes a los índices B_1, B_2, B_3 y B_4 de la familia **B**, y las de los índices B_1^*, B_2^*, B_3^* y B_4^* de **B***.

GRÁFICO 2. Representación de las sucesiones $\{\lambda_h(p)\}_{h\in N}$ y $\{\lambda_h^*(p)\}_{h\in N}$ para h=1, 2, 3, 4



En definitiva, los índices de **B** y los de **B*** valoran de distinta forma la desigualdad local a lo largo de la escala de rentas. Los de **B**, a excepción de B_1 (coeficiente de Bonferroni) y de B_2 (coeficiente de Gini), dan mayor importancia a la desigualdad existente en las rentas altas, y los de **B*** a la existente en las rentas bajas. Además, al aumentar el parámetro h, esta diferencia en el criterio de valoración es cada vez más acentuada.

Por el modo en que se definen, los elementos de **B** y **B*** tienen un origen estadístico y constituyen lo que en la literatura se conoce como medidas objetivas de desigualdad, cuyo interés se centra en la cuantificación del grado de concentración de las distribuciones sobre las que se aplican. Presentan, inicialmente, una clara diferencia con los llamados índices éticos o normativos. Estos miden la desigualdad en términos de la pérdida de bienestar social que implica la dispersión de rentas, por lo que para su definición es necesaria la especificación previa de una función de bienestar social (FBS), que incorpore de forma explícita un conjunto de juicios de valor. A pesar de esta distinción, desde el trabajo de Dalton (1920) y, sobre todo, a partir de la aportación de Atkinson (1970), se acepta que en cualquier medida de dispersión de rentas subyace alguna noción de bienestar social, en el sentido de que incorpora criterios a la hora de valorar la desigualdad a lo largo del recorrido de la variable renta.

La sección siguiente se ocupa del análisis de algunos de los aspectos normativos que subyacen en los índices objeto de estudio, dedicando particular atención a elementos de **B** y **B***.

4. Fundamentación normativa. Distribuciones de preferencias.

Para establecer la relación entre desigualdad y bienestar utilizaremos el enfoque de Yaari (1987, 1988). Si F es la distribución de la renta y ϕ:[0, 1]$\rightarrow$R es una función de distribución[17] que representa las preferencias sociales, la función de bienestar social de Yaari (FBSY) viene dada por

[17] La supondremos de clase C^2, dos veces derivable con continuidad. Cuando sea necesario en resultados posteriores, se admitirá la existencia de derivadas de orden superior.

$$W_\phi(F)=\int_{R^+} x\,d\phi(F(x))=\int_0^1 F^{-1}(p)\,d\phi(p)=\int_0^1 \phi'(p)F^{-1}(p)\,dp\,. \quad [20]$$

Por lo tanto, W_ϕ es aditiva y lineal en las rentas, ponderándolas según la posición que asignan a los individuos en la distribución[18] . El peso asignado a la renta del individuo con rango p, 0<p<1, es $\phi'(p)\geq 0$. Yaari (1988) demuestra que $W_\phi(F)$ presenta aversión a la desigualdad si, y sólo si, $\phi'(p)$ es decreciente, lo que equivale a la concavidad de ϕ.

Si μ es la media de F y L(p) su curva de Lorenz, una expresión alternativa de W_ϕ es

$$W_\phi(F)=\int_{R^+} x\phi'(F(x))\,dF(x)=\mu\int_0^1 L'(p)\phi'(p)\,dp=\mu\left[\phi'(1)-\int_0^1 \phi''(p)L(p)\,dp\right]. \quad [21]$$

Cada FBSY se puede expresar como una función de bienestar asociada a una medida lineal de desigualdad del tipo definido en Mehran (1976). Se verifica

$$W_\phi(F)=\mu\left[1-I_\phi(F)\right], \quad [22]$$

siendo

$$I_\phi(F)=\int_0^1 (p-L(p))\omega_\phi(p)\,dp\,,\quad \omega_\phi(p)=-\phi''(p)\,, \quad [23]$$

lo que proporciona una relación explícita entre la distribución de preferencias y el esquema de ponderación de las diferencias de Lorenz.

La expresión $\mu\left[1-I_\phi(F)\right]$ coincide, según el enfoque de Blackorby y Donaldson (1978), con la renta equivalente igualmente distribuída[19], en cuyo caso $\mu I_\phi(F)$ mide la pérdida de bienestar debida a la desigualdad.

A partir de [20], [21] y [22] resultan distintas expresiones equivalentes del índice de desigualdad asociado[20] a la FBSY W_ϕ

$$I_\phi(F)=1-\frac{W_\phi(F)}{\mu}=1-\frac{1}{\mu}\int_{R^+} x\phi'(F(x))\,dF(x)\,, \quad [24]$$

o bien

$$I_\phi(F)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (1-\phi'(p))F^{-1}(p)\,dp=1+\int_0^1 \phi''(p)L(p)\,dp\,. \quad [25]$$

---

18 Ben Porath y Gilboa (1994) axiomatizan la FBSY para distribuciones discretas. En Zoli (1999) se demuestra que la dominancia en términos de la FBSY equivale a la dominancia estocástica inversa de Muliere y Scarsini (1989).

19 Es el nivel de renta que asignado por igual a todos los individuos de la población proporcionaría idéntico bienestar, según la FBS especificada, que la distribución existente. Este concepto es la base del enfoque AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)) para relacionar bienestar y desigualdad.

20 En la siguiente igualdad se utiliza que $I_\phi(F)$ es la unidad en caso de concentración máxima, si $\phi'(1)=0$.

Para proporcionar un fundamento normativo a los índices de las familias $\mathbf{B}=\{B_h\}_{h\in N}$ y $\mathbf{B}^*=\{B_h^*\}_{h\in N}$, relacionando desigualdad y bienestar mediante la FBSY, es necesaria la obtención de sus respectivas distribuciones de preferencias, $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{B}}=\{\phi_{B,h}\}_{h\in N}$ y $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{B}^*}=\{\phi_{B^*,h}\}_{h\in N}$.

Proposición 3. Las funciones

$$\phi_{B,h}(p)=\begin{cases} p-p\ln(p)\ ,\ h=1 \\ \dfrac{1}{h-1}\left(hp-p^h\right),\ h\geq 2. \end{cases} \qquad [26]$$

$$\phi_{B^*,h}(p)=1-h\sum_{i=h}^{\infty}\frac{(1-p)^{i+1}}{i(i+1)}\ ,\ h\in N, \qquad [27]$$

definidas en el intervalo (0, 1), satisfacen, para sus respectivos índices, cualquiera de las condiciones equivalentes [23], [24] o [25]. Proporcionan, por lo tanto, una justificación normativa a los elementos de las familias **B** y **B***.

