

XI Encuentro de Economía Pública  
Barcelona, 5-6 Febrero 2004

**“ Redes neuronales y eficiencia: aplicación al servicio de recogida de basuras ”**

Francisco J. Delgado Rivero <sup>†</sup>

Departamento de Economía

Universidad de Oviedo

**Abstract**

En este trabajo se aborda la medición de eficiencia a través de las técnicas de redes neuronales artificiales (RNA). En la primera parte, se presentan las características más sobresalientes de estos modelos no lineales. A continuación se revisan sintéticamente las técnicas habituales empleadas en la literatura de eficiencia, paramétricas y no paramétricas (DEA y FDH). Junto a ellas se proponen las RNA para aproximar la frontera, y se discuten las ventajas e inconvenientes en un análisis comparativo. Finalmente, se aplican las distintas metodologías al servicio de recogida de basuras a partir de una muestra de municipios catalanes, cuyos resultados son comparados a través de coeficientes de correlación y rangos.

**Palabras clave:** redes neuronales, eficiencia, frontera, DEA, servicios públicos locales

**Clasificación JEL:** C14, C45, D24, H49, H72

**1. INTRODUCCIÓN**

El análisis de eficiencia es un campo de creciente relevancia en el ámbito de la actividad económica general y sin duda en el sector público en particular (Fox, 2002; Lovell y Muñiz, 2003), principalmente en su función de prestación de bienes y servicios públicos.

Los argumentos apuntados para justificar el análisis de eficiencia en el sector público son diversos. Entre otros, la magnitud de la actividad pública en el conjunto de la economía, la ausencia de competencia en gran parte de los servicios públicos

---

<sup>†</sup> Este trabajo es fruto de la investigación "Medición de eficiencia con redes neuronales artificiales: aplicación al servicio de recogida de basuras", financiada por el *Instituto de Estudios Fiscales*. El autor desea expresar su agradecimiento a Nuria Bosch, Francisco Pedraja y Javier Suárez Pandiello por la cesión de la base de datos empleada en la parte empírica del trabajo.

Correo electrónico: fdelgado@correo.uniovi.es.

Dirección postal: Facultad de CC. Económicas y Empresariales, Departamento de Economía, Avda del Cristo, s/n, 33071 Oviedo (España).

prestados, diferentes funciones objetivo que el sector privado, necesidad de justificar las actuaciones en un contexto presupuestario cada vez más restrictivo...

En este trabajo se aborda la medición de eficiencia técnica incorporando a los dos grandes bloques de técnicas tradicionales, paramétricas y no paramétricas, una tercera vía a través de las redes neuronales artificiales (RNA), técnicas que pueden ser consideradas semi no paramétricas. Estas técnicas, muy extendidas en otros campos en el ámbito económico (Zhang, Patuwo y Hu, 1998; Vellido, Lisboa y Vaughan, 1999), apenas han sido empleadas en este contexto.

Las técnicas paramétricas, determinísticas o estocásticas, presentan inconvenientes como la necesidad de especificar una forma funcional concreta, Cobb-Douglas y translog son las más habituales, decisión casi siempre complicada y no exenta de riesgos asociados a una posible incorrecta especificación. Sin embargo, se determinan fronteras estocásticas y es posible llevar a cabo contrastes de validez de modelo, capacidad explicativa, etc.

Por otra parte, el análisis envolvente de datos (DEA), determinístico, carece de la capacidad de contrastar la validez del "modelo". En positivo, estas técnicas destacan por su flexibilidad al no imponer una cierta relación a priori, aunque será necesario adoptar unos supuestos sobre convexidad y rendimientos a escala.

Las RNA son modelos estocásticos (semi) no paramétricos capaces de aproximar funciones (Hornik, Stinchcombe y White, 1989) y sus derivadas (Hornik, Stinchcombe y White, 1990). Serán útiles en entornos donde el proceso generador de datos es desconocido y/o se presentan no linealidades. De este modo, las RNA se presentan teóricamente como una opción más en la aproximación de funciones de producción (y de coste) y por tanto, en las estrategias de medición de eficiencia.

Tras discutir la aplicación de las RNA en eficiencia, se lleva a cabo la aplicación en el ámbito de los servicios públicos locales, concretamente el servicio de recogida de basuras. Para ello se utilizará la base de datos de municipios catalanes referida a 1998 empleada por Bosch, Pedraja y Suárez-Pandiello (2001). Se comparan diversas alternativas para la aproximación de funciones frontera. Paramétricas, función Cobb-Douglas y translog, como función flexible. No paramétricas, DEA, envolvente convexa, y FDH, que relaja el supuesto de convexidad. Y semi no paramétricas, RNA.

Uno de los principales objetivos de este estudio consiste en determinar la magnitud de las posibles diferencias en las ordenaciones de los servicios municipales con las distintas aproximaciones, así como los resultados medios, más allá de las diferencias cuantitativas de los indicadores individuales de eficiencia. Para ello se llevará a cabo

un análisis de correlación, a través del coeficiente de Pearson, y correlación de rangos, mediante el coeficiente de Spearman.

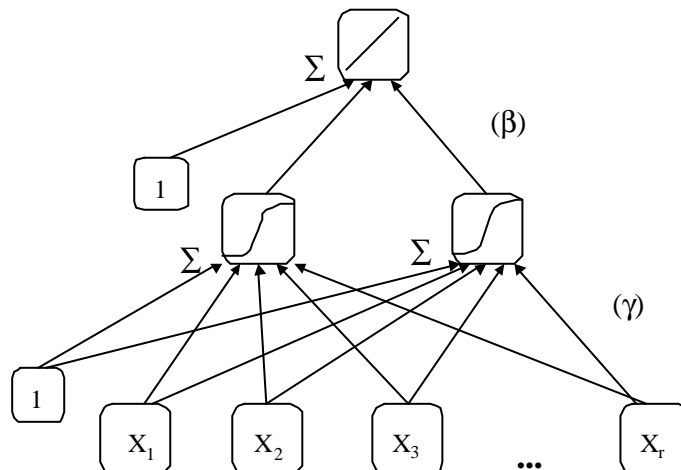
El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección segunda se presentan las características básicas de las RNA. La sección tercera está dedicada a las distintas técnicas de medición de eficiencia, que son revisadas sintéticamente, con especial atención a las RNA. Además, se revisan los estudios de RNA relacionados con la medición de la eficiencia. En la sección cuarta se recoge la aplicación al servicio de recogida de basuras. El trabajo se cierra con una síntesis de las conclusiones alcanzadas y los resultados detallados por municipios.

## 2. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

Las RNA<sup>1</sup> son modelos no lineales de gran flexibilidad donde las relaciones entre variables se estudian a partir de las observaciones, tratándose de un aprendizaje orientado por los datos. Las RNA constan habitualmente de tres capas de unidades elementales o neuronas: capa de entradas, donde se introducen los inputs, capa intermedia u oculta, y capa de salidas, que proporciona las estimaciones de la red.

La red neuronal más empleada es la red *feedforward* o perceptrón multicapa (MLP, *Multi-Layer Perceptron*), donde las unidades de cada capa están conectadas con las unidades de la capa siguiente (figura 1).

Figura 1. Red neuronal típica con 1 output



Siguiendo la notación de Kuan y White (1994), la red *feedforward* con una capa intermedia con  $r$  inputs,  $q$  nodos ocultos y 1 output puede expresarse como:

<sup>1</sup> Obras de referencia general en RNA son Hertz, Krogh y Palmer (1991), Bishop (1995) y Ripley (1996). Desde un enfoque estadístico y econométrico, destacan los trabajos de White (1989), Cheng y Titterington (1994), Kuan y White (1994), Warner y Misra (1996) y Zapranis y Refenes (1999).

$$f(x, \mathbf{q}) = F(\mathbf{b}_0 + \sum_{j=1}^q \mathbf{b}_j G(\mathbf{x}' \mathbf{g}_j)) \quad (1)$$

donde:

$\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_r)'$ ;  $j = 1, \dots, q$ , recoge la unidad oculta;  $\mathbf{q} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q, \mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_q)$

La función de activación en la capa de salidas será habitualmente la función lineal o identidad, mientras que la no linealidad, y por tanto la capacidad de aproximación universal, se introduce en la capa intermedia, a menudo con la función sigmoideal<sup>2</sup>:

$$G: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1] \left| G(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}}, a \in \mathfrak{R} \quad (2) \right.$$

También se emplea con frecuencia la función tangente hiperbólica *tanh* que, en ocasiones, presenta mayor rapidez en la convergencia del algoritmo (Bishop, 1995).

$$G': \mathfrak{R} \rightarrow [-1,1] \left| G'(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}, a \in \mathfrak{R} \quad (3) \right.$$

Por tanto, la expresión (1) resultante será:

$$f(x, \mathbf{q}) = \mathbf{b}_0 + \sum_{j=1}^q \mathbf{b}_j G(\mathbf{x}' \mathbf{g}_j) \quad (4)$$

y el número de parámetros a estimar ( $p$ ) en la red:

$$p = (r + 2)q + 1 \quad (5)$$

En las RNA surgen dos cuestiones principales: la selección de la arquitectura de la red y el entrenamiento o aprendizaje.

