Autores:

Luis Imedio Olmedo

Dpto. Estadística y Econometría (68)

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Málaga

Campus "El Ejido", s/n

29071. Málaga

Telf. 952131203, Fax: 952131294

Correo electrónico: imedio@uma.es

Elena Bárcena Martín

Dpto. Estadística y Econometría (68)

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Málaga

Campus "El Ejido", s/n

29071. Málaga

Telf. 952137188, Fax: 952131294

Correo electrónico: barcenae@uma.es

Curriculum vitae Luis Imedio Olmedo.

Licenciado en Matemáticas y Ciencias Económicas. Doctor en Económicas.

Profesor Titular de Economía Aplicada (Estadística)

Trabajos relacionados con la distribución y la redistribución de la renta personal.

Curriculum vitae Elena Bárcena Martín

Licenciada en Ciencias Económicas

Master Econometrics and Mathematical Economics. Impartido por The London School of Economics and Political Science, 1998-1999.

Profesora Ayudante de Escuela Universitaria adscrita al Dpto. de Economía Aplicada (Estadística).

Actualmente elabora su Tesis Doctoral "Privación, bienestar e imposición sobre la renta"

Trabajos relacionados con la distribución y la redistribución de la renta personal.

Estamos interesados en participar en la modalidad de **comunicación.**

Título de la comunicación: **Un estudio analítico del impuesto lineal por tramos. Aplicación a la tarifa nominal del IRPF-2000.**

Resumen. En este trabajo se calculan y analizan, en primer lugar, los índices estructurales del impuesto en cada uno de los intervalos de la tarifa. Por otra parte, se obtienen las curvas de concentración y los índices sintéticos de progresión global para cada uno de los tramos. A partir de ahí, basándonos en la descomposición del índice de Gini cuando en la escala de rentas, que identificamos con la base liquidable regular, se considera la partición inducida por los intervalos de la tarifa, se obtiene una descomposición aditiva de los índices de Kakwani y de Reynolds-Smolensky en dos sumandos: el primero se expresa mediante los valores de dichos índices en cada uno de los intervalos y el segundo recoge la variación de la desigualdad que se produce entre intervalos como consecuencia de la aplicación del impuesto. Sobre las cuestiones en las que interviene la distribución de la renta sobre la que incide la tarifa realizaremos una simulación al no disponer de datos de la distribución de la base liquidable del IRPF-2000.

Un estudio analítico del impuesto lineal por tramos. Aplicación a la tarifa nominal del IRPF-2000.

1. Introducción.

La forma funcional más habitual de las tarifas nominales de los impuestos sobre la renta es lineal por tramos. En este trabajo, una vez establecidas sus características generales, se hace un estudio detallado de una tarifa genérica de este tipo.

En primer lugar se obtienen las expresiones de los índices estructurales o de progresión local de uso más frecuente, progresión de la carga y progresión marginal, analizando su comportamiento. En particular se cuantifica la magnitud de las discontinuidades de salto que presentan los índices en los niveles de renta que definen los diferentes intervalos de la tarifa.

Fijada la distribución de renta sobre la que incide la tarifa (base liquidable regular) se calculan las curvas de concentración de la carga y las de la renta disponible (cuota íntegra) asociadas a cada intervalo y las del conjunto de la distribución. Ello nos permite obtener los correspondientes índices de progresividad global.

A partir de la descomposición del índice de Gini, propuesta por Dagum (1997a y 1997b), cuando en la escala de rentas se considera la partición inducida por los intervalos de la tarifa, se obtienen sendas descomposiciones aditivas de los índices de Kakwani y de Reynolds-Smolensky. En ellas intervienen dos componentes: una de ellas se expresa mediante los valores de dichos índices en cada uno de los tramos e incorpora la variación de la desigualdad que se produce dentro de los intervalos como consecuencia de la aplicación de la tarifa, mientras que la otra componente recoge la variación de la desigualdad entre intervalos.

Los resultados obtenidos se particularizan a la tarifa del IRPF en España para el año 2000. A ella se refieren los gráficos y tablas que aparecen a lo largo del trabajo. Así como los índices estructurales, de carácter local, sólo dependen de la propia tarifa, los que evalúan la progresividad global son el resultado de la interacción de la tarifa con la distribución de renta sobre la que incide. Al no disponer de datos sobre la distribución de la base liquidable del IRPF-2000 hemos utilizado la correspondiente al IRPF-1994 indiciada, mediante el IPC, al año 2000. Se trata de una aproximación con serias limitaciones dado que la Ley 40/1998 de 9 de diciembre supuso una modificación drástica de las deducciones (de tipo general, por trabajo dependiente, por situación familiar, etc.) que aplican los contribuyentes. Con ella sólo tratamos de ilustrar los resultados obtenidos en las dos últimas secciones.

2. El impuesto lineal por tramos. Características generales.

La tarifa t(x) se define mediante una sucesión estrictamente creciente de tipos marginales:

$$0<m_1<m_2<...<m_k<1 \qquad [1]$$

y un conjunto de niveles de renta:

$$0<x_1<x_2<...<x_{k-1}, \qquad [2]$$

que delimitan los intervalos o tramos a los que se aplican dichos tipos, de forma que el tipo mínimo m_1 se aplica sobre las rentas $(0,x_1]$, mientras que el marginal más alto, m_k, se aplica sólo a las rentas $x>x_{k-1}$. En general el tipo m_i se aplica al intervalo i-ésimo $I_i=[x_{i-1}, x_i]$. Por lo tanto, si $x\in I_i$ es:

$$t(x)=\sum_{j=1}^{i-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + m_i(x - x_{i-1}), \qquad [3]$$

excepto si $x\leq 0$, en cuyo caso t(x)=0. Una expresión equivalente a la anterior es:

$$t(x)=t(x_{i-1})+m_i(x-x_{i-1}). \qquad [4]$$

o bien:

$$t(x)=t(x_i)-m_i(x_i-x) \qquad [5]$$

Para el IRPF-2000 los niveles de renta, expresados en pesetas, que definen los seis intervalos de la tarifa son:

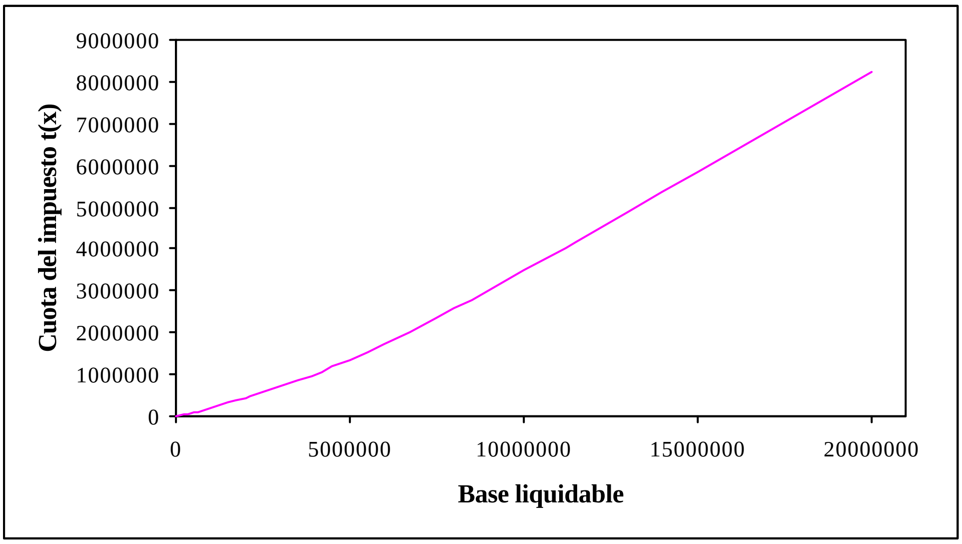
$$x_1=612.000,\ x_2=2.142.000,\ x_3=4.182.000,\ x_4=6.732.000,\ x_5=11.220.000$$

y los tipos marginales correspondientes a cada tramo:

$$m_1=0,18,\ m_2=0,24,\ m_3=0,283,\ m_4=0,371,\ m_5=0,45,\ m_6=0,48$$

En el siguiente gráfico se representa la tarifa nominal correspondiente al IRPF-2000.

Gráfico 1. Tarifa del IRPF 2000.



Fuente: Elaboración propia.

Es evidente, a partir de su definición, que al aplicar estas tarifas la renta disponible (cuota íntegra) es positiva (x-t(x)>0, si x>0) y no se altera la ordenación inicial, según niveles de renta, de las unidades impositivas (x-t(x) es una función estrictamente creciente de x al ser m_i<1).

En cuanto a su carácter, debido a la estructura de tipos marginales crecientes, la tarifa es progresiva para las rentas mayores que x_1, mientras que en el primer tramo es proporcional. Es inmediato que si el nivel de renta x es del intervalo i-ésimo, i>1, su tipo medio es inferior al marginal. En efecto:

$$\alpha(x) = \frac{t(x)}{x} = \frac{t(x_{i-1}) + m_i(x - x_{i-1})}{x} = \frac{t(x_i) - m_i(x_i - x)}{x} = \qquad [6]$$
$$= m_i + \frac{t(x_i) - m_i x_i}{x} < m_i \,,$$

al ser $t(x_i) < m_i x_i$. Ello pone de manifiesto la progresividad del impuesto.

En cada intervalo de la tarifa, excepto en el primero, la función de tipos medios es estrictamente creciente y estrictamente cóncava respecto del nivel de renta, dado que:

$$\frac{d(\alpha(x))}{dx}=\frac{m_i x_{i-1}-t(x_{i-1})}{x^2}=\frac{m_i x_i-t(x_i)}{x^2}>0, \qquad [7]$$

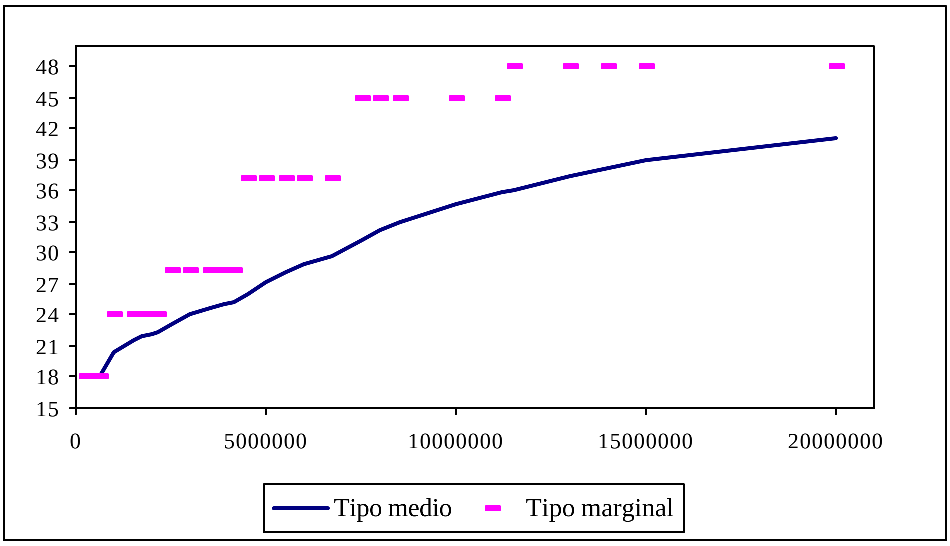
$$\frac{d^2(\alpha(x))}{dx^2}=\frac{2(t(x_{i-1})-m_i x_{i-1})}{x^3}<0,$$

lo que indica que en cada intervalo la tasa de crecimiento del tipo medio es cada vez menor. En el último intervalo, $x>x_{k-1}$, el impuesto es asintóticamente proporcional, ya que su tipo medio tiende hacia el marginal: $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=m_k$.