La distribución de preferencias asociada al coeficiente de Bonferroni, elemento común de ambas familias ($B_1=B_1^*$), se obtiene mediante [26] o [27] haciendo h=1; resultan dos expresiones distintas pero equivalentes, como consecuencia de la igualdad

$$p-p\ln(p)=1-\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i+1}/i(i+1)\ ,\ |1-p|<1,$$

demostrada en el Apéndice. A partir de ella resulta que aunque, por razones de uniformidad, cada una de las funciones $\phi_{B^*,h}(p)$ venga dada mediante una serie convergente, también se pueden expresar mediante una combinación lineal de pln(p) y de una función polinómica de grado h. Se verifica

$$\phi_{B^*,h}(p)=1+h\left(-p\ln(p)-1+p+\sum_{i=1}^{h-1}(1-p)^{i+1}/i(i+1)\right),\ h\in N.$$

En particular

$$\phi_{B^*,1}(p)=p-p\ln(p)\,,\ 0<p\leq 1\,,$$

$$\phi_{B^*,2}(p)=p^2-2p\ln(p)\,,\ 0<p\leq 1\,,$$

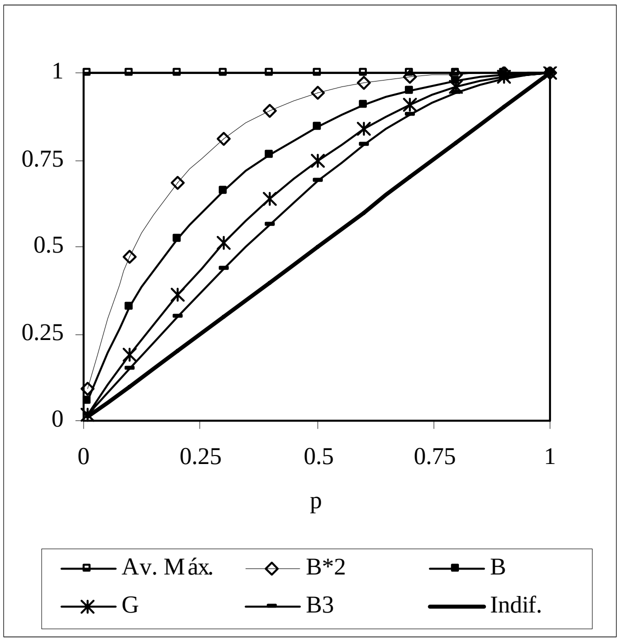
$$\phi_{B^*,3}(p)=-p^3/2+3p^2-3p/2-3p\ln(p)\,,\ 0<p\leq 1\,.$$

Las funciones de $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{B}}$ y de $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{B}^*}$ son estrictamente crecientes, lo que implica que todas las rentas tienen una ponderación positiva en la FBSY y, por lo tanto, la sociedad prefiere mayores niveles de renta. También son estrictamente cóncavas, por lo que en los índices de las familias **B** y **B***, así como en sus respectivas FBSY, subyace una preferencia (aversión) por la igualdad (desigualdad). Esta postura común presenta, sin embargo, distintos grados de intensidad tanto entre los elementos de una misma familia, como al considerar índices de familias diferentes.

Proposición 4. Las funciones de las familias $\Psi_{\mathbf{B}} = \{\phi_{B,h}\}_{h\in N}$ y $\Psi_{\mathbf{B}^*} = \{\phi_{B^*,h}\}_{h\in N}$ están ordenadas según su grado de concavidad. Al aumentar h, la concavidad de las funciones de $\Psi_{\mathbf{B}}$ disminuye, mientras que para las de $\Psi_{\mathbf{B}^*}$ sucede lo contrario. En consecuencia, toda función de $\Psi_{\mathbf{B}^*}$ es más cóncava que cualquier función de $\Psi_{\mathbf{B}}$, excepto si h=1, en cuyo caso resulta la función de preferencias asociada al índice de Bonferroni, común a ambas familias.

En el siguiente gráfico se representan las funciones de preferencia de los índices B_2^*, $B_1^* = B_1$ (Bonferroni), B_2 (Gini), B_3 y las asociadas a los casos extremos, B_∞^* (concavidad máxima) y B_∞ (función lineal), que se obtendrán en la Proposición 5.

GRÁFICO 3. Funciones de preferencia



Según el resultado anterior los índices de **B** presentan una aversión decreciente a la desigualdad, mientras que los de $\mathbf{B}^*$ muestran una aversión creciente. Para probar que con ambas familias queda cubierto todo el espectro de la aversión a la desigualdad, desde la indiferencia hasta la aversión máxima, es necesario considerar el comportamiento, cuando $h\to\infty$, de los elementos de $\Psi_{\mathbf{B}}$ y $\Psi_{\mathbf{B}^*}$.

Proposición 5. Las funciones de $\Psi_{\mathbf{B}}$ convergen hacia la identidad en el intervalo $[0,1]$, mientras que las de $\Psi_{\mathbf{B}^*}$ tienden, excepto para p=0, hacia la función constante e igual a la unidad en $[0,1]$. Es decir

$$\lim_{h\to\infty} \phi_{\mathbf{B},h}(p) = p\,,\ 0 \le p \le 1, \qquad \lim_{h\to\infty} \phi_{\mathbf{B}^*,h}(p) = \begin{cases} 0\,,\, p = 0\,, \\ 1\,,\, 0 < p \le 1. \end{cases}$$

Como consecuencia de este resultado, el comportamiento de las FBSYs y de sus índices asociados, en los casos límite, viene dado por

$$\lim_{h\to\infty} W_{\phi,\,h}(F) = \int_0^1 F^{-1}(p)dp = \mu\ ,\ \lim_{h\to\infty} B_h = 0\,,$$

$$\lim_{h\to\infty} W_{\phi,\,h^*}(F) = x_0\ ,\ \lim_{h\to\infty} B_h^* = 1 - x_0/\mu\ .$$

Es decir, en la familia $\mathbf{B}=\{B_h\}_{h\in N}$ cuando $h\to\infty$, la distribución de preferencias es lineal, su concavidad es nula. Por ello, las transferencias progresivas no tienen ningún efecto sobre el bienestar ni la desigualdad. En ese caso, el bienestar asociado a cualquier distribución se identifica con su renta media y el índice de desigualdad asociado es nulo, no porque la distribución sea igualitaria sino por su indiferencia a la desigualdad. Para la familia $\mathbf{B}^* = \{B_h^*\}_{h\in N}$ sucede lo contrario, cuando $h\to\infty$. La distribución de preferencias tiende a la concavidad máxima, por lo que sólo son relevantes las transferencias de renta dirigidas hacia el individuo más pobre de la población (leximin rawlsiano). El bienestar se identifica con la renta mínima de la distribución y el valor de la desigualdad es $1 - x_0/\mu$ o la unidad si la renta mínima es nula.

Los elementos de las familias de índices absolutos $\mathbf{B}_A=\{\mu B_h\}_{h\in N}$ y $\mathbf{B}_A^* =\{\mu B_h^*\}_{h\in N}$ representan el coste de la desigualdad en términos de bienestar social. A partir de lo anterior, es inmediato que el coste de la desigualdad es nulo en el caso de indiferencia y es máximo, la diferencia entre las rentas media y mínima de la distribución, cuando lo es la aversión hacia la desigualdad.