La selección de la arquitectura de la red, del modelo en términos econométricos, consiste básicamente en determinar los inputs, tratamiento de los datos, tamaño de la red y función de activación. En general se llevan a cabo transformaciones de los datos iniciales, como normalización a  $[-1,1]$ ,  $[0,1]$ , en general  $[a,b]$ , no estrictamente necesarias pero provocan que el aprendizaje sea más rápido, disminuya la probabilidad de alcanzar un mínimo local y se requiera menos unidades ocultas. Además, el output debe ser normalizado debido a la función de activación empleada. Las neuronas intermedias ( $q$ ) se determinan habitualmente a través de procesos de "prueba y error"<sup>3</sup>, entrenando la red con  $q = 1, 2, 3, 4, \dots$ , y siendo necesario acotar la dimensión del modelo para mantener suficientes grados de libertad.

<sup>2</sup> Los resultados obtenidos respecto a la propiedad de aproximación universal concluyen que estas funciones de transferencia deben cumplir unas condiciones muy suaves: funciones acotadas, diferenciables y monótonas crecientes. Así, tanto en la función logística como la *tanh*, su elección está justificada, además, por la facilidad para obtener las derivadas primeras, claves en el proceso de estimación o aprendizaje.

<sup>3</sup> Es frecuente utilizar medidas de información para la selección del modelo como SIC –*Schwartz Information Criterion* o AIC –*Akaike Information Criterion*-. No obstante, existen en la literatura numerosas propuestas *ad hoc* para establecer las unidades ocultas: siendo  $n$  el número de observaciones,  $2r+1$ ,  $2r$ ,  $r$ ,  $r/2$ ,  $r^{1/2}$ ,  $n/5r$ .

El entrenamiento de la red o estimación del modelo consiste en la búsqueda de los parámetros que minimicen alguna función de coste, habitualmente el error cuadrático. En el ámbito de las redes el protagonismo recae en el algoritmo *backpropagation* o algoritmo BP (Rumelhart, Hinton y Williams, 1986), o regla delta generalizada, proceso de descenso de gradiente. Siendo  $k$  la iteración:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \mathbf{h} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}^k \quad (6)$$

donde el coeficiente de aprendizaje  $\mathbf{h}$ , constante o variable (por ejemplo  $1/k$ ), previene cambios bruscos en los parámetros del proceso. En general toma valores entre 0 y 1, y normalmente se toma un valor constante y reducido<sup>4</sup>. Para iniciar el proceso, como valores iniciales de los parámetros se toman números aleatorios, habitualmente muy bajos, por ejemplo en  $[-0,1,0,1]$ . Con objeto de prevenir la detención del entrenamiento en mínimos locales, es frecuente repetir el aprendizaje con distintos parámetros iniciales. El error se propaga así hacia atrás corrigiendo los valores de los pesos hasta que se alcance el criterio de parada establecido, normalmente basado en un cierto número (elevado) de iteraciones o un error admisible.

El algoritmo BP ha sido muy criticado por su lentitud, el problema de los mínimos locales y su sensibilidad tanto a valores iniciales del proceso iterativo como al valor del coeficiente de aprendizaje  $\mathbf{h}$ . Una de las mejoras propuestas consiste en añadir el término “momentum”<sup>5</sup>  $\mathbf{m}$  para tratar el problema de los mínimos locales, incorporando un porcentaje del cambio experimentado por la ponderación en la iteración anterior:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \mathbf{h} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}^k + \mathbf{m} \Delta \mathbf{q}_{k-1} \quad (7)$$

Efectuado el entrenamiento, se somete la red al test con datos no empleados inicialmente para verificar su validez o “capacidad de generalización”.

La estimación también puede realizarse a través de técnicas de optimización de mínimos cuadrados no lineales. El empleo del algoritmo Levenberg-Marquardt (L-M) en redes neuronales (Hagan y Menhaj, 1994) está justificado, entre otras razones, por su mayor rapidez respecto al BP y su facilidad de cómputo.

Por último, consideramos que la disponibilidad de un software apropiado, es decir, fiable, fácil de usar, de uso generalizado, etc., es crucial para la extensión de esta

---

<sup>4</sup> Por ejemplo Cooper (1999) señala que el valor estará habitualmente comprendido entre 0,01 y 0,5.

<sup>5</sup> Este término estará también comprendido entre 0 y 1, y será constante o decreciente con las iteraciones del proceso de estimación. Con frecuencia asume valores entre 0,7 y 0,9 (Cooper, 1999).

técnica de modelización. Sin embargo, en el ámbito neuronal, no existen a nuestro juicio programas de referencia general<sup>6</sup> que implementen las RNA.

### 3. MEDICIÓN DE EFICIENCIA TÉCNICA CON REDES NEURONALES

El análisis de la eficiencia en producción (Farrell, 1957) constituye un área de constante interés en Economía, al tratar el uso adecuado de los escasos recursos con la tecnología disponible. Por tanto, dada una tecnología, se trata de obtener el máximo output dados unos inputs, o emplear los mínimos inputs para alcanzar cierto nivel de output. Frente a este concepto de eficiencia técnica, surge la eficiencia asignativa cuando la tecnología varía y se toma la mejor combinación de inputs dados los precios de los mismos. Farè, Grosskopf y Lovell (1985), Fried, Lovell y Schmidt (1993), Coelli, Prasada Rao y Battese (1998), Kumbhakar y Lovell (2000) y Álvarez (2001) constituyen interesantes obras de referencia general en el análisis de eficiencia.

En este análisis resulta crucial la estimación de la función frontera, para posteriormente comparar las unidades observadas con la frontera estimada y determinar así la ineficiencia. Respecto a la estimación de la frontera, tradicionalmente se ha realizado por dos grandes vías, paramétricas –determinísticas y estocásticas- y no paramétricas, cuyos detalles pueden verse en las obras referenciadas anteriormente. En síntesis, las técnicas paramétricas presentan algunos inconvenientes, como la necesidad de información fiable sobre la tecnología para determinar la forma funcional, y su aplicación es complicada en caso de múltiples outputs. Por otro lado, en las técnicas no paramétricas o de programación matemática no se supone una forma funcional concreta, sino que los índices de eficiencia de las unidades productivas deben ser estimados en el marco de los supuestos adoptados sobre la tecnología, habitualmente desconocida, a partir de los datos disponibles. En este contexto destaca por su amplia utilización el Análisis Envoltente de Datos DEA (Charnes, Cooper y Rhodes, 1978)<sup>7</sup>. Otra alternativa es la técnica *Free Disposal Hull* FDH (Deprins, Simar y Tulkens, 1984). Las técnicas no paramétricas son defendidas por su flexibilidad, y sus posibilidades en situaciones multi-output, así como su adaptación a contextos en que los precios no son demasiado fiables, como a menudo

---

<sup>6</sup> En [ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html](http://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html) se recoge la mayor parte de este software, tanto gratuito como comercial. Entre ellos podemos citar Neural Connection -módulo de SPSS-, NeuroShell, NeuroSolutions, Neuralyst, SNNS -Stuttgart Neural Network Simulator-, etc. Por otro lado, es bastante habitual trabajar con programación propia del investigador en programas estadísticos generalizados, como por ejemplo en Matlab, que también dispone de un módulo específico de redes neuronales, Neural Network Toolbox, al igual que RATS, Statistica, o SAS.