En los niveles de renta que definen los intervalos, la función de tipos marginales, que es escalonada, presenta una discontinuidad de salto cuya longitud en x_i es igual a $m_{i+1}-m_i$. En esos niveles de renta la función de tipos medios es continua pero no es derivable, por lo que la gráfica de $\alpha(x)$ presenta en ellos puntos angulosos. El salto de la derivada de dicha función en x_i es $\alpha'(x_i^+)-\alpha'(x_i^-)=\frac{m_{i+1}-m_i}{x_i}$.

En el Gráfico 2 se representan las funciones de tipos medios y marginales para la tarifa del IRPF-2000 y se ponen de manifiesto las características señaladas.

Gráfico 2. Tipo medio y marginal de la tarifa del IRPF 2000.



Fuente: Elaboración propia

3. Índices de progresión local para un impuesto lineal por tramos.

Como es sabido, estas medidas, propuestas por Musgrave y Thin (1948), relacionan de una forma u otra tipos medios y marginales, por lo que únicamente dependen de la estructura de la tarifa y no de la distribución de renta sobre la que recae. En esta sección nos ocuparemos de la progresión de la carga y de la progresión residual[1]. Para cada uno de estos índices estudiaremos su comportamiento, al variar el nivel de renta, en los diferentes tramos de la tarifa.

La **progresión de la carga**, que se define como la elasticidad de la cuota tributaria respecto de la renta antes del impuesto e indica, por lo tanto, el porcentaje de incremento en la carga tributaria cuando la renta antes de impuestos aumenta en un 1%, se expresa como:

$$\mathrm{LP}(x) = E_{t(x),\,x} = \frac{dt(x)}{dx}\frac{x}{t(x)} = \frac{m_i x}{t(x)} = \frac{m_i}{\alpha(x)} \quad . \qquad [8]$$

Su valor será mayor que uno por ser un impuesto progresivo, excepto en el primer intervalo en el que es igual a la unidad por ser un impuesto proporcional. En el último intervalo ($x>x_{k-1}$) dado que la tarifa tiende a la proporcionalidad al aumentar la base liquidable es $\lim_{x\to\infty}\mathrm{LP}(x)=1$.

Dentro de cada intervalo, excepto en el primero, LP(x) es una función estrictamente decreciente del nivel de renta:

$$\frac{d\mathrm{LP}(x)}{dx} = \frac{m_i\,(t(x) - m_i x)}{t(x)^2} < 0\,,$$

ya que $t(x)<m_i x$ y la tasa de disminución es cada vez mayor al ser LP(x) una función estrictamente convexa:

$$\frac{d^2\mathrm{LP}(x)}{dx^2} = \frac{-2t(x)m_i^{\,2}\,(t(x) - m_i x)}{t(x)^4} > 0\,.$$

En consecuencia, en cada tramo I_i, i>1, la progresión local de la tarifa va disminuyendo al aumentar el nivel de renta. Conviene observar que en las rentas que definen los intervalos de la tarifa la progresión de la carga presenta una discontinuidad de salto, derivada de la que se produce en los tipos marginales, cuya magnitud es:

---

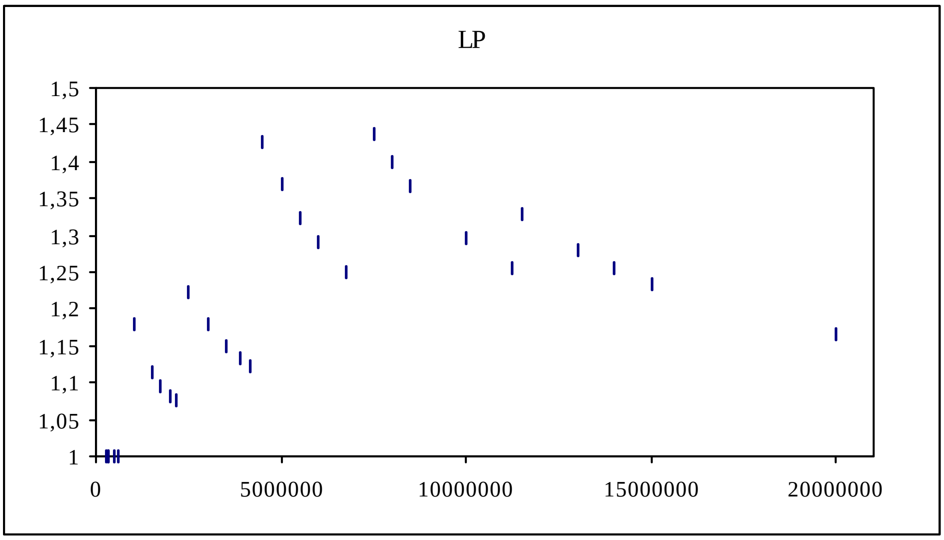
1 Existen otros dos índices locales propuestos por Musgrave y Thin: la progresión del tipo medio y la progresión del tipo marginal. El primero coincide con la noción básica de progresividad y mide la tasa de cambio del tipo medio impositivo respecto a la renta antes de impuestos. Para la tarifa lineal por tramos viene dado por la expresión [7] en el intervalo i-ésimo, i>1 y es nulo en el primero. Por otra parte, dado que los tipos marginales son constantes en cada tramo, la tasa de cambio de tales tipos es nula.

$$LP(x_i^+) - LP(x_i^-) = \frac{x_i(m_{i+1} - m_i)}{t(x_i)} = \frac{m_{i+1} - m_i}{\alpha(x_i)} > 0\,.$$

Esto supone que para valores de la base liquidable situados en un entorno de los x_i la elasticidad de la tarifa experimenta cambios bruscos. Esto es, un pequeño aumento porcentual de la base liquidable puede dar lugar a un aumento porcentual considerable en la cuota.

Las características señaladas y el comportamiento de este índice para la tarifa del IRPF-2000 se reflejan en el Gráfico 3. En la Tabla 1 figura el valor numérico del índice para distintos niveles de renta.

Gráfico 3. Progresión de la carga de la tarifa del IRPF 2000.