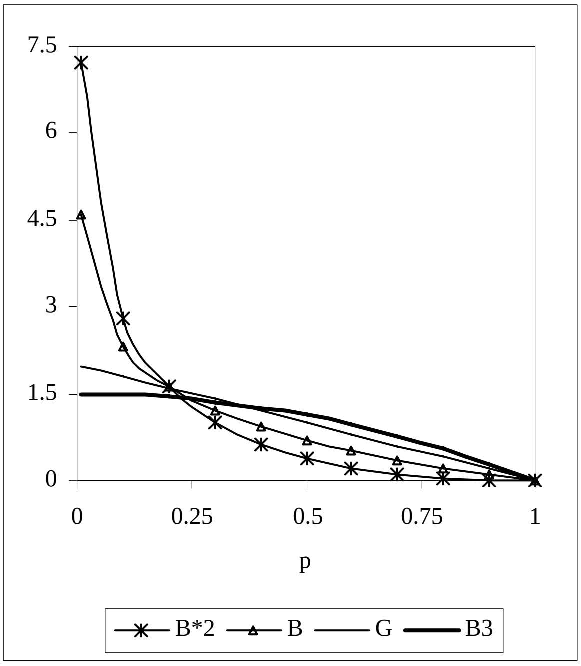
A partir de la igualdad [20] y de la Proposición 3 se obtienen las funciones que ponderan las rentas en las FBSY asociadas a los índices de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$. Para $p\in(0,\ 1)$, sus expresiones son

$$\phi'_{B,h}(p) = \begin{cases} -\ln(p)\ , & h = 1 \\ \dfrac{h}{h-1}\left(1 - p^{h-1}\right)\ , & h \geq 2\,. \end{cases}$$

$$\phi'_{B^*,h}(p) = h \sum_{i=h}^{\infty} \frac{(1-p)^i}{i}\ ,\ h \in N\,.$$

Como consecuencia de las propiedades de las distribuciones de preferencias, estas funciones son positivas y decrecientes, aunque difieren en sus tasas de decrecimiento. Esta tasa es creciente en las ponderaciones asociadas a índices de $\mathbf{B}^*$, constante en el caso del índice de Gini y decreciente para los $B_h \in B$, $h \geq 3$, según el signo de la tercera derivada de sus respectivas distribuciones de preferencias. En el siguiente gráfico se representan las correspondientes a los índices B_2^*, $B_1^* = B_1$ (Bonferroni), B_2 (Gini) y B_3.

GRÁFICO 4. Ponderaciones de las rentas asociadas a diferentes índices



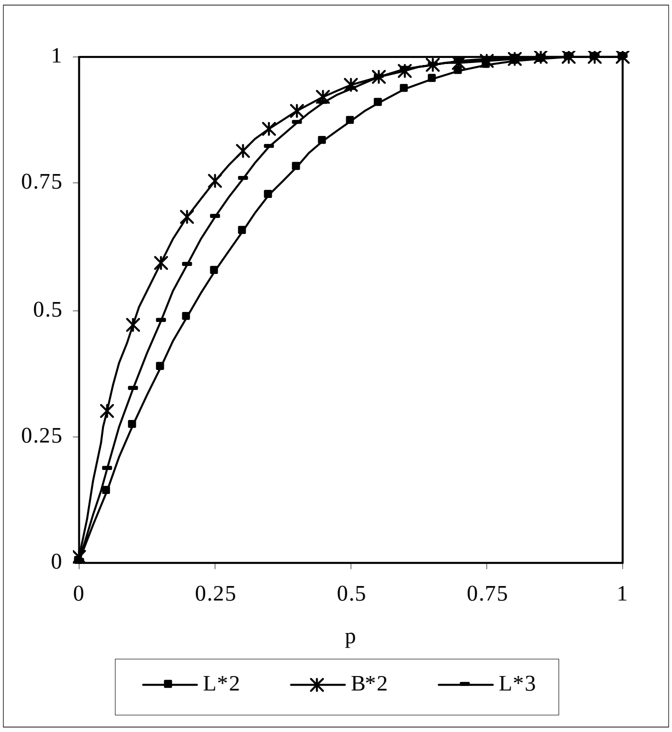
Aunque nuestra atención se centre en las familias de índices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$, parece natural hacer referencia a los índices de las familias $\Lambda = \{L_h\}_{h \in N}$ y $\Lambda^* = \{L_h^*\}_{h \in N}$ en relación a su postura frente a la desigualdad. Como $\Lambda \subset \mathbf{B}$ y ambas familias sólo difieren en su primer elemento, al aumentar h, Λ y $\mathbf{B}$ presentan idéntico comportamiento. Sus elementos incorporan una preferencia decreciente por la igualdad, tendiendo a la indiferencia.

La comparación entre Λ^* y $\mathbf{B}^*$ da lugar a más consideraciones. Aunque se determinen mutuamente, no tienen elementos comunes. Sus primeros elementos son, respectivamente, los coeficientes de Gini y de Bonferroni. Por lo tanto, $\mathbf{B}^*$ comienza con un índice en el que subyace mayor aversión a la desigualdad que la incorporada por el elemento inicial de Λ^*. En general, se verifica la siguiente propiedad.

Proposición 6. Para cada h∈N, el índice $B^*_h \in \mathbf{B}^*$ presenta mayor grado de aversión a la desigualdad que el índice de Gini generalizado $L^*_h \in \Lambda^*$. Es decir, la distribución de preferencias $\phi_{B^*,h}$ es más cóncava que $\phi_{L^*,h}$ en el intervalo [0, 1].

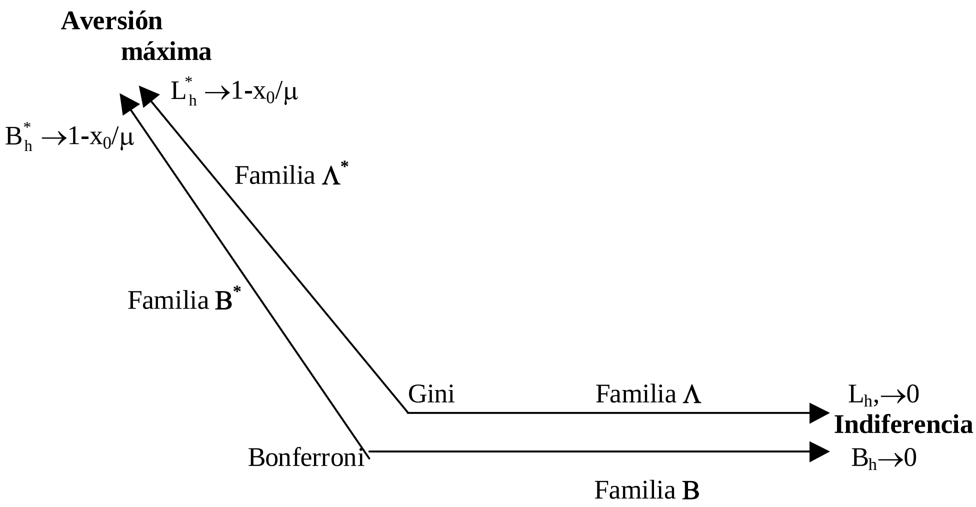
El resultado anterior se limita a la comparación entre pares de índices que corresponden a un mismo valor del parámetro entero positivo que los determina, pero no admite una generalización que permita ordenar, en este sentido, el conjunto unión $\Lambda^* \cup \mathbf{B}^*$. Como se aprecia en el Gráfico 5, la distribución de preferencias de B^*_2, en el intervalo (0, 1), está situada por encima de la correspondiente a L^*_2, pero presenta un punto de intersección con la asociada a L^*_3 para p≈0,6.