<sup>7</sup> Charnes, Cooper y Rhodes (1978) propusieron el modelo con rendimientos constantes a escala, también conocido por CCR. Posteriormente, Banker, Charnes y Cooper (1984) lo extendieron a rendimientos variables a escala, dando lugar al modelo BCC.

ocurre en el sector público. Los detractores de estas técnicas señalan su carácter determinístico<sup>8</sup> y su excesiva flexibilidad.

Además de estas dos alternativas tradicionales, existe una tercera opción basada en las redes neuronales, que pueden verse como “semi no paramétricas”. En la tabla 1 se recoge una síntesis de los planteamientos y resultados alcanzados en los diferentes estudios. Se advierte cierta escasez de modo que aún es necesaria una importante investigación adicional tanto en las vertientes teórica como empírica, con aplicaciones a datos reales y simulaciones para analizar los posibles efectos de las decisiones a tomar en la elaboración de la red neuronal.

Las redes neuronales utilizadas en este trabajo son modelos de regresión no lineales. Por tanto, aproximan la función promedio a partir de las observaciones disponibles a través del aprendizaje. En este proceso, se persigue minimizar el error o distancia entre la observación y la red, de modo que habrá residuos positivos y negativos. Así, la red neuronal resultante del ajuste inicial de los datos no constituirá una frontera de producción, sino una función de producción no lineal. No obstante, es posible determinar unas medidas iniciales de “eficiencia” a partir de la función estimada, modelo denominado RNA1.

- A partir de la red estimada – RNA1.

En este primer caso las medidas de eficiencia de cada unidad se establecen respecto al comportamiento medio. Por tanto, los indicadores serán superiores a 1 o 100% cuando la unidad evaluada presente un comportamiento superior al promedio, e inferiores cuando sean “ineficientes”. Así, no es estrictamente comparable con las medidas de técnicas alternativas. Esta sencilla medida es empleada en Athnassopoulos y Curram (1996) como “eficiencia no estandarizada”  $E^{NE}$ :

$$E_i^{NE} = \frac{y_i}{\hat{y}_i} \quad (8)$$

Para alcanzar una verdadera frontera de producción existen las siguientes opciones:

- Desplazamiento de la red según mayor residuo positivo – RNA2.

Bajo esta propuesta se procede del mismo modo que en mínimos cuadrados ordinarios corregidos (COLS). La corrección por el máximo error positivo del ajuste estará entonces influenciada también por la posible existencia de outliers, y dará lugar a una frontera determinística. Ahora los indicadores estarán comprendidos entre 0 y 1,

---

<sup>8</sup> Sin embargo, la aplicación de métodos *bootstrap* permite llevar a cabo inferencias en contextos no paramétricos. Véase por ejemplo el trabajo de L. Simar y P.W. Wilson en Alvarez, coord. (2001, cap. 14) para la técnica DEA. Además, se ha desarrollado la técnica DEA estocástica, si bien no se encuentra muy extendida.

valor máximo asignado a la unidad empleada en la corrección. Athnassopoulos y Curram (1996) denominan a esta segunda medida “eficiencia estandarizada”  $E^E$ :

$$E_i^E = \frac{y_i}{\hat{y}_i + \max_i e_i} \quad (9)$$

Respecto a DEA, la eficiencia no estandarizada ( $E^{NE}$ ) tiende a sobre-estimar las medidas, y la eficiencia estandarizada ( $E^E$ ) a sub-estimar los indicadores.

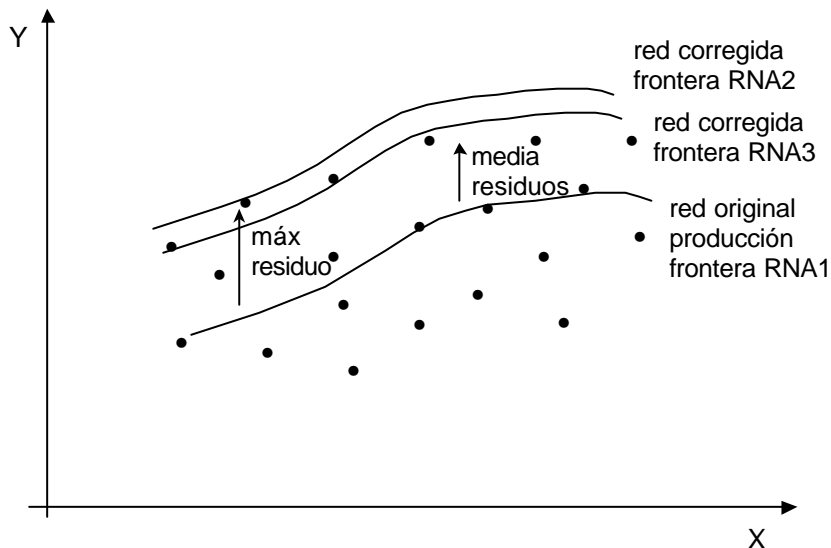
Costa y Markellos (1997) utilizan una muestra sintética originada inyectando ruido normal a la muestra original para el entrenamiento, y la muestra observada para la validación cruzada (*cross-validation*). Si para la corrección en COLS “se toma el mayor residuo positivo de la muestra generada, la frontera resultante será estocástica”.

- Desplazamiento de la red según media mayores residuos positivos – RNA3.

Para tratar de atenuar el efecto del mayor residuo positivo sobre las medidas de eficiencia, en este trabajo proponemos la corrección de la red estimada según el valor medio de los mayores residuos positivos correspondientes a un porcentaje de observaciones. En concreto, se tomará el 5%. Así, las medidas de eficiencia quedarán determinadas por la expresión:

$$E_i^{E'} = \frac{y_i}{\hat{y}_i + med(e_i^{5\%})} \quad (10)$$

Figura 2. Función de producción y fronteras con redes neuronales



En este caso, habrá unas pocas observaciones con indicadores ligeramente superiores a 1 o 100%, que serán corregidas para alcanzar tales valores al ser consideradas eficientes. Respecto a RNA2, únicamente se producirá un aumento del indicador, sin apenas efectos sobre la ordenación de unidades de producción.

- Mediante una red “sobrep parametrizada” – RNA4.



Bajo esta propuesta (Costa y Markellos, 1997) la red es capaz de ajustarse de modo creciente a las observaciones, hasta alcanzar un cierto ratio señal/ruido. Si el ajuste es muy severo, el resultado será similar al de la técnica envolvente de datos. Posteriormente, la ineficiencia se determina por distancia de la observación a la frontera.