Fuente: Elaboración propia

Tabla 1. Tipo medio, tipo marginal, progresión de la carga y progresión residual según niveles de renta para la tarifa del IRPF-2000.

X	a(x)	m_i	LP(x)	PR(x)
250000	18,00	18,00	1,00	1,00
300000	18,00	18,00	1,00	1,00
350000	18,00	18,00	1,00	1,00
500000	18,00	18,00	1,00	1,00
612000	18,00	18,00	1,33	0,93
1000000	20,33	24,00	1,18	0,95
1500000	21,55	24,00	1,11	0,97
1750000	21,90	24,00	1,10	0,97
2000000	22,16	24,00	1,08	0,98
2142000	22,29	24,00	1,27	0,92
2500000	23,15	28,30	1,22	0,93
3000000	24,01	28,30	1,18	0,94
3500000	24,62	28,30	1,15	0,95
3900000	25,00	28,30	1,13	0,96
4182000	25,22	28,30	1,48	0,84
4500000	26,07	37,20	1,43	0,85
5000000	27,18	37,20	1,37	0,86
5500000	28,09	37,20	1,32	0,87
6000000	28,85	37,20	1,29	0,88
6732000	29,76	37,20	1,51	0,78
7500000	31,32	45,00	1,44	0,80
8000000	32,17	45,00	1,40	0,81
8500000	32,93	45,00	1,37	0,82
10000000	34,74	45,00	1,30	0,84
11220000	35,85	45,00	1,34	0,81
11500000	36,15	48,00	1,33	0,81
13000000	37,52	48,00	1,28	0,83
14000000	38,27	48,00	1,25	0,84
15000000	38,92	48,00	1,23	0,85
20000000	41,19	48,00	1,17	0,88

Fuente: Elaboración propia

La **progresión residual**, elasticidad de la renta después del impuesto respecto de la renta antes del mismo, para una tarifa lineal por tramos es:

$$PR(x) = E_{x-t(x),x} = \frac{d(x-t(x))}{dx}\frac{x}{x-t(x)} = \frac{x(1-m_i)}{x-t(x)} = \frac{1-m_i}{1-\alpha(x)}. \qquad [9]$$

Debido al carácter progresivo del impuesto su valor es menor que uno para todos los tramos (un aumento en un 1% de la renta bruta implica un crecimiento inferior al 1% en la renta después de impuestos) excepto para el primero, en el que es igual a la unidad al ser un impuesto proporcional. En el último intervalo ($x>x_{k-1}$) dado que la tarifa tiende a la proporcionalidad al aumentar la base liquidable es $\lim_{x\to\infty} PR(x)=1$.

En cada intervalo, salvo en el primero, este índice es una función estrictamente creciente (la progresión va disminuyendo) respecto al nivel de renta:

$$\frac{dPR(x)}{dx}=\frac{(1-m_i)(m_i x-t(x))}{(x-t(x))^2}>0\,,$$

aunque la tasa de crecimiento es cada vez menor al ser una función cóncava:

$$\frac{d^2PR(x)}{dx^2}=\frac{-2(1-m_i)^2(m_i x-t(x))}{(x-t(x))^3}<0\,,$$

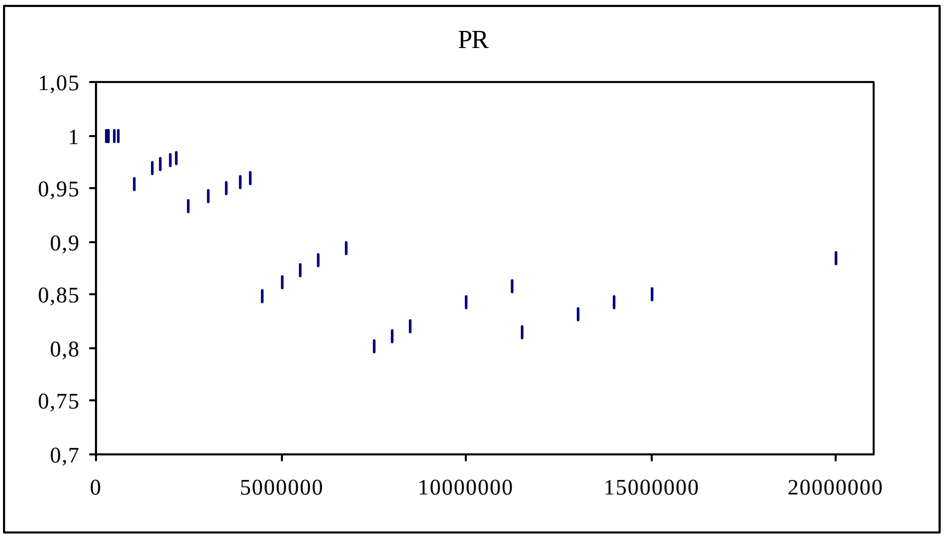
ya que x>t(x) y m_ix>t(x).

Como es natural, el comportamiento de la progresión residual es compatible con el de la progresión de la carga, lo que se pone de manifiesto tanto a través de las propiedades de ambos índices en el interior de cada tramo, como de lo que sucede en los niveles de renta que definen los intervalos de la tarifa. En estos últimos, la progresión residual presenta discontinuidades de salto cuyas magnitudes vienen dadas por:

$$PR(x_i^+)-PR(x_i^-)=\frac{x_i(m_i-m_{i+1})}{x_i-t(x_i)}=\frac{m_i-m_{i+1}}{1-\alpha(x_i)}<0.$$

El comportamiento de la progresión residual según niveles de renta, para la tarifa del IRPF-2000, queda reflejada en el Gráfico 4. En la Tabla 1 figura el valor de este índice para diferentes niveles de renta.

Gráfico 4. Progresión residual de la tarifa del IRPF 2000.



Fuente: Elaboración propia

4. Curvas de concentración de la carga fiscal y de la renta disponible. Índices de progresividad global para el impuesto lineal por tramos.

Para el cálculo de las curvas de concentración y de sus índices asociados es necesario especificar la distribución de renta sobre la que incide la tarifa nominal.