GRÁFICO 5. Distribuciones de preferencias para índices de Λ^* y $\mathbf{B}^*$



Por lo tanto, B^*_2 presenta mayor aversión a la desigualdad que L^*_2 , pero B^*_2 y L^*_3 no son comparables a este respecto.

El siguiente esquema sintetiza el comportamiento de los índices de las familias consideradas en este trabajo, Λ, Λ^*, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$, frente a la desigualdad.



Mientras que las familias Λ y $\mathbf{B}$ tienden hacia la indiferencia y lo hacen de forma idéntica, Λ^* y $\mathbf{B}^*$ tiendan ambas hacia la aversión máxima, pero lo hacen de forma diferente.

5. Principios de Transferencias.

Los índices de las familias $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$, al igual que los de Λ y Λ^*, satisfacen el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD) dada la concavidad de sus respectivas distribuciones de preferencias. Sin embargo, al estudiar este tipo de medidas es habitual analizar si satisfacen criterios redistributivos más exigentes. Una idea obvia consiste en contemplar principios según los cuales el efecto de una transferencia sea mayor en la medida en que tenga lugar en la cola inferior de la distribución. Kolm (1976) y Mehran (1976) proponen dos versiones alternativas de un principio de esas características. Según el Principio de Transferencias Decrecientes (PTD), una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada, ha de implicar una mayor reducción (incremento) del índice (bienestar) cuanto menores sean las rentas de esos individuos. Una versión distinta del PTD es la que proporciona el Principio de Sensibilidad Posicional de la Transferencia (PSPT), según el cual, para una diferencia de rangos dada entre quienes tiene lugar la transferencia, el efecto es mayor en la medida en que tenga lugar entre individuos situados en la parte inferior de la distribución. Ambos principios incorporan posturas análogas ante las transferencias, pero mientras que para el PTD lo relevante es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PSPT lo es la proporción de individuos situados entre ambos. En el siguiente resultado se caracteriza el cumplimiento de ambos principios.

Proposición 7. Sea F una distribución de renta con media μ e $I_\phi(F)$ un índice de desigualdad cuya distribución de preferencias, ϕ, es cóncava. Se verifica

(i) (Mehran (1976), Zoli (1999)) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PSPT si, y sólo si, $\phi'''(p) > 0$.

(ii) (Aaberge, 2000) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PTD si, y sólo si, $\phi''(F(x))F'(x)$ es estrictamente creciente para x>0. Ello equivale a la condición

$$-\frac{\phi'''(F(x))}{\phi''(F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}\ ,\ x > 0\,. \qquad [28]$$

La proposición anterior prueba que una medida de desigualdad cumple, o no, el PSPT según las propiedades de su distribución de preferencias, ϕ, con independencia de la distribución de rentas sobre la que se aplique. Se trata, por lo tanto, de una característica del índice. No sucede lo mismo con el PTD. El que $I_\phi(F)$ lo satisfaga no sólo depende de las propiedades de su distribución de preferencias, sino también de la forma de la distribución de la renta. Es decir, dada ϕ, el índice $I_\phi(F)$ verifica el PTD únicamente para una determinada clase de distribuciones de renta, cuya extensión depende del grado de aversión hacia la desigualdad que presente ϕ.

Aplicando el resultado anterior a las distribuciones de preferencias asociadas a los elementos de las familias $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$, se obtiene el comportamiento de estos índices en relación a las transferencias[21].

Proposición 8. Las medidas de desigualdad de las familias Λ, Λ^*, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$ tienen las siguientes propiedades

(i) Los elementos de $\mathbf{B}^*$ y, para h≥2, los de Λ^*, satisfacen el PSPT. No cumplen este principio los elementos de Λ, ni, si h≥2, los de $\mathbf{B}$.

(ii) Fijada una diferencia de rangos, el coeficiente de Gini asigna el mismo peso a cualquier transferencia progresiva, con independencia de la parte de la distribución en que tenga lugar. Para los índices $L_h = B_{h+1}$, h≥2, el efecto de la transferencia es mayor en la medida en que involucre a individuos situados en la parte superior de la distribución.

(iii) El índice $L_h = B_{h+1}$, h∈N, satisface el PTD para todas las distribuciones, F, tales que F^h sea estrictamente cóncava. El S-Gini L_h^*, h∈N, satisface el PTD si, y sólo si, $(1-F)^h$ es estrictamente convexa.

(iv) El índice de Bonferroni, $B = B_1 = B_1^*$, cumple el PTD si, y sólo si, ln(F) es estrictamente cóncava, mientras que si $(1-\ln(F))^h$ es estrictamente convexa, lo satisface el índice B_h^*, h≥2.

[21] En la Proposición siguiente también se hace referencia, a efectos comparativos, a los índices de Λ y Λ^*.

Conviene observar que al aumentar (disminuir) el grado de aversión a la desigualdad de los índices, es más (menos) extensa la clase de las distribuciones para las que satisfacen el PTD. Por ejemplo, si $(1-\ln(F))^{h}$, h>1, es estrictamente convexa, también lo es $(1-\ln(F))^{k}$, k>h. Ello implica, según el apartado (iv) de la Proposición anterior, que si el índice B_h^* cumple el PTD sobre una determinada distribución, también satisface esa propiedad, sobre la misma distribución, cualquier índice B_k^* si k>h. En consecuencia, en la familia $\mathbf{B}^* = \{B_h^*\}_{h\in N}$, al aumentar h, a la vez que los índices incorporan mayor preferencia por la igualdad, el conjunto de las distribuciones para las que cumplen el PTD se amplía. Sucede lo contrario en la familia $\mathbf{B} = \{B_h\}_{h\in N}$. En ella, al ir avanzando en la sucesión, los índices correspondientes presentan menor aversión a la desigualdad y el conjunto de distribuciones sobre las que cumplen el PTD es cada vez más reducido. Por lo tanto, al considerar la unión de ambas familias, $\mathbf{B}\cup\mathbf{B}^*$, si $\Im_I$ es el conjunto de las distribuciones sobre las que el índice de desigualdad I satisface el PTD, se verifican las relaciones de inclusión

$$\ldots \subset \Im_{B,k+1} \subset \Im_{B,k} \subset \ldots \Im_{B,1} = \Im_{B^*,1} \subset \ldots \subset \Im_{B^*,h} \subset \Im_{B^*,h+1} \subset \ldots$$

En este sentido, el comportamiento conjunto de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$ es similar al de las familias Λ y Λ^*.