Tabla 1. Trabajos de RNA relacionados con medición de eficiencia

Trabajo	Ámbito	Características y Resultados
Joerding, Li, Hu y Meador (1994)	Funciones de producción	Imposición propiedades sobre tecnología productiva -positiva, monótona, cuasi-cóncava- a nivel teórico a través restricciones en pesos red. RNA características similares a formas flexibles de Fourier. Estimación simultánea de función de producción y sistema de demanda de inputs. No es posible imponer rendimientos constantes a escala para todo $x$ ya que exige funciones de activación lineales, invalidando aproximación universal; proponen aproximación -añadir término a suma de cuadrados-.
Athnassopoulos y Curram (1996)	Redes neuronales Vs DEA	Datos simulados: Cobb-Douglas, 2 inputs y 1 output. Distribuciones ineficiencias: semi-normal y exponencial. Resultado general: DEA superior a RNA en medición ineficiencia. RNA similar a DEA en ordenación unidades. Aplicación banca. Multioutput: 4 inputs y 3 outputs. En ordenación, RNA más semejante a DEA rendimientos constantes que a DEA rendimientos variables.
Costa y Markellos (1997)	Eficiencia transporte	Aplicación: metro de Londres, datos en serie temporal –anuales, 1970-1994-, 2 inputs -flota y trabajadores- y 1 output -kms.- Creación de una muestra sintética para la estimación de la frontera con RNA, añadiendo ruido $N(0, \sigma^2)$ a los datos iniciales. 2 opciones frontera RNA: a) una vez estimada la red, proceder como en COLS; b) mediante una red “sobreparametrizada” hasta cierto ratio señal/ruido RNA resultados similares a COLS y DEA, pero presentan ventajas como facilitar toma decisiones, estudiar impacto de rendimientos variables a escala Vs rendimientos constantes, detección áreas congestión.
Curram, Athnassopoulos y Shale (1999)	Redes neuronales Vs DEA	Propuesta de red neuronal para estimar una frontera minimizando errores de un solo signo Datos simulados Buen comportamiento RNA con grandes muestras y errores de medida.
Guermat y Hadri (1999)	Funciones frontera – estocásticas-	Simulación Monte Carlo. Datos generados a partir Cobb-Douglas, CES y generalizada Leontief. Funciones consideradas: RNA, Cobb-Douglas, translog, CES y generalizada de Leontief. 2 inputs. Comparación eficiencia: media, máxima y mínima, dispersión, correlación estimada y real. RNA supera Translog y Cobb-Douglas -si se simula una función translog-; resultados no satisfactorios cuando los datos se generan a partir de funciones de Leontief o CES por problemas de especificación. Incorrecta especificación forma funcional –con RNA y translog- no afecta significativamente a eficiencia media, máxima y mínima, pero sí a ineficiencias puntuales y ordenaciones.
Fleissig, Kastens y Terrell (2000)	Funciones de coste	Comparación RNA, forma flexible Fourier, AIM, translog y Leontief generalizada. Datos simulados a partir de funciones CES y Box-Cox generalizadas. RNA peor Fourier al no imponer simetría y homogeneidad -incorporadas en Fourier y AIM-. Dificultades de convergencia en imposición homogeneidad y simetría en RNA.
Santín, Delgado y Valiño (2003)	Funciones de producción	Simulación función producción no lineal Comparación técnicas estocásticas, DEA y RNA Resultados RNA iguales o superiores, robustez ante cambios en número unidades y ruido inyectado

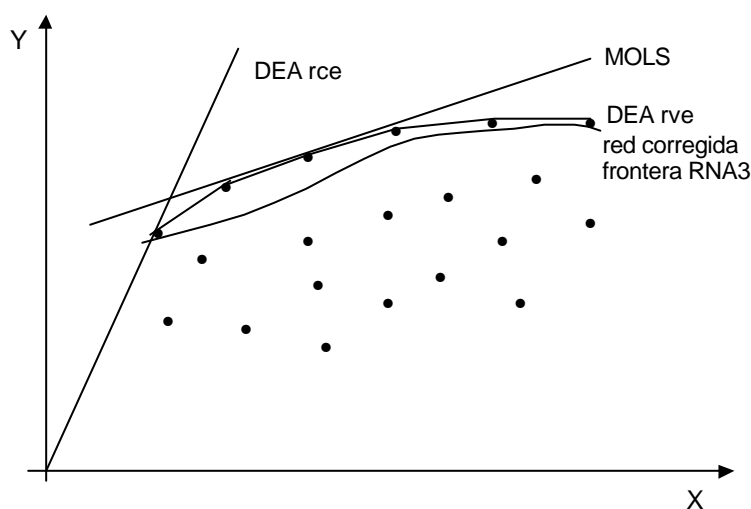
- Red que minimiza errores de un solo signo – RNA5.

La propuesta de Curram, Athnassopoulos y Shale (1999) consiste en intervenir en el proceso de aprendizaje de modo que el ajuste de la red conduzca a una frontera de producción. El objetivo por tanto consiste en adaptar el aprendizaje para reducir el impacto de aquellos errores asociados a observaciones situadas por debajo de la red ajustada, siendo el error del output a minimizar:

$$\begin{cases} (y - \hat{y})^2 & \text{si } \hat{y} \leq y \\ f(y - \hat{y})^2 & \text{si } \hat{y} > y \end{cases} \quad (11)$$

donde  $f$  es el factor de escala del error, comprendido entre 0 y 1. Los resultados obtenidos dependerán de la elección de este nuevo parámetro. Si se toma un valor próximo a 1, el aprendizaje apenas será modificado, con lo que se alcanzará la función promedio. Cuanto más próximo esté a 0, mayor será la tendencia a elevar la función estimada por la red hacia la frontera. Esta sensibilidad hacia este nuevo parámetro complica aún más el proceso de “prueba y error” empleado en el contexto de las redes neuronales. Dado que se trata de un novedoso planteamiento y a pesar de su gran atractivo, consideramos que aún es pronto para seguir esta alternativa, por lo que no será empleada en la aplicación de la cuarta sección.

Figura 3. Alternativas para estimación de funciones frontera



En la figura 3<sup>9</sup> se representan genéricamente las posibilidades de estimación de la frontera con un input y un output. En ella se trata de recoger el carácter lineal de la aproximación econométrica y la gran flexibilidad de la RNA, capaz de detectar áreas de congestión. Por el contrario, las RNA carecen de estudios teóricos en este ámbito y presenta otros inconvenientes como la interpretación de los resultados y el requisito de recursos técnicos para su estimación.

<sup>9</sup> Figuras similares se encuentran en Costa y Markellos (1997) y Curram, Athnassopoulos y Shale (1999).

#### 4. APLICACIÓN AL SERVICIO DE RECOGIDA DE BASURAS

La eficiencia en el servicio de recogida de basuras ha sido objeto de numerosas investigaciones. Bosch, Pedraja y Suárez-Pandiello (2001) sintetizan las principales características de 16 trabajos en el marco de este servicio público local (como Cubbin, Domberger y Meadowcroft, 1986). Recientemente en nuestro país, en Bosch, Pedraja y Suárez-Pandiello (2001) se emplea un modelo DEA en 3 etapas, y consideran 2 outputs, la cantidad de basura recogida y un indicador relacionado con la calidad, la frecuencia semanal de recogida. Además de la eficiencia técnica, estudian la eficiencia de costes, considerando como input el coste total del servicio.

##### 4.1 Base de datos

La base de datos contiene información sobre el servicio de recogida de basuras de 72 municipios catalanes de más de 5.000 habitantes para el año 1998. Concretamente se dispone del output residuos orgánicos recogidos (RES), y de los inputs capacidad de los contenedores (CON), capacidad de la flota de vehículos (VEH) y número de horas trabajadas por los empleados del servicio (TRA).

En la tabla 2 se presentan las estadísticas descriptivas de las variables. En el análisis de correlaciones, se detecta una relación lineal positiva fuerte entre los inputs contenedores y flota, 0,817, cuestión que deberá ser tenida en cuenta en la fase de modelización y determinación de la frontera.

Tabla 2. Estadística Descriptiva

	Output RES	Input 1 CON	Input 2 VEH	Input 3 TRA
Mínimo	1.506,20	67,20	4,00	480,00
Máximo	88.309,00	5.279,15	329,00	420480,00
Media	13.321,62	655,47	49,53	24088,50
Desv típica	18.015,36	970,33	61,82	52709,46
Coef Variación	1,35	1,48	1,25	2,19
1 <sup>er</sup> cuartil	3.799,39	181,16	18,88	5515,00
Mediana	7.389,00	360,15	26,50	8845,50
3 <sup>er</sup> cuartil	13.167,70	642,83	50,00	19514,70
Correlación lineal				
Output RES	1,000			
Input 1 CON	0,931	1,000		
Input 2 VEH	0,929	0,817	1,000	
Input 3 TRA	0,487	0,419	0,504	1,000

##### 4.2 Modelos y resultados

A continuación se describe cada una de las técnicas empleadas en la aplicación y posteriormente se lleva a cabo un análisis comparativo de los resultados. Al final del

trabajo se presentan las estimaciones de eficiencia así como las ordenaciones según las diferentes metodologías utilizadas<sup>10</sup>.

- Cobb-Douglas.

A partir de las estimaciones paramétricas realizadas, basadas en tecnología Cobb-Douglas y la forma flexible translog, se han realizado contrastes de modelos restringidos, en los que no se puede rechazar que la tecnología sea Cobb-Douglas.

Respecto al tipo de rendimientos a escala, los contrastes realizados, tanto en la especificación Cobb-Douglas como translog, conducen a rendimientos constantes a escala, al igual que la mayoría de los trabajos realizados para este servicio local.