Notación. Si F es la función de distribución de la renta antes de impuestos en la población, μ su media, L(F(x)) la curva de Lorenz y G su índice de Gini, para las características de las distribuciones de renta restringidas a los intervalos de la tarifa utilizaremos la misma notación acompañada del subíndice i, $1 \leq i \leq k$, que hace referencia al intervalo i-ésimo. Al referirnos a las distribuciones de renta después del impuesto añadiremos el superíndice *.

La función de distribución correspondiente al intervalo i-ésimo, I_i, se expresa como:

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1} \\ \dfrac{F(x) - F(x_{i-1})}{s_i}, & x_{i-1} \leq x < x_i \\ 1, & x \geq x_i, \end{cases}$$

siendo

$$s_i = F(x_i) - F(x_{i-1}),$$

la proporción de individuos, que por su nivel de renta, pertenecen a ese grupo.

La curva de Lorenz asociada a $F_i(x)$ es:

$$L_i(F_i(x)) = \frac{L(F(x)) - L(F(x_{i-1}))}{q_i},$$

siendo,

$$q_i = L(F(x_i)) - L(F(x_{i-1})),$$

la participación del intervalo i-ésimo en la masa total de renta antes de impuestos. La renta media de dicho intervalo es:

$$\mu_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x dF_i(x) = \mu \frac{q_i}{s_i}.$$

Si T es la recaudación total del impuesto, α=T/nμ es el tipo medio global, siendo n el número de unidades impositivas, τ=$\mu\alpha$ es el impuesto medio y μ(1-α) la renta media disponible. Por otra parte, si T_i, n_i, α_i, τ_i, $\mu_i(1-\alpha_i)=\mu_i-\tau_i$ son los parámetros correspondientes al intervalo i se verifican las relaciones:

$$s_i = \frac{n_i}{n}, \quad q_i = \frac{n_i \mu_i}{n\mu}, \quad q_i^* = \frac{n_i \mu_i (1-\alpha_i)}{n\mu(1-\alpha)}, \quad r_i = \frac{T_i}{T} = \frac{n_i \tau_i}{n\tau} = q_i \frac{\alpha_i}{\alpha}, \qquad [10]$$

donde q_i* y r_i representan la participación en la renta total disponible y en la recaudación total, respectivamente. Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} q_i^* = \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

$$q_i^* = \frac{1-\alpha_i}{1-\alpha} q_i \ , \alpha = \sum_{i=1}^{k} q_i \alpha_i \ , \tau = \sum_{i=1}^{k} s_i \tau_i \ .$$

La curva de concentración de la carga fiscal, $L_T(F(x)) = \frac{1}{\mu\alpha}\int_0^x t(s)dF(s)$, si $x \in I_i$, teniendo en cuenta la expresión de la tarifa, [4], viene dada por:

$$L_T(F(x)) = \frac{m_i}{\alpha} L(F(x)) + \frac{\mu_i(\alpha_i - m_i)}{\mu\alpha} F(x) ,$$

mientras que si se considera la distribución truncada correspondiente al i-ésimo intervalo, su curva de concentración de la carga es:

$$L_{T,i}(F_i(x)) = \frac{m_i}{\alpha_i} L_i(F_i(x)) + \frac{\alpha_i - m_i}{\alpha_i} F_i(x) . \qquad [11]$$

Es inmediato que en los niveles de renta que delimitan los intervalos de la tarifa, se tiene:

$$L_T(F(x_i)) = \sum_{j=1}^{i} r_j = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{i} s_j \tau_j \ , 1 \le i \le k.$$

La curva de Lorenz de la distribución de renta disponible, en la población total, $L^*(F(x)) = \frac{1}{\mu(1-\alpha)}\int_0^x (s - t(s))dF(s)$, para $x \in I_i$, tiene la expresión:

$$L^*(F(x)) = \frac{1-m_i}{1-\alpha} L(F(x)) - \frac{\mu_i(\alpha_i - m_i)}{\mu(1-\alpha)} F(x),$$

mientras que la correspondiente al intervalo i-ésimo, es:

$$L_i^*(F_i(x)) = \frac{1-m_i}{1-\alpha_i} L_i(F_i(x)) - \frac{\alpha_i - m_i}{1-\alpha_i} F(x). \qquad [12]$$

Para los niveles de renta que definen los intervalos de la tarifa, se verifica:

$$L^*(F(x_i)) = \sum_{j=1}^{i} q_j^* = \frac{1}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} s_j \mu_j (1-\alpha_j), 1 \le i \le k.$$

Las expresiones [11] y [12] son válidas para cualquier tramo de la tarifa, excepto para el primero. En éste el impuesto es proporcional y, por lo tanto, coincide la curva de concentración de la carga con las de Lorenz de las distribuciones de renta antes y después de impuestos: $L_{T,1}(F_1(x)) = L^*_1(F_1(x)) = L_1(F_1(x))$.

La forma y características (crecimiento y convexidad) de las curvas L_T y L_{X-T} son las habituales para las asociadas a impuestos positivos. Por tratarse de una tarifa que cumple la condición básica de progresividad, $\frac{d\alpha(x)}{dx} > 0$, para todo x>0, como consecuencia del teorema de Jakobsson (1976), Fellman (1976) y Kakwani (1977), en cuanto a sus posiciones relativas se verifica:

$$L_T(F(x)) < L(F(x)) < L^*(F(x)), \quad x > 0.$$

Asociado a la curva de Lorenz L(p), p=F(x), de la distribución inicial de renta, se define su índice de Gini, G, mediante:

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 2\int_0^1 (p - L(p))dp,$$

mientras que el índice de concentración asociado a la curva de concentración de la carga fiscal y el correspondiente a la de la renta después de impuestos, se expresan como:

$$C_T = 1 - 2\int_0^1 L_T(p)dp\,,$$

$$C^* = 1 - 2\int_0^1 L^*(p)dp\,,$$

respectivamente.