La relación entre los índices de Λ^* y $\mathbf{B}^*$, respecto al PTD, es análoga a la existente entre ellos cuando se comparan según su grado de aversión a la desigualdad. Se puede enunciar un resultado paralelo al de la Proposición 6.

Proposición 9. Para cada h∈N, el conjunto distribuciones sobre las que el índice $B_h^* \in \mathbf{B}^*$ satisface el PTD es más amplio que el correspondiente al índice de Gini generalizado $L_h^* \in \Lambda^*$. Es decir, $\Im_{L^*,h} \subset \Im_{B^*,h}$.

Como ilustración empírica del comportamiento de los índices de $\mathbf{B}$ y de $\mathbf{B}^*$ se han calculado, para un conjunto de países[22], las medidas de desigualdad B_2^*, $B_1^* = B_1 = B$, B_2=G y B_3 sobre dos distribuciones: la del ingreso anual disponible de los hogares[23] antes y después de incluir las prestaciones sociales referidas a la exclusión social. Este tipo de transferencias van dirigidas a la cola izquierda de la distribución. Para que su efecto sea más evidente, en cada país se han considerado las distribuciones truncadas, a la derecha, por sus respectivas medianas, ya

[22] Se han empleado los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV), año 2004, para los países con información disponible: Austria, Estonia, España, Francia, Grecia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Portugal y Suecia.
[23] Los ingresos se han ajustado mediante la escala de equivalencia de la OCDE modificada. Esta escala asigna valor 1 al primer adulto del hogar, 0,5 a los adultos restantes y 0,3 a cada menor de 14 años. Con

que la incidencia de estas prestaciones, por su reducido importe global, puede diluirse al considerar la distribución completa del ingreso. Los resultados obtenidos se muestran en el Cuadro 1.

CUADRO 1. Índices de desigualdad para los ingresos antes y después de incluir las transferencias relacionadas con la exclusión social.

	B_2^*		$B_1^*=B_1=B$		$B_2=G$		B_3	
	Ingreso antes	Ingreso después	Ingreso antes	Ingreso después	Ingreso antes	Ingreso después	Ingreso antes	Ingreso después
Austria	0.397	0.393	0.277	0.274	0.156	0.155	0.110	0.109
Estonia	0.505	0.503	0.362	0.361	0.219	0.218	0.159	0.158
España	0.488	0.486	0.351	0.349	0.214	0.213	0.155	0.155
Francia	0.402	0.363	0.282	0.255	0.161	0.150	0.114	0.107
Grecia	0.441	0.440	0.316	0.314	0.190	0.189	0.138	0.137
Irlanda	0.381	0.379	0.277	0.275	0.173	0.172	0.129	0.128
Italia	0.474	0.469	0.337	0.333	0.200	0.198	0.143	0.142
Luxemburgo	0.369	0.350	0.258	0.246	0.148	0.142	0.105	0.101
Portugal	0.506	0.493	0.361	0.351	0.215	0.210	0.155	0.151
Suecia	0.426	0.378	0.294	0.262	0.162	0.145	0.112	0.102

Elaboración propia a partir de los datos de ECV 2004

En todos los países esta transferencia disminuye la desigualdad. La mayor reducción porcentual se produce siempre en el índice B_2^*, seguido de B_1^*, B_2 y B_3. La magnitud de las reducciones sigue el orden esperado en función del grado de sensibilidad de cada índice frente a los cambios en la cola izquierda de la distribución. Los países en los que esta prestación tiene mayor incidencia son Suecia y Francia. En este último los cuatro índices, en el orden indicado, disminuyen en un 9,8%, un 9,4%, un 6,8% y un 5,6%, respectivamente. En España, Estonia, Grecia e Irlanda, esta prestación tiene, en la población considerada, un efecto muy reducido sobre la desigualdad.

6. Conclusiones.

Aunque la curva de Lorenz y la curva de Bonferroni proporcionan información de distinta naturaleza sobre la desigualdad existente en una distribución de rentas, comparten un conjunto de características. Cada una de ellas determina la distribución de la renta, dada la renta media. Ambas curvas, con dominio y recorrido común el intervalo $[0,1]$, pueden ser consideradas funciones de distribución. Esta última propiedad permite construir cuatro familias numerables de medidas de desigualdad. A partir de la curva de Lorenz se definen las familias Λ (L-momentos) y Λ^* (índices de Gini generalizados), mientras que a través de la curva de Bonferroni se obtienen la familia $\mathbf{B}$ (B-momentos) y la familia $\mathbf{B}^*$, propuesta en este trabajo. La

ello, si Xi es la renta del hogar, la renta equivalente, Y_i, se define como $Y_i=X_i/m(n_i)$, siendo $m(n_i)$ el intersección de Λ y Λ^* es el índice de Gini, mientras que la de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$ es el índice de Bonferroni. Este índice es el único elemento en que difieren $\mathbf{B}$ y Λ.

Cada una de estas familias caracteriza la curva a partir de la cual se ha generado y, en consecuencia, también determina la distribución, fijada la renta media. Desde el punto de vista operativo las cuatro familias se determinan mutuamente; es decir, cualquier índice de una de ellas se puede calcular a partir de los pertenecientes a cualquier otra. Sin embargo, en los aspectos normativos existen claras discrepancias no sólo entre los índices de las distintas familias, sino también entre los pertenecientes a una misma familia. Estas diferencias, consecuencia de su distinto grado de aversión a la desigualdad, se manifiestan tanto en el modo de ponderar la desigualdad local a lo largo de la distribución, como en su respuesta a las transferencias, según la diferencia de rango, o de renta, existente entre los individuos involucrados o dependiendo de la ubicación de éstos en la distribución.

Los elementos de la familia introducida en este trabajo, $\mathbf{B}^*$, complementan, en el aspecto normativo, a los B-momentos y desempeñan, respecto a ellos, un papel semejante al de los índices de Gini generalizados, Λ^*, en relación a los L-momentos. La unión $\mathbf{B} \cup \mathbf{B}^*$, al igual que $\Lambda \cup \Lambda^*$, está ordenada según el grado de aversión a la desigualdad de sus elementos, desde la indiferencia a la aversión máxima. Esta ordenación equivale a la existente entre sus respectivas distribuciones de preferencias sociales según su concavidad, la cual varía desde la correspondiente a la función identidad, concavidad nula, hasta la asociada a una función cuya gráfica, excepto en un punto, es una línea horizontal, concavidad máxima.