Los resultados de las estimaciones se recogen en la tabla 3 y han sido obtenidos en LIMDEP 7.0. Tal y como se detectó en el análisis exploratorio inicial, la elevada correlación entre los inputs VEH y TRA provoca un resultado inesperado. El coeficiente asociado al input VEH resulta negativo, si bien es muy reducido y no significativo. No obstante, ninguno de los resultados se ve afectado eliminando el input VEH, por lo que hemos considerado conveniente mantener los 3 inputs para su comparación con el resto de técnicas. En cuanto a la frontera estocástica, los parámetros de varianza no resultan significativos, dando lugar a unos resultados de eficiencia muy semejantes a la opción determinística.

Tabla 3. Resultados estimación Cobb-Douglas

	<b>Cobb-Douglas det.</b>	<b>Cobb-Douglas estoc.</b>
Constante	2,2188 (7,17)	2,3240 (3,21)
Ln CON	0,8002 (13,20)	0,8004 (12,77)
Ln VEH	-0,0483 (-0,67)	-0,0494 (-0,73)
Ln TRA	0,2311 (4,58)	0,2321 (3,965)
$\lambda = \sigma_u / \sigma_v$ (u semi-normal)		0,5286 (0,17)
$\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$		0,2996 (1,26)
R <sup>2</sup> ajustado	0,9176	
Rendimientos escala	F=0,1797	
Test de Wald	p=0,673	
H0: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$		

- DEA y FDH.

Los resultados del Análisis Envoltente de Datos han sido obtenidos con el software EMS<sup>11</sup> y han sido estimadas las fronteras considerando rendimientos constantes (DEA rce) y variables a escala (DEA rve). En cuanto a la técnica FDH, también se ha empleado el programa EMS.

- Redes neuronales.

<sup>10</sup> La columna de datos "medios" para cada municipio se introduce a modo informativo o descriptivo, sin otro objetivo que facilitar la lectura e interpretación comparativa de los resultados. Se trata de medias simples tras reescalar las medidas de RNA1 a un índice máximo de 1.

<sup>11</sup> El software EMS, desarrollado por H. Scheel, es gratuito y se puede obtener en: [www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel](http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel)

Hemos considerado los modelos denotados como RNA1, RNA2 y RNA3, correspondientes a la red estimada, la red corregida por el mayor residuo positivo y la red corregida por la media de los mayores residuos positivos, respectivamente. También hemos estimado la red sobreparametrizada<sup>12</sup>, con unos resultados que apenas difieren de los anteriores.

En concreto, se trata de estimar una red con 3 inputs y 1 output. Respecto a la capa intermedia, se han estimado redes con un número de unidades ocultas entre 2 y 10<sup>13</sup>. La selección final de la red se ha basado en el criterio de información SIC. En cuanto a las funciones de activación, se ha tomado la función *tanh* en la capa intermedia y la lineal-identidad en la de salida.

Los datos iniciales han sido reescalados a [-1,1]. El aprendizaje se ha realizado a través del algoritmo Levenberg-Marquardt (L-M). Como criterio de parada se ha tomado un máximo de 1000 iteraciones o *epochs* para evitar el sobre-entrenamiento (*overtraining*), siendo detenido anteriormente si se produce un estancamiento del error de ajuste. El aprendizaje se ha reiniciado 20 veces con distintos pesos aleatorios iniciales.

Tabla 4. Red neuronal estimada

Concepto	Resultado
Transformación datos iniciales	[-1,1]
Arquitectura red	3-4-1
Función activación oculta / salida	tanh / lineal
Algoritmo	Levenberg-Marquardt
Epochs (máx.)	1000
R <sup>2</sup>	0,9854

#### 4.3 Análisis comparativo

En primer lugar, consideramos que los resultados obtenidos bajo los distintos enfoques, sintetizados en las tablas 5 a 7, no deben ser tomados como alternativos, sino más bien complementarios, al aportar visiones distintas de un mismo fenómeno observado desde diferentes metodologías y bajo distintos supuestos de trabajo.

Aunque resulta difícil llevar a cabo una comparativa de los resultados, se han evaluado aspectos como la eficiencia media, la variabilidad de los índices, las ordenaciones de unidades de mayor a menor eficiencia y el número de unidades eficientes.

- Índices de eficiencia. Media y variabilidad.

La eficiencia media estimada en los modelos neuronales (RNA2 y RNA3) es similar a la obtenida con la función Cobb-Douglas determinística y DEA con rendimientos

<sup>12</sup> Concretamente, la red 3-7-1 permite un ajuste casi total, R<sup>2</sup>=0,9930, lo que hace más probable la modelización del ruido de los datos.

<sup>13</sup> Según la expresión (5), el número de parámetros con 3 inputs y 1 output, será de 11 con 2 unidades ocultas, 16 con 3... hasta un total de 51 con 10 neuronas intermedias.

constantes a escala. Por otro lado, la media resulta superior bajo DEA con rendimientos variables a escala y FDH. En cuanto a la variabilidad de las medidas, los indicadores de redes y DEA con rendimientos variables resultan muy volátiles.

Los coeficientes de correlación de Pearson (tabla 6) revelan un elevado grado de concordancia en las medidas de eficiencia entre el modelo de red RNA1 y las técnicas paramétricas (en torno a 0,8) y DEA con rendimientos constantes a escala (0,7). En cuanto a los modelos RNA2 y RNA3 se aprecian correlaciones más altas con las mismas técnicas, si bien sensiblemente inferiores (0,5). También se presenta una elevada correlación entre las técnicas no paramétricas.

- Ordenaciones.

Los resultados derivados del coeficiente de rangos de Spearman (tabla 7), significativos en su mayoría a niveles del 1%, revelan un comportamiento similar al descrito en el apartado anterior: ranking muy semejante del modelo RNA1 y las técnicas paramétricas (coeficiente próximo a 0,8), al igual que entre las no paramétricas. Por otro lado, los modelos neuronales RNA2 y RNA3 tienen un comportamiento bastante diferenciado del resto.

En cuanto a las primeras posiciones, todas las alternativas coinciden en señalar como más eficientes a los municipios de Calella y Sant Adrià de Besòs. En el otro lado de la ordenación, no se aprecia esta unanimidad, si bien algunos municipios son relegados a las últimas posiciones en todas las metodologías, como Alcanar, Escala, Roquetes, Deltebre, Navàs, o Tiana. No obstante, las distintas técnicas deparan puestos muy desiguales para algunos municipios. Por ejemplo Sènia, eficiente bajo DEA con rendimientos variables y FDH, la menos eficiente bajo los modelos neuronales RNA2 y RNA3, y en posiciones en torno al 50 en las técnicas econométricas.

- Unidades eficientes.

El número de municipios declarados eficientes es muy diferente entre las distintas metodologías dadas sus características. Así, a través de la estimación econométrica determinística y el modelo de red RNA1 tan solo un municipio resulta eficiente. Si bien este municipio no es el mismo, en el primer caso es Calella, y en el segundo, Sant Adrià de Besòs, ambos presentan un puesto en el ranking muy parecido, tal y como se describió anteriormente. Con la metodología de red neuronal RNA2 el municipio eficiente es Viladecans, también considerado así con DEA rendimientos variables y FDH, y ocupa puestos muy altos con el resto. Con RNA3, además de Viladecans, se señala como eficiente el ya mencionado Sant Adrià de Besòs. Bajo la técnica FDH, 45 (de 72) observaciones son declaradas eficientes, mientras que en RNA1 lo son 35 municipios. Finalmente, el análisis DEA contempla 7 y 15 unidades eficientes con rendimientos constantes y variables respectivamente.

A modo de cierre de este capítulo, señalar que los resultados alcanzados en esta aplicación parecen evidenciar escasas no linealidades en los datos. A buen seguro la potencialidad de las redes neuronales se rentabilizará más en supuestos donde las relaciones entre las variables sean más complejas, es decir, menos lineales.