Cuando la aplicación del impuesto no modifica la ordenación previa de las unidades impositivas, como sucede en nuestro caso, para la distribución de renta disponible coinciden la curva de Lorenz y la de concentración, de manera que C*=G*.

A partir de estas curvas se calculan los índices sintéticos o globales de progresividad. El índice de Kakwani, indica en qué medida el impuesto difiere del proporcional equivalente en recaudación, y coincide con el doble del área entre la curva de Lorenz de la renta antes de impuestos, L, y la curva de concentración de las cuotas del impuesto, L_T:

$$I_K = 2\int_0^1 \left[L(p) - L_T(p)\right]dp = C_T - G\,.$$

El efecto redistributivo del impuesto se evalúa a través del índice de Reynolds-Smolensky, que compara las curvas de Lorenz de las distribuciones después y antes de la aplicación del impuesto. Se define como:

$$I_{RS} = 2\int_0^1 \left[L^*(p) - L_X(p)\right]dp = G - G^*\,.$$

En el primer intervalo de la tarifa el impuesto es proporcional, por lo que $G=G^*=C_T$, y consecuentemente los índices de Reynolds-Smolensky y Kakwani son nulos. Para i>1, el coeficiente de concentración de la carga en el intervalo i-ésimo es:

$$C_{T,i} = 2\int_{x_{i-1}}^{x_i} (F_i(x) - L_{T,i}(F_i(x))dF_i(x) = \frac{m_i}{\alpha_i} G_i > G_i\,,$$

siendo G_i el índice de Gini de la distribución de la renta inicial en dicho tramo.[2]

En consecuencia, el índice de Kakwani, en ese intervalo, se expresará como:

$$I_{K,i} = C_{T,i} - G_i = \frac{m_i - \alpha_i}{\alpha_i} G_i > 0, \qquad [13]$$

mientras que el índice de Reynolds-Smolensky, $I_{RS,i}$, dado que la aplicación de la tarifa no supone reordenación de las unidades impositivas es:

$$I_{RS,i} = G_i - G_i^* = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} I_{K,i}, \qquad [14]$$

o bien:

$$I_{RS,i} = \frac{m_i - \alpha_i}{1-\alpha_i} G_i > 0, \qquad [15]$$

Ambos índices son función estrictamente creciente del tipo marginal del tramo. Nótese que el índice de Gini en la distribución de renta neta para el tramo i-ésimo, se expresa a partir de [13] y [14] como:

$$G_i^* = \frac{1-m_i}{1-\alpha_i} G_i < G_i. \qquad [16]$$

Aplicación a la tarifa del IRPF-2000. Como ya hemos indicado, al no disponer de datos acerca de la distribución de la base liquidable sobre la que incide la tarifa del IRPF-2000, hemos optado por realizar una simulación. Para ello hemos identificado la renta inicial con la base liquidable regular para el IRPF-1994 (Memoria de la Administración Tributaria (1995)) actualizada, mediante el IPC, al año 2000. A la distribución resultante la consideraremos, en lo sucesivo, como la distribución de renta antes de impuestos sobre la que se aplica la tarifa. Para caracterizar dicha distribución se

---

[2] Siendo su expresión $G_i = 1 - \frac{2}{s_i q_i}\left[\int_{F(x_{i-1})}^{F(x_i)} L(p)dp - L(F(x_{i-1}))s_i\right]$.

ha estimado el modelo triparamétrico de Dagum[3] (1977) cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}, \quad x > 0, \quad \beta, \lambda, \delta > 0,$$
$$F(x) = 0, \quad x \leq 0$$

La distribución de renta ajustada aporta los parámetros de la Tabla 2. Junto a ellos se recogen los valores estimados para la media, índice de Gini y los valores observados del estadístico de Kolmogorov[4] (K) del modelo estimado a través del programa EPID[5] proporcionado por Dagum.

Tabla 2. Parámetros estimados del modelo triparamétrico de Dagum para la renta antes de impuestos del 2000.

b	1,3419
l *	29085725,8
d	2,32196
bd	3,11583812
Media estimada*	2655,37
Gini	0,4102
K	1,716

(*) Correspondientes al ingreso medido en miles de ptas.
Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de EPID.

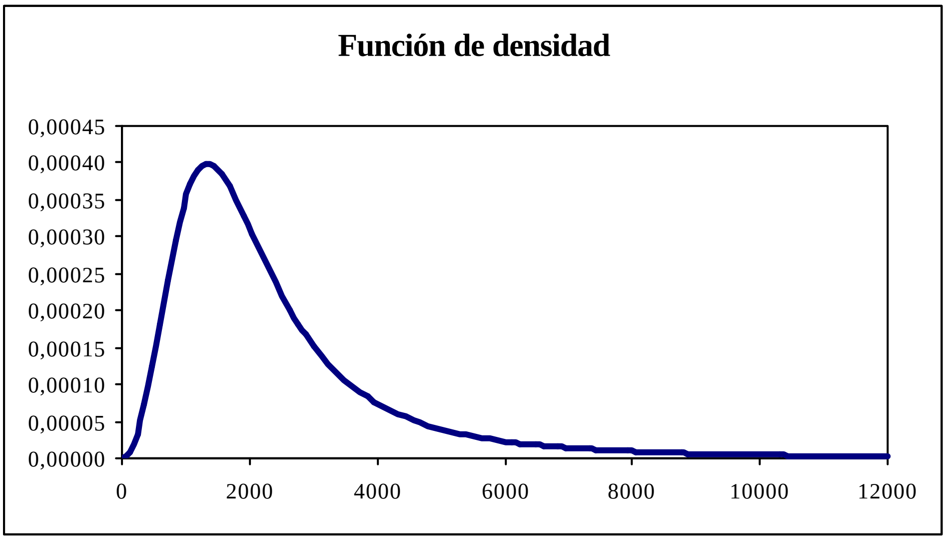
El producto $\beta\delta>1$ indica que la distribución es unimodal, tal y como muestra el Gráfico 5. Además, es asimétrica a la derecha, con una cola pesada, como es característico de este tipo de distribuciones.