Por las propiedades de sus distribuciones de preferencias, todos los índices de $\mathbf{B}^*$ satisfacen el PSPT, como ocurre, excepto para el coeficiente de Gini, con los índices de Λ^*. Respecto al PTD, en cuya verificación también interviene la forma de la distribución sobre la que se aplica la medida de desigualdad, la clase de distribuciones para las que se satisface este principio se amplía al aumentar el grado de aversión a la desigualdad del índice. Por ello, como para un mismo valor del parámetro entero positivo que individualiza cada índice, la distribución de preferencias de B_h^* es más cóncava que la de L_h^*, el primero satisface el PTD sobre un conjunto de distribuciones que contiene estrictamente al conjunto sobre el que L_h^* cumple dicho principio.

Los elementos de $\mathbf{B}^*$ y de Λ^* no son, en general, comparables respecto a las propiedades relacionadas con el grado de preferencia por la igualdad que incorporan, ya que sus funciones de preferencias sociales pueden cortarse en algún punto interior del intervalo $[0,1]$. Únicamente son comparables los pares de índices $(B_h^*, L_h^*) \in \mathbf{B}^* \times \Lambda^*$ que corresponden a un

---

número de miembros equivalentes.

mismo valor del parámetro $h \in N$. Por lo tanto, ambas familias tienden hacia la aversión máxima a la desigualdad, pero lo hacen de forma diferente.

En las aplicaciones, la utilización de un conjunto reducido de medidas de desigualdad pertenecientes a una o varias de las familias Λ, Λ^*, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^*$ es adecuada para obtener información sobre la curva de Lorenz, o la curva de Bonferroni, de una distribución y evaluar su desigualdad relativa según diferentes criterios distributivos. La selección depende de la postura del evaluador social y de la naturaleza de cada caso empírico. Por ejemplo, los índices $B_1^* = B_1 = B$, $B_2 = L_1 = L_1^* = G$ y $B_3 = L_2$ informan sobre la curva de Bonferroni en sus aspectos descriptivos (valor medio, dispersión y forma, respectivamente). Si junto a ellos se selecciona un elemento de $\mathbf{B}$ y otro de $\mathbf{B}^*$, ambos con un valor suficientemente alto de su parámetro, se combina la información anterior con la de dos medidas muy diferentes en el ámbito normativo. Una es más sensible a la desigualdad existente en las rentas altas, mientras que la otra incorpora la actitud contraria, satisface el PSPT y, posiblemente, el PTD. Si con esos índices se tratase de ordenar un conjunto de distribuciones de rentas, es probable que se obtuviesen ordenaciones diferentes según el índice. Ese tipo de resultado sería muy revelador, teniendo en cuenta las características de cada medida.

Apéndice. **Demostraciones de las Proposiciones 1 a 9**.

Proposición 1. Si $B_X(p)$ es la curva de Bonferroni de la variable X, la asociada a X+a, a>0, viene dada por $B_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu_{X+a}}(\mu_X B_X(p) + a)$. Sustituyendo esta expresión en [5], resulta $B^*_{h,X+a} = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} B^*_{h,X}$, o bien $\mu_{X+a} B^*_{h,X+a} = \mu_X B^*_{h,X}$. □

Proposición 2. Para $|1-p|<1$ y, en particular, si $0<p\leq 1$, se verifica

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-(1-p)} = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} , \qquad \text{[A1]}$$

siendo la convergencia uniforme. De esta propiedad y de [17], se obtiene [18]

$$B_h^* = h\int_0^1 \frac{(1-p)^{h-1}}{p}(p - L(p))dp = h\sum_{i=h}^{\infty}\int_0^1 (1-p)^{i-1}(p - L(p))dp = h\sum_{i=h}^{\infty} L_i^* / i(i+1) ,$$

donde $h\sum_{i=h}^{\infty} 1/i(i+1) = 1$. La igualdad [19] es consecuencia de la anterior. □

Proposición 3. La obtención de [26] es inmediata al imponer la condición [23] a las ponderaciones que aparecen en la expresión de los índices, igualdad [14]. Las constantes de integración se determinan al imponer que las distribuciones de preferencias pasen por los puntos (0,0) y (1,1). Procediendo del mismo modo con los índices de $\mathbf{B}^*$ y utilizando [A1], resulta

$$\phi''_{B^*,h}(p) = -h(1-p)^{h-1}/p = -h\sum_{i=h}^{\infty}(1-p)^{i-1}\ ,\ |1-p|<1.$$

Al calcular dos veces las correspondientes primitivas e imponer las condiciones $\phi'_{B^*,h}(1) = 0$, $\phi_{B^*,h}(1) = 1$, se tiene:

$$\phi'_{B^*,h}(p) = h\sum_{i=h}^{\infty}(1-p)^{i}/i\ ,\ \phi_{B^*,h}(p) = 1 - h\sum_{i=h}^{\infty}(1-p)^{i+1}/i(i+1)\ .\ \square$$

Observación. También a partir de [A1], el cálculo de primitivas y la elección de las constantes de integración adecuadas permite obtener las igualdades

$$\ln(p) = -\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i}/i\ ,\ \ p\ln(p) - p + 1 = \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i+1}/i(i+1)\ ,\ \ |1-p|<1. \qquad \text{[A2]}$$

A la última se hace referencia en los comentarios a la Proposición 3.

Proposición 4. Como todas las funciones de $\mathbf{\Psi_B}$ y de $\mathbf{\Psi_{B^*}}$ son cóncavas en [0, 1] y pasan por los puntos (0,0) y (1,1), bastará probar que $\phi_{B,h}(p) > \phi_{B,h+1}(p)$, $\phi_{B^*,h}(p) < \phi_{B^*,h+1}(p)$, 0<p<1, h∈N. Si h=1, $\phi_{B,2}(p) - \phi_{B,1}(p) = p\ln(p) + p - p^2 < 0$, ya que $p\ln(p) < -p(1-p)$, 0<p<1, como consecuencia de [26] y de [A2]. Para h≥2, $\phi_{B,h+1}(p) - \phi_{B,h}(p) = pg(p)/h(h+1)$, siendo $g(p) = (hp^{h-1} - (h-1)p^{h} - 1)$ una función negativa si 0<p<1, dado que g es estrictamente decreciente en (0, 1), $g'(p) < 0$, y g(1)=0. Por otra parte, a partir de [27] se tiene

$$\phi_{B^*,h+1}(p) - \phi_{B^*,h}(p) = (1-p)^{h+1}/(h+1) - \sum_{i=h+1}^{\infty}(1-p)^{i+1}/i(i+1) >$$

$$> (1-p)^{h+1}/(h+1) - (1-p)^{h+2}\sum_{i=h+1}^{\infty}1/i(i+1) = (1-p)^{h+1}/(h+1) - (1-p)^{h+2}/(h+1) > 0\ ,$$

ya que $(1-p)^{h+2} > (1-p)^{h+3} > .....$, al ser 0<p<1. $\square$

Proposición 5. Para p=0 y p=1, es evidente que $\lim_{h\to\infty}\phi_{B,h}(p) = p$. Si 0<p<1, el resultado es consecuencia de que $\lim_{h\to\infty}h/(h-1) = 1$ y $\lim_{h\to\infty}p^{h} = 0$. Por otra parte, si p=0, $\lim_{h\to\infty}\phi_{B^*,h}(0) = 0$, ya que $\phi_{B^*,h}(0) = 1 - h\sum_{i=h}^{\infty}1/i(i+1) = 1 - h/h = 0$, h∈N, mientras que si 0<p≤1, se verifica

$$1-(1-p)^{h+1} \leq \phi_{B^*,h}(p) = 1-h\sum_{i=h}^{\infty}(1-p)^{i+1}/i(i+1) \leq 1\,. \qquad [A3]$$