Tabla 5. Síntesis de resultados

	C-D det.	C-D estoc.	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA 1	RNA 2	RNA 3
Media	0,5227	0,8946	0,6049	0,7268	0,9145	1,0118	0,5221	0,5569
Mínima	0,2698	0,8318	0,2796	0,3277	0,4672	0,5092	0,1671	0,1903
Máxima	1,0000	0,9374	1,0000	1,0000	1,0000	1,8640	1,0000	1,0000
Rango	0,7302	0,1056	0,7204	0,6723	0,5328	1,3548	0,8329	0,8097
1er cuartil	0,4339	0,8847	0,4987	0,5979	0,8534	0,8751	0,3101	0,3383
Mediana	0,5103	0,8986	0,5651	0,6957	1,0000	1,0000	0,4944	0,5374
3er cuartil	0,5959	0,9100	0,7285	0,8901	1,0000	1,1173	0,7004	0,7391
Desv típica	0,1483	0,0232	0,1882	0,1918	0,1367	0,2698	0,2365	0,2360
Coef variac.	0,2837	0,0260	0,3111	0,2639	0,1495	0,2666	0,4530	0,4238
U. eficientes	1	0	7	15	45	35	1	2

Tabla 6. Coeficiente de correlación de Pearson

	C-D det.	C-D est.	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA 1	RNA 2	RNA 3
<b>C-Ddet.</b>	1,0000							
<b>C-Dest.</b>	0,9373	1,0000						
<b>DEArce</b>	0,7716	0,7617	1,0000					
<b>DEArve</b>	0,6413	0,6550	0,7861	1,0000				
<b>FDH</b>	0,5099	0,6025	0,5871	0,7411	1,0000			
<b>RNA 1</b>	0,8221	0,7829	0,7015	0,5962	0,5638	1,0000		
<b>RNA 2</b>	0,5269	0,4694	0,4380	0,3750	0,2628*	0,4173	1,0000	
<b>RNA 3</b>	0,5478	0,4917	0,4576	0,3764	0,2751*	0,4437	0,9986	1,0000

Todos los coeficientes resultan significativos al 1%, excepto los marcados con \*, significativos al 5%

Tabla 7. Coeficiente de correlación de rangos de Spearman

	C-D det.	C-D est.	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA 1	RNA 2	RNA 3
<b>C-Ddet.</b>	1,0000							
<b>C-Dest.</b>	0,9999	1,0000						
<b>DEArce</b>	0,8326	0,8343	1,0000					
<b>DEArve</b>	0,6368	0,6385	0,7626	1,0000				
<b>FDH</b>	0,5359	0,5359	0,6451	0,7964	1,0000			
<b>RNA 1</b>	0,7841	0,7846	0,7812	0,5996	0,6041	1,0000		
<b>RNA 2</b>	0,4694	0,4689	0,4877	0,3076	0,2281**	0,3940	1,0000	
<b>RNA 3</b>	0,4909	0,4904	0,5094	0,3229	0,2485*	0,4208	0,9986	1,0000

Todos los coeficientes resultan significativos al 1%, excepto los marcados con \*, significativos al 5%, y \*\*, significativos al 10%



## 5. CONCLUSIONES

Las redes neuronales constituyen un instrumento para la estimación de funciones de producción y funciones frontera para la medición de eficiencia, dada su propiedad de aproximador universal de funciones y sus derivadas. En este contexto, debe ser considerada como una técnica complementaria de las habitualmente empleadas, paramétricas y no paramétricas, y sería deseable establecer algún tipo de criterio para seleccionar aquélla que mejor se adapte a cada situación real objeto de análisis.

En este trabajo se han considerado tres alternativas basadas en redes neuronales: la función de producción estimada, y las fronteras determinadas corrigiendo la estimación por el mayor residuo positivo o una media de los mayores residuos positivos, asociados al 5% de observaciones, para evitar un efecto demasiado elevado por parte de observaciones extremas.

La aplicación al servicio de recogida de basuras, con una muestra de municipios catalanes, pone de manifiesto la heterogeneidad de resultados alcanzados con las distintas metodologías: determinística, estocástica, DEA, FDH y redes neuronales. No obstante, se detecta cierta similitud en la ordenación por eficiencia, destacando que dos municipios son señalados como eficientes por la gran mayoría de alternativas, así como el grupo de municipios menos eficientes.

Finalmente, sería positivo disponer de un mayor número de trabajos tanto a nivel teórico, mediante simulaciones, como aplicado, para comprobar si finalmente es “eficiente” el uso de estas complicadas técnicas al campo de la eficiencia. Otros temas pendientes se refieren al tratamiento de outliers y las potencialidades descritas en los escenarios multioutput.

## REFERENCIAS

- Álvarez, A. coord. (2001): *La medición de la eficiencia y la productividad*, Ed. Pirámide, Madrid.
- Athnassopoulos, A. y S. Curram (1996): “A Comparison of Data Envelopment Analysis and Artificial Neural Networks as Tools for Assessing the Efficiency of Decision-Making Units”, *Journal Of The Operational Research Society*, 47, 1000-1016.
- Banker, R.D., A. Charnes y W. Cooper (1984): “Some Models for the Estimation of Technical and Scale Efficiencies in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, 30 (9), 1078-1092.
- Bishop, C.M. (1995): *Neural Networks for Pattern Recognition*, Clarendon Press, Oxford.
- Bosch, N., F. Pedraja y J. Suárez-Pandiello (2001): *The Efficiency of Refuse Collection Services in Spanish Municipalities: Do Non-Controllable Variables Matter?*, Document de treball 2001/4, Institut d’Economia de Barcelona.

- Charnes A, W. W. Cooper y E. Rhodes (1978): "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- Cheng, B. y D.M. Titterington (1994): "Neural Networks: a Review from a Statistical Perspective", *Statistical Science*, 9 (1), 2-54.
- Coelli, T., D.S. Prasada Rao y G.E. Battese (1998): *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers.
- Cooper, J.C.B. (1999): "Artificial Neural Networks versus Multivariate Statistics: an Application from Economics", *Journal of Applied Statistics*, 26 (8), 909-921.
- Costa, A. y R.N. Markellos (1997): "Evaluating Public Transport Efficiency with Neural Network Models", *Transportation Research C*, 5 (5), 301-312.
- Cubbin, J., S. Domberger y S. Meadowcroft (1986): "Competitive Tendering and Refuse Collection: Identifying the Sources of Efficiency Gains", *Fiscal Studies*, 7(4), 49-58.
- Curram, S.P., A.D. Athanassopoulos y E. Shale (1999): "A comparison of a frontier-based neural network and data envelopment analysis for assessing the efficiency of activity units", *OR41-1999 Annual Conference of the Operational Research Society*, Edinburgo.
- Deprins, D., L. Simar y H. Tulkens (1984): "Measuring Labour-Efficiency in Post Offices", en M. Marchand, P. Pestieau y H. Tulkens (eds): *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements*, North-Holland, Amsterdam, 243-267.
- Farë, R., S. Grosskopf y C.A.K. Lovell (1985): *The Measurement of Efficiency of Production*, Kluwer, Boston.
- Farrell, M.J. (1957): "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, 253-281.
- Fleissig, A.R., T. Kastens y D. Terrell (2000): "Evaluating the Semi-nonparametric Fourier, AIM, and Neural Networks Cost Functions", *Economics Letters*, 68, 3, 235-244.
- Fox, K. (ed) (2002): *Efficiency in the Public Sector*, Kluwer.
- Fried, H.O., C.A. Lovell y S.S. Schmidt (1993): *The Measurement of Productive Efficiency*, Oxford University Press, Oxford.
- Guermat, C. y K. Hadri (1999): *Backpropagation Neural Network Vs Translog Model in Stochastic Frontiers: a Monte Carlo Comparison*, Discussion Paper 99/16, University of Exeter.
- Hagan, M.T. y M. Menhaj (1994): "Training Feedforward Networks with the Marquardt Algorithm", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5 (6), 989-993.
- Hertz, J., A. Krogh y R.G. Palmer (1991): *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley.
- Hornik, K., M. Stinchcombe y H. White (1989): "Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators", *Neural Networks*, 3, 551-560.
- Hornik, K., M. Stinchcombe y H. White (1990): "Universal Approximation of an Unknown Mapping and its Derivatives Using Multilayer Feedforward Networks", *Neural Networks*, 3, 551-560.
- Joerding, W, Y. Li, S. Hu y J. Meador (1994): "Approximating Production Technologies with Feedforward Neural Networks", en J.D. Johnson y A.B. Whinston (eds): *Advances in artificial intelligence in Economics, Finance and Management*, 1, 35-42, JAI Press, London.
- Kuan, C.M. y H. White (1994): "Artificial Neural Networks: an Econometric Perspective", *Econometric Reviews*, 13, 1-91.