[3] Este modelo es obtenido por Dagum al imponer que la elasticidad de la función de distribución de la renta, respecto de la renta, presente las características que están presentes en las distribuciones de renta observadas.

[4] A un nivel de significación del 5%, el contraste de Kolmogorov-Smirnov nos lleva a aceptar la hipótesis nula de que el modelo de Dagum se ajusta bien a la función de distribución observada.

[5] Este programa calcula los parámetros del modelo utilizando el modelo no lineal de mínimos cuadrados y aplicando un algoritmo (Birta, 1978) mediante el cual se minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones de las funciones de distribución observadas y estimadas.

Gráfico 5. Función de densidad de la renta antes de impuestos del 2000.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez estimada la distribución de la renta se obtienen, aplicando las expresiones obtenidas a lo largo de esta sección, los parámetros de interés para las distribuciones antes y después de impuestos, junto a los índices de Gini, Kakwani, y de Reynolds-Smolensky, tanto para la distribución completa como para las correspondientes a cada intervalo. Los resultados figuran en las Tablas 3 y 4.

Tabla 3. Parámetros e índices de interés para los intervalos de la tarifa.

	Intervalos					
	I_1	**I_2**	**I_3**	**I_4**	**I_5**	**I_6**
$F(x_i)^{(a)}$	0,041	0,562	0,866	0,952	0,985	1,000
$L(F(x_i))^{(a)}$	0,007	0,281	0,615	0,782	0,887	1,000
s_i	0,041	0,521	0,304	0,086	0,033	0,015
q_i	0,007	0,274	0,334	0,167	0,104	0,113
m_i	456.261	1.398.305	2.916.894	5.161.807	8.378.973	19.785.425
t_i	82.127	298.873	696.655	1.388.188	2.744.418	8.134.284
a_i	0,180	0,214	0,239	0,269	0,328	0,411
q_i^*	0,008	0,294	0,346	0,165	0,096	0,091
m_i	0,180	0,240	0,283	0,371	0,450	0,480
r_i	0,005	0,220	0,299	0,173	0,128	0,175
G_i	0,144	0,170	0,109	0,078	0,083	0,275
$C_{T,i}$	0,144	0,191	0,129	0,105	0,114	0,321
G_i^*	0,144	0,164	0,102	0,067	0,068	0,243
$I_{K,i}$	0,000	0,021	0,020	0,027	0,031	0,046
$I_{RS,i}$	0,000	0,006	0,006	0,010	0,015	0,032

Fuente: Elaboración propia

[(a)] Los valores de $F(x_i)$ y $L(F(x_i))$ corresponden al límite superior del intervalo.

Tabla 4. Parámetros poblacionales.

m	2.655.370
m(1-a)	1.948.216
G	0,4102
G*	0,3754
$\mathbf{C_T}$	0,5059
a	0,2663
t	707.156
$\mathbf{I_K}$	0,0957
$\mathbf{I_{RS}}$	0,0347

Fuente: Elaboración propia.

Los parámetros de la Tabla anterior ponen de manifiesto la progresividad de la tarifa y que su aplicación supone, por lo tanto, una reducción de la desigualdad. El impuesto medio en la población es de 707.156 ptas. y el tipo global medio es α=0,2663. El nivel de renta que separa a quienes beneficia y perjudica la progresividad frente a la proporcionalidad (su tipo medio asociado coincide con el global) está situado en el cuarto intervalo y es de 6.402.759 ptas. Por otra parte, los resultados que se recogen en la Tabla 3 indican que los contribuyentes cuya base liquidable se sitúa en los tres primeros intervalos de la tarifa soportan tipos medios inferiores a α y la participación de esos intervalos en el volumen de renta después de impuestos es mayor a la que tenían en la distribución inicial. Sucede lo contrario con los tres últimos intervalos. Cabe señalar que los valores de los índices de Gini, G_i, en los distintos tramos, salvo en el último que no está acotado, son muy reducidos debido al corto recorrido de la variable renta en cada uno de ellos. Como consecuencia los correspondientes índices de progresividad y de redistribución son también muy bajos.

5. Descomposición del índice de Gini y de los índices de Kakwani y de Reynolds-Smolensky.

En Dagum (1997a, 1997b) se demuestra que el índice de Gini de la población total, cuando en ella se considera una partición finita en subpoblaciones, se puede expresar como una media ponderada:

$$G = \sum_{i,j=1}^{k} s_i q_j G_{ij}, \qquad [17]$$

siendo $G_{ii} = G_i$ el índice de Gini de la subpoblación i-ésima y $G_{ij} = G_{ji}$ el índice de Gini entre las distribuciones de las subpoblaciones i-ésima y j-ésima, utilizando como ponderaciones los productos[6] $s_i q_j$. La igualdad anterior puede escribirse también como:

$$G = G_d + G_e, \tag{18}$$

$$G_d = \sum_i s_i q_i G_i, \qquad G_e = \sum_{i \neq j} s_i q_j G_{ij}, \tag{19}$$

siendo G_d y G_e las componentes que cuantifican la desigualdad dentro y entre las subpoblaciones, respectivamente.