Con ello, al ser $\lim_{h\to\infty}(1-p)^{h+1} = 0$, 0<p≤1, $\lim_{h\to\infty}\phi_{B^*,h}(p) = 1$ como consecuencia de la desigualdad anterior. □

Proposición 6. Teniendo en cuenta que la distribución de preferencias del índice L_h^*, h∈N, es $\phi_{L^*,h}(p) = 1-(1-p)^{h+1}$, 0≤p≤1, (Imedio y Bárcena, 2007), siguiendo el mismo razonamiento que en la Proposición 4, bastará probar que $\phi_{L^*,h}(p) \leq \phi_{B^*,h}(p)$, 0<p<1, desigualdad que coincide con [A3]. □

Proposición 7. (i) Sea δ una transferencia positiva de renta desde una pequeña fracción, dp, de la población situada en el p-ésimo percentil a los individuos de un percentil inferior p–s, s>0. De [24] se obtiene que para ε>0 suficientemente pequeño, la disminución del índice es

$$\nabla I_\phi(\delta) = \frac{1}{\mu}\int_{p-\varepsilon/2}^{p+\varepsilon/2}\delta\phi'(t)dt - \frac{1}{\mu}\int_{p-s-\varepsilon/2}^{p-s+\varepsilon/2}\delta\phi'(t)dt\ .$$

Aplicando el Teorema del valor medio y tomando el límite cuando ε→0, resulta

$$dI_\phi(\delta) = \frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(p)-\phi'(p-s)\right]dp\ .$$

Es evidente que I_ϕ satisface el PTPD, $dI_\phi(\delta)<0$, si y sólo si $\phi'(p)$ es estrictamente decreciente, lo que equivale a la condición $\phi''(p)<0$, que caracteriza la concavidad de φ. Además, I_ϕ cumplirá el PSPT si y sólo si

$$\frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(q)-\phi'(q-s)\right] < \frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(p)-\phi'(p-s)\right],$$

para todo q<p, lo que equivale al crecimiento estricto de la función ϕ'', es decir $\phi'''(p)>0$.

(ii) Sea δ una transferencia positiva de renta desde una pequeña fracción, dF(x), de los individuos con nivel de renta x a individuos con renta x–d, 0<d<x. Entonces, para ε>0 suficientemente pequeño, de [24] se sigue que la disminución del índice es

$$\nabla I_\phi(\delta) = -\frac{1}{\mu}\left[\int_{x-d-\varepsilon/2}^{x-d+\varepsilon/2}\delta\phi'(F(x))dF(x) - \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2}(-\delta)\phi'(F(x))dF(x)\right].$$

Aplicando el Teorema del valor medio y haciendo ε→0, resulta que el cambio relativo en el índice es

$$dI_\phi(\delta) = \frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(F(x)) - \phi'(F(x-d))\right]dF(x)\,.$$

Por lo tanto, $dI_\phi<0$ si y sólo si $\phi'(F(x))$ es una función estrictamente decreciente, lo que equivale a la concavidad de ϕ. Para que la disminución del índice sea mayor cuanto menor sea el nivel de renta x, para todo y<x se ha de cumplir

$$\frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(F(y)) - \phi'(F(y-d))\right] < \frac{\delta}{\mu}\left[\phi'(F(x)) - \phi'(F(x-d))\right],$$

para todo d>0. Haciendo $d\to 0$, lo anterior equivale, al ser ϕ cóncava, a que para y<x se cumpla $\phi''(F(y))F'(y) < \phi''(F(x))F'(x)$. Esto es, $\phi''(F(x))F'(x)$ ha de ser una función estrictamente creciente de x, por lo que $(\phi''(F(x))F'(x))' > 0$, x>0, de donde resulta [28]. □

Proposición 8. Para probar (i) e (ii) basta calcular, según la Proposición 7, la tercera derivada de la función de preferencia asociada a cada índice. Procediendo de ese modo, resulta

$$\phi'''_{B^*,h}(p) = (h(h-1)p(1-p)^{h-2} + h(1-p)^{h-1})/p^2 > 0\,,\ 0<p<1\,,\ h\in N\,.$$

$$\phi'''_{L^*,h}(p) = (h-1)h(h+1)(1-p)^{h-2} > 0\,,\ 0<p<1,\ h\geq 2\,.$$

$$\phi'''_{L^*,1}(p) = \phi'''_G(p) = 0\,,\ 0<p<1\,.$$

$$\phi'''_{L,h}(p) = \phi'''_{B,h+1}(p) = -(h-1)(h+1)p^{h-2} < 0,\ 0<p<1,\ h\geq 2\,.$$

Las propiedades (iii) e (iv) se obtienen al aplicar la condición [28] de la Proposición anterior. Así, el índice $L_h=B_{h+1}$, $h\in N$, satisface el PTD al aplicarlo sobre las distribuciones, F(x), tales que

$$-\frac{\phi'''_{L,h}(F(x))}{\phi''_{L,h}(F(x))} = -\frac{\phi'''_{B,h+1}(F(x))}{\phi''_{B,h+1}(F(x))} = \frac{1-h}{F(x)} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}\,,\ x>0\,,$$

condición equivalente a la concavidad estricta de la función $(F(x))^h$, como se puede comprobar mediante el cálculo de su segunda derivada. Análogamente, sobre F(x), el Gini generalizado L^*_h, $h\in N$, cumple el PTD si, y sólo si

$$-\frac{\phi'''_{L^*,h}(F(x))}{\phi''_{L^*,h}(F(x))} = \frac{h-1}{1-F(x)} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}\,,\quad x>0\,.$$

La desigualdad anterior equivale a la convexidad estricta de $(1-F(x))^h$. La condición [28] aplicada al índice de Bonferroni es

$$-\frac{\phi'''_B(F(x))}{\phi''_B(F(x))} = \frac{1}{F(x)} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}\,,\quad x>0\,,$$

que se verifica si, y sólo si, ln(F(x)) es estrictamente cóncava. Finalmente, para los índices B_h^*, h≥2, el cumplimiento del PTD se expresa mediante

$$-\frac{\phi'''_{B^*,h}(F(x))}{\phi''_{B^*,h}(F(x))} = \frac{h-F(x)}{F(x)(1-F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}, \quad x>0,$$

mientras que para la convexidad estricta de la función $(1-\ln(F(x)))^h$, al imponer que su derivada segunda sea positiva, se ha de cumplir

$$\frac{h-\ln(F(x))}{F(x)(1-\ln(F(x)))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}, \quad x>0.$$

La propiedad (iv) es consecuencia de lo anterior y de la desigualdad

$$\frac{h-\ln(F(x))}{1-\ln(F(x))} < \frac{h-F(x)}{1-F(x)}, \quad x>0. \quad \square$$

Proposición 9. Basta tener en cuenta la condición [28] junto a la relación

$$-\frac{\phi'''_{B^*,h}(F(x))}{\phi''_{B^*,h}(F(x))} = \frac{h-F(x)}{F(x)(1-F(x))} > -\frac{\phi'''_{L^*,h}(F(x))}{\phi''_{L^*,h}(F(x))} = \frac{h-1}{(1-F(x))}, \quad x>0. \quad \square$$

Referencias.