- Kumbhakar, S.C. y C.A.K. Lovell (2000): *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lovell, C.A.K. y M.A. Muñiz (2003): "Eficiencia y productividad en el sector público. Temas dominantes en la literatura", *Papeles de Economía Española*, 95, 47-65.
- Ripley, B.D. (1996): *Pattern Recognition and Neural Networks*, Cambridge University Press.
- Rumelhart, D., G. Hinton y R. Williams (1986): "Learning Internal Representations by Error Propagation", en D. Rumelhart y J. McClelland, (eds), *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*, 1, 318-362, MIT Press, Cambridge.
- Santín, D., F.J. Delgado y A. Valiño (2003): "The Measurement of Technical Efficiency: A Neural Network Approach", *Applied Economics* (aceptado publicación).
- Vellido, A., P.J.G. Lisboa y J. Vaughan (1999): "Neural Networks in Business: A Survey of Applications (1992–1998)", *Expert Systems with Applications*, 17, 51–70.
- Warner, B. y M. Misra (1996): "Understanding Neural Networks as Statistical Tools", *The American Statistician*, 50, 284-293.
- White, H. (1989): "Learning in Artificial Neural Networks: a Statistical Perspective", *Neural Computation*, 1, 425-464.
- Zapranis, A. y A.P. Refenes (1999): *Principles of Neural Model Identification, Selection and Adequacy. With Applications to Financial Econometrics*, Springer.
- Zhang, G., B.E. Patuwo y M.Y. Hu (1998): "Forecasting with Artificial Neural Networks: the State of the Art", *International Journal of Forecasting*, 14, 35-62.

Tabla 8. Índices de eficiencia técnicas alternativas

Municipio	C-D det	C-D est	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA1	RNA2	RNA3	(media)
Alcanar	0,2698	0,8318	0,2796	0,3411	0,5231	0,5092	0,2696	0,2913	0,3718
Almacelles	0,5079	0,8984	0,5591	0,6814	1,0000	1,4951	0,2791	0,3204	0,6120
Badalona	0,4934	0,8959	0,5918	1,0000	1,0000	1,0000	0,9171	0,9293	0,7582
Balaguer	0,4909	0,8955	0,4996	0,5744	0,7009	0,9354	0,3997	0,4396	0,5548
Banyoles	0,5689	0,9068	0,5984	0,6178	1,0000	1,1542	0,5648	0,6145	0,6706
Barberà del Vallès	0,4623	0,8905	0,8018	0,8045	1,0000	0,9586	0,5967	0,6347	0,6931
Blanes	0,6157	0,9122	0,5900	0,7058	0,8744	1,0451	0,7404	0,7763	0,7017
Calella	1,0000	0,9374	1,0000	1,0000	1,0000	1,8496	0,8404	0,9199	0,9655
Canovelles	0,5508	0,9045	0,5781	0,6705	1,0000	1,1385	0,4463	0,4938	0,6452
Capellades	0,5955	0,9099	0,6278	1,0000	1,0000	1,0238	0,2113	0,2417	0,6346
Cardedeu	0,4618	0,8903	0,5415	0,7112	1,0000	0,9223	0,3920	0,4313	0,5950
Cardona	0,6147	0,9121	0,6147	0,8742	1,0000	1,2600	0,2745	0,3133	0,6599
Cassà de la Selva	0,4530	0,8887	0,4592	0,5983	0,9122	0,8998	0,2930	0,3281	0,5420
Castellar del Vallès	0,5180	0,8998	0,6820	0,7219	1,0000	1,0451	0,5134	0,5584	0,6654
Constantí	0,6610	0,9168	0,7739	1,0000	1,0000	1,7139	0,2148	0,2494	0,7120
Deltebre	0,3010	0,8457	0,3288	0,4196	0,6794	0,5894	0,3124	0,3376	0,4271
Escala	0,3034	0,8467	0,3094	0,3277	0,4672	0,5373	0,3569	0,3769	0,3952
Esparraguera	0,5166	0,8995	0,6445	0,6800	1,0000	0,9563	0,5054	0,5462	0,6396
Esplugues Llobregat	0,7579	0,9245	0,7843	0,8936	1,0000	1,3791	0,8997	0,9522	0,8561
Figuères	0,6487	0,9155	0,8007	0,8118	1,0000	1,2021	0,7919	0,8372	0,7889
Franqueses Vallès	0,5118	0,8989	0,5284	0,6247	1,0000	1,0536	0,3978	0,4413	0,6090
Gironella	0,5376	0,9028	1,0000	1,0000	1,0000	1,2005	0,2035	0,2343	0,6681
Hospitalet Llobregat	0,7704	0,9254	0,7551	1,0000	1,0000	1,0012	0,9283	0,9391	0,8309
Igualada	0,5721	0,9071	0,5974	0,6738	1,0000	1,0328	0,6883	0,7267	0,6997
Llagosta	0,7341	0,9228	0,7552	0,8667	1,0000	1,3665	0,4654	0,5197	0,7472
Lliçà d'Amunt	0,5426	0,9034	1,0000	1,0000	1,0000	1,0502	0,4834	0,5286	0,7387
Malgrat de Mar	0,6971	0,9198	0,8698	0,9269	1,0000	0,9402	0,6145	0,6502	0,7662
Manresa	0,6317	0,9138	0,6160	0,8091	1,0000	1,0157	0,8174	0,8435	0,7537
Martorell	0,4957	0,8962	0,5673	0,5918	0,8844	0,9365	0,5157	0,5552	0,6093
Masnou	0,5969	0,9101	0,6484	0,6559	0,8743	1,1049	0,6192	0,6656	0,6833
Molins de Rei	0,3919	0,8750	0,4367	0,4817	0,7423	0,6850	0,3901	0,4186	0,5018
Mollerussa	0,5058	0,8979	0,5277	0,6370	1,0000	1,0167	0,4044	0,4471	0,6082
Montcada i Reixac	0,6096	0,9115	0,6375	0,6412	0,8372	1,1339	0,6741	0,7204	0,6938
Montmeló	0,4998	0,8969	0,5206	0,6855	1,0000	0,9512	0,3019	0,3385	0,5832
Navarces	0,5352	0,9023	0,5428	0,7414	1,0000	1,0819	0,2798	0,3170	0,6066
Navàs	0,3390	0,8596	0,3895	0,6176	0,7586	0,5459	0,1974	0,2196	0,4506
Olot	0,4631	0,8905	0,5628	0,6145	0,7343	1,2184	0,7406	0,7897	0,6619
Palafrugell	0,4176	0,8812	0,4584	0,5056	0,5817	0,7954	0,5642	0,5915	0,5399

Tabla 8. Índices de eficiencia técnicas alternativas (continuación)