En nuestro caso cada subpoblación se identifica con un intervalo de la tarifa, por lo que no existe solapamiento entre sus respectivas distribuciones. En general $G_{ij} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\mu_i + \mu_j}$, siendo $\Delta_{ij} = E(|X_i - X_j|)$ la diferencia media de Gini. La ausencia de solapamiento implica $\Delta_{ij} = |\mu_j - \mu_i|$. Con ello resulta que en la distribución de renta inicial la descomposición del índice de Gini se puede expresar como:

$$G = G_d + G_e \tag{18}$$

$$G_d = \sum_{i=1}^{k} s_i q_i G_i \qquad G_e = \sum_{i<j} (s_i q_j - s_j q_i) \tag{20}$$

mientras que la análoga en la distribución después de impuestos, utilizando las expresiones obtenidas en la sección anterior, viene dada por:

$$G^* = G_d^* + G_e^* \tag{21}$$

$$G_d^* = \sum_{i=1}^{k} s_i q_i \frac{1 - m_i}{1 - \alpha} G_i \qquad G_e^* = \sum_{i<j} (s_i q_j^* - s_j q_i^*) \tag{22}$$

Las descomposiciones anteriores dan lugar a sendas descomposiciones de los índices de Reynolds-Smolensky y de Kakwani asociados a la tarifa t(x) en la población total a partir de sus homólogos en cada intervalo. Concretamente, tras un cálculo sencillo, aunque laborioso, se obtiene:

---

[6] Nótese que $\sum_i \sum_j s_i q_j = \left(\sum_i s_i\right)\left(\sum_j q_j\right) = 1$.

$$I_{RS} = G - G^* = \sum_{i=1}^{k} s_i q_i^* \frac{m_i - \alpha}{m_i - \alpha_i} I_{RS,i} + \sum_{i<j} \left[s_i (q_j - q_j^*) - s_j (q_i - q_i^*) \right] \qquad [23]$$

$$I_K = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{RS} = \sum_{i=1}^{k} s_i r_i \frac{m_i - \alpha}{m_i - \alpha_i} I_{K,i} + \sum_{i<j} \left[s_i (r_j - q_j) - s_j (r_i - q_i) \right]. \qquad [24]$$

Las expresiones anteriores presentan una clara analogía formal. En I_{RS}, que mide el efecto redistributivo, intervienen las participaciones de los intervalos en el volumen total de renta disponible (q_i^*), mientras que en I_K, que valora la discrepancia de la tarifa respecto de la proporcionalidad, aparecen sus participaciones en la recaudación total (r_i). En ambos índices, sus primeros sumandos son sumas ponderadas de los valores del índice respectivo en cada uno de los intervalos. En estas sumas el signo de cada sumando coincide con el de la diferencia entre el tipo marginal del intervalo y el tipo medio global de la tarifa, m_i-α, por lo que, en general, no queda determinado a priori el signo de la componente que recoge la contribución del efecto de la tarifa dentro de los intervalos a la redistribución (o a la progresividad) total. Los segundos sumandos de las descomposiciones [23] y [24] incorporan la variación de la desigualdad entre intervalos que resulta de la aplicación de la tarifa.

Los resultados que se obtienen para la tarifa del IRPF-2000 al incidir sobre la base liquidable que estamos considerando en nuestro supuesto, se recogen en la Tabla 5.

Tabla 5. Descomposición del índice de Gini para las distribuciones de renta antes y después de impuestos y de los índices de progresión global

	Poblacional	**En**	**Entre**
G	0,4102	0,0372	0,3730
G*	0,3754	0,0375	0,3380
IRS	0,0347	-0,0003	0,0350
IK	0,0957	-0,0007	0,0964

Fuente: Elaboración propia

En las distribuciones de renta antes y después de impuestos, la desigualdad total está determinada, en un 90%, por la existente entre los intervalos, mientras que la aportación de la desigualdad en los intervalos es muy reducida. Ello es consecuencia del no solapamiento entre sus distribuciones. Una situación similar se presenta con los índices de redistribución y progresividad: la componente en es prácticamente nula y el valor de cada índice depende del efecto de la tarifa sobre la variación de la desigualdad entre los intervalos.

6. Comentario final.

En este trabajo más que un estudio específico de la tarifa del IRPF-2000 y de su efecto sobre una distribución de renta inicial (base liquidable), se proporciona una metodología y un conjunto de expresiones que permiten un análisis detallado de cualquier tarifa lineal por tramos, tanto desde un punto de vista local o estructural como en relación a la medición de la progresividad y redistribución que conlleva su aplicación sobre una distribución de renta dada. Este último aspecto se evalúa para cada tramo y para el conjunto de la distribución, obteniéndose, a partir de la descomposición del índice de Gini, una expresión que relaciona los valores globales de los índices con los correspondientes a cada tramo y con la variación de la desigualdad entre ellos.

Bibliografía.

Birta, L.G. (1978): *OPTPAK, A program package for unconstrained function minimization*. Technical report TR78-05, University of Ottawa, Ottawa, Ontario.

Dagum C. (1977): A new model of personal income distribution: specification and estimation. *Economie Apliquée,* XXX, nº 3, pp. 413-437.

Dagum, C. (1997a): A new approach to the decomposition of the Gini income inequality ratio. *Empirical Economics*, 22, pp. 515-531.

Dagum, C. (1997b): Decomposition and interpretation of Gini and Generalized entropy inequality measures. *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pp. 200-205.

Dagum, C. y Chiu, K. (1991): *User´s manual for the program EPID (Econometric Package for income distribution) for personal computers.* Versión revisada. Ottawa: Statistics Canada.

Fellman, J. (1976): The effects of transformations on Lorenz curves, *Econometrica*, 44, pp. 823-824.

Jakobsson, U. (1976): On the measurement of the degree of progression, *Journal of Public Economics*, 5, pp. 161-168.

Kakwani, N. (1977): Applications of Lorenz curves in economics analysis, *Econometrica*, 45, pp. 719-727.

Kakwani, N. (1984): On the measurement of tax progresivity and redistributive effect of taxes with applications to horizontal and vertical equity. En R.L. Basmann y G.F. Rhodes, Jr (eds.), *Advances in Econometrics*, Vol. 3. JAI Press, Greenwich, CT.

Lambert, P. (1996): La distribución y redistribución de la renta. Un análisis matemático. *Instituto de Estudios Fiscales*. Madrid.

Lambert, P. y Aronson J.R. (1992): Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited. *Economic Journal*, 103.

Ministerio de Economía y Hacienda. (1997): *Memoria de la Administración Tributaria 1995*.

Musgrave, R.A. y Thin, T. (1948): Progressive Taxation in an Inflationary Economy. *Journal of Public Economic*, 56.

Reynolds, M. y Smolensky, E (1977): *Public expenditure, taxes and the distribution income: The United States, 1950, 1961, 1970.* Academic Press, New York.