Aaberge, R. (2000), “Characterizations of Lorenz curves and income distributions”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 639-653.

Aaberge, R. (2007), “Gini’s nuclear family”, *Journal of Economic Inequality*. Pendiente de publicación.

Aaberge, R., U. Colombino y S. Strom (2004): “Do more equal slices shrink the cake? An empirical evaluation of tax-transfer reform proposals in Italy”, *Journal of Population Economics* 17, pp. 767-785.

Atkinson, A. B. (1970), “On the measurement of inequality”, *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Bárcena, E. y L. J. Imedio (2007): “The Bonferroni, Gini and De Vergotini indices. Inequality, welfare and deprivation in the European Union in 2000”. *Second Meeting of the Society for the Study of Economic Inequality*. Berlín, 2007.

Ben Porath, E. e I. Gilboa (1994), “Linear measures, the Gini index, and the income equality trade-off”, *Journal of Economic Theory* 18, pp. 59-80.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978), “Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare”, *Journal of Economic Theory* 18, pp. 59-80.

Bonferroni, C. E. (1930): *Elementi di statistica generale*, Libreria Seber, Firenze.

Chakravarty, S. R. (2005): “The Bonferroni Indices of Inequality”, *International Conference in Memory of C. Gini and M. O. Lorenz*, Università degli Studi di Siena, (http://www.unisi.it/event/GiniLorenz05).

Chakravarty, S. R. y P. Muliere (2003): “Welfare indicators: A review and new perspectives. Measurement of inequality”, *Metron-International Journal of Statistics*, 61: 1-41.

Dalton, H. (1920), "The measurement of inequality of incomes", *Economic Journal* 30, pp. 348-361.

Dardanoni, V. y P. J. Lambert (1988), "Welfare rankings of income distributions: a role for the variance and some insights for tax reforms", *Social Choice and Welfare* 5, pp. 1-17.

Donaldson, D. y J. A. Weymark (1980), "A single parameter generalization of the Gini indices of inequality", *Journal of Economic Theory* 22, pp. 67-86.

Donaldson, D. y J. A. Weymark (1983), "Ethically flexible indices for income distributions in the continuum", *Journal of Economic Theory* 29, pp. 353-358.

EUSILC XUDB 2004 Version 2004.1 from 25-05-06.

Gini, C. (1912), "Variabilità e mutabilità", Studi Economico-giuridici, Università di Cagliari, vol 3-2, pp. 1-158.

Giorgi, G. M. (1998): "Concentration index, Bonferroni", *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley, New York: 141-146.

Giorgi, G. M. y M. Creszenci (2001): "A look a the Bonferroni inequality measure in a reliability framework", *Statistica*, 41: 571-573.

Imedio Olmedo, L. J. (2007): "Algunas consideraciones sobre el índice de Bonferroni", *Estadística Española*, Volumen 49, Nº 164. Pags. 103-135.

Imedio Olmedo, L. J. y E. Bárcena Martín (2007): "Dos familias numerables de medidas de desigualdad", *Investigaciones Económicas* XXX(1), pp. 191-217.

Kakwani, N. C. (1980), "On a class of poverty measures", *Econometrica* 48, pp. 437-446.

Kendall, M., A. Stuart y K. Ord (1994), *Advanced theory of Statistics*, Vol. 1, Edward Arnold, London.

Kleiber, C. y S. Kotz (2002): "A characterization of income distributions in terms of generalizad Gini coefficients", *Social Choice and Welfare*, 19, pp. 789-794.

Kolm, S. C. (1976), "Unequal inequalities, I, II", *Journal of Economic Theory* 12, pp. 416-442; 13, pp. 82-111.

Mehran, F. (1976), "Linear measures of inequality", *Econometrica* 44, pp. 805-809.

Muliere, P. y M. Scarsini (1989), "A note on stochastic dominance and inequality measures", *Journal of Economic Theory* 49, pp. 314-323.

Newbery, D. M. (1970), "A theorem of the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory* 2, pp. 264-266.

Nygard, F. y A. Sandström (1981): *Measuring income inequality*, Almqvist and Wicksell International, Stockholm.

Rawls, J. (1971), *A theory of justice*, Harvard University Press, Cambridge.

Sen, A. K. (1973), *On economic inequality*, Clarendon Press, Oxford.

Shorrocks, A. F. (1980), "The class of additively decomposable inequality measures", *Econometrica* 48, pp. 613-625.

Shorrocks, A. F. y J. E. Foster (1987), "Transfer sensitive inequality measures", *Review of Economic Studies*, 54(3), pp. 485-497.

Tarsitano, A. (1990): "The Bonferroni index of income inequality", en C. Dagum y M. Zenga (eds.), *Income and Wealth distribution, Inequality and Poverty*, Springer-Verlag, Heidelberg: 228-242.

Yaari, M. E. (1987), "The dual theory of choice under risk", *Econometrica* 55, pp. 99-115.

Yaari, M. E. (1988), “A controversial proposal concerning inequality measurement”, *Journal of Economic Theory* 44, pp. 381-397.

Yitzhaky, S. (1983), “On an extension of the Gini index”, *International Economic Review* 24, pp. 617-628.

Zoli, C. (1999), “Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index”, *Social Choice and Welfare* 16, pp. 183-196.

Abstract

The purpose of this paper is to propose a countable family of inequality measures obtained from the Bonferroni curve that can be considered analogous to a cumulative distribution function. This family characterizes the income distribution, given the mean income, and its formal expressions has similarities compared with other known families of inequality indices. Even though each of the families analysed characterize each other, their members introduce different value judgements in the measurement of inequality and welfare. We follow the Yaari approach (1987, 1988) in the study of the normative aspects. All this allow us, on the one hand, to compare and, in some cases, order the indices according to their level of inequality aversion and, on the other hand, to determine if the indices fulfilled Principles of Transfers more demanding than the one of Pigou-Dalton.
Key words: Lorenz curve, Bonferroni curve, inequality aversion.
Classification JEL: C10, D31, I38.