Municipio	C-D det	C-D est	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA1	RNA2	RNA3	(media)
Palau de Plegamans	0,3529	0,8640	0,3676	0,4375	0,7692	0,6833	0,3670	0,3960	0,4748
Pallejà	0,3471	0,8623	0,3889	0,5142	0,8543	0,7083	0,3029	0,3331	0,4815
Piera	0,5156	0,8995	1,0000	1,0000	1,0000	0,9920	0,5064	0,5490	0,7233
Prat de Llobregat	0,4894	0,8952	0,5872	0,7446	0,9524	1,0023	0,7762	0,8050	0,7012
Premià de Dalt	0,5118	0,8989	0,5070	0,6393	0,8875	0,9912	0,3559	0,3961	0,5838
Premià de Mar	0,7182	0,9216	0,7230	0,7325	1,0000	1,3195	0,7364	0,7918	0,7826
Ripollet	0,7685	0,9251	1,0000	1,0000	1,0000	1,0836	0,6347	0,6793	0,7873
Roquetes	0,2982	0,8446	0,2968	0,4420	0,6216	0,6929	0,2101	0,2362	0,4011
Rubí	0,6683	0,9174	0,7448	0,8889	1,0000	1,1379	0,8589	0,8937	0,8031
Sabadell	0,5074	0,8981	0,5081	0,9965	1,0000	1,0000	0,9206	0,9323	0,7531
Sallent	0,3929	0,8753	0,4156	0,6624	1,0000	0,7810	0,2576	0,2882	0,5225
Salou	0,4837	0,8943	0,5584	0,6120	0,9573	0,8394	0,6459	0,6703	0,6378
Salt	0,6687	0,9174	0,7467	0,7975	1,0000	1,3501	0,6051	0,6630	0,7554
Sant Adrià de Besòs	0,9527	0,9354	1,0000	1,0000	1,0000	1,8640	0,9749	1,0000	0,9799
Sant Andreu Barca	0,5707	0,9070	0,5744	0,5968	0,8507	1,0701	0,5556	0,6014	0,6439
Sant Boi Llobregat	0,3366	0,8585	0,5461	0,7709	1,0000	0,9996	0,8247	0,8482	0,6817
Sant Celoni	0,4909	0,8955	0,5362	0,6279	1,0000	0,9856	0,4489	0,4913	0,6127
Sant Cugat Vallès	0,5686	0,9067	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,8238	0,8474	0,8255
Sant Feliu Llobregat	0,5089	0,8984	0,5169	0,5266	0,6729	0,9056	0,5983	0,6323	0,5936
Sant Fruitós Bages	0,4731	0,8925	0,5804	0,8138	1,0000	1,1064	0,2206	0,2527	0,5896
Sant Joan Despí	0,3314	0,8571	0,5773	0,5801	1,0000	1,1117	0,6720	0,7169	0,6347
Santa Coloma Farners	0,5492	0,9043	0,9245	1,0000	1,0000	1,1374	0,3767	0,4213	0,7088
Santpedor	0,5377	0,9027	0,5629	0,7325	1,0000	1,0475	0,3199	0,3595	0,6131
Sènia	0,4538	0,8888	0,4966	1,0000	1,0000	0,7214	0,1671	0,1903	0,5645
Solsona	0,4198	0,8817	0,4298	0,5621	0,8438	0,8244	0,2840	0,3169	0,5118
Tarragona	0,5484	0,9041	0,5363	0,7187	1,0000	0,9933	0,8696	0,8871	0,7206
Terrassa	0,3618	0,8667	0,4994	1,0000	1,0000	1,0000	0,9037	0,9177	0,7234
Tiana	0,3701	0,8692	0,3909	0,6330	0,7962	0,6667	0,2049	0,2301	0,4725
Tordera	0,3460	0,8619	0,4455	0,8307	1,0000	0,7085	0,2275	0,2549	0,5233
Torredembarra	0,3260	0,8551	0,4001	0,4353	0,6387	0,6372	0,4208	0,4448	0,4670
Tortosa	0,5117	0,8988	0,5198	0,5484	0,7400	0,8870	0,5865	0,6197	0,5995
Vallirana	0,3383	0,8594	0,3927	0,4867	0,9524	0,6696	0,3477	0,3763	0,4952
Valls	0,4386	0,8857	0,4680	0,4929	0,7338	0,8242	0,4817	0,5156	0,5437
Viladecans	0,8357	0,9295	0,8353	1,0000	1,0000	1,3659	1,0000	1,0000	0,9026
Media	0,5227	0,8946	0,6049	0,7268	0,9145	1,0118	0,5221	0,5569	0,6452
Mínima	0,2698	0,8318	0,2796	0,3277	0,4672	0,5092	0,1671	0,1903	0,3718
Máxima	1,0000	0,9374	1,0000	1,0000	1,0000	1,8640	1,0000	1,0000	0,9799

Tabla 9. Ranking eficiencia técnicas alternativas

Municipio	C-D det	C-D est	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA1	RNA2	RNA3	(media)
Alcanar	72	72	72	71	71	72	62	62	72
Almacelles	38	38	39	38	1	4	60	58	43
Badalona	43	43	29	1	1	36	5	6	12
Balaguer	45	45	53	58	65	50	44	45	55
Banyoles	22	22	27	50	1	14	30	30	30
Barberà del Vallès	50	50	11	26	1	45	28	27	27
Blanes	15	15	30	36	52	29	17	18	23
Calella	1	1	1	1	1	2	10	7	2
Canovelles	24	24	33	41	1	15	41	40	35
Capellades	19	19	24	1	1	31	67	67	40
Cardedeu	51	51	43	35	1	51	46	46	49
Cardona	16	16	26	20	1	10	61	61	34
Cassà de la Selva	53	53	57	54	49	53	57	57	57
Castellar del Vallès	31	31	20	33	1	28	34	33	32
Constantí	12	12	14	1	1	3	66	66	21
Deltebre	70	70	69	70	66	69	54	55	69
Escala	69	69	70	72	72	71	50	51	71
Esparreguera	32	33	22	39	1	46	36	36	37
Esplugues Llobregat	6	6	13	18	1	5	7	3	4
Figueres	13	13	12	24	1	12	14	14	8
Franqueses Vallès	35	35	46	49	1	25	45	44	45
Gironella	29	28	1	1	1	13	70	69	31
Hospitalet Llobregat	4	4	16	1	1	35	3	4	5
Igualada	20	20	28	40	1	30	19	19	25
Llagosta	7	7	15	21	1	6	39	38	16
Lliçà d'Amunt	27	27	1	1	1	26	37	37	17
Malgrat de Mar	9	9	9	17	1	48	25	26	11
Manresa	14	14	25	25	1	33	13	13	14
Martorell	42	42	36	56	51	49	33	34	44
Masnou	18	18	21	43	53	21	24	24	28
Molins de Rei	58	58	60	66	61	64	47	48	62
Mollerussa	40	40	47	46	1	32	43	42	46
Montcada i Reixac	17	17	23	44	57	18	20	20	26
Montmeló	41	41	48	37	1	47	56	54	53
Navarcles	30	30	42	30	1	23	59	59	47
Navàs	64	64	66	51	60	70	71	71	68
Olot	49	49	38	52	63	11	16	17	33
Palafrugell	56	56	58	63	70	58	31	32	58

Tabla 9. Ranking eficiencia técnicas alternativas (continuación)

Municipio	C-D det	C-D est	DEA rce	DEA rve	FDH	RNA1	RNA2	RNA3	(media)
Palau de Plegamans	61	61	68	68	59	65	49	50	65
Pallejà	62	62	67	62	54	62	55	56	64
Piera	33	32	1	1	1	42	35	35	19
Prat de Llobregat	46	46	31	29	47	34	15	15	24
Premià de Dalt	34	34	52	45	50	43	51	49	52
Premià de Mar	8	8	19	31	1	9	18	16	10
Ripollet	5	5	1	1	1	22	23	22	9
Roquetes	71	71	71	67	69	63	68	68	70
Rubí	11	11	18	19	1	16	9	9	7
Sabadell	39	39	51	16	1	38	4	5	15
Sallent	57	57	62	42	1	59	63	63	60
Salou	47	47	40	53	46	55	22	23	38
Salt	10	10	17	27	1	8	26	25	13
Sant Adrià de Besòs	2	2	1	1	1	1	2	1	1
Sant Andreu Barca	21	21	35	55	55	24	32	31	36
Sant Boi Llobregat	66	66	41	28	1	40	11	11	29
Sant Celoni	44	44	45	48	1	44	40	41	42
Sant Cugat Vallès	23	23	1	1	1	39	12	12	6
Sant Feliu Llobregat	37	37	50	61	67	52	27	28	50
Sant Fruitós Bages	48	48	32	23	1	20	65	65	51
Sant Joan Despí	67	67	34	57	1	19	21	21	39
Santa Coloma Farners	25	25	8	1	1	17	48	47	22
Santpedor	28	29	37	31	1	27	53	53	41
Sènia	52	52	55	1	1	60	72	72	54
Solsona	55	55	61	59	56	56	58	60	61
Tarragona	26	26	44	34	1	41	8	10	20
Terrassa	60	60	54	1	1	37	6	8	18
Tiana	59	59	65	47	58	67	69	70	66
Tordera	63	63	59	22	1	61	64	64	59
Torredembarra	68	68	63	69	68	68	42	43	67
Tortosa	36	36	49	60	62	54	29	29	48
Vallirana	65	65	64	65	47	66	52	52	63
Valls	54	54	56	64	64	57	38	39	56
Viladecans	3	3	10	1	1	7	1	1	3