

BEPPLO LEVI EN EL CONGRESO DE FILOSOFÍA DE 1933

LUCIO R. BERRONE
IMASL, CONICET
San Luis, Argentina

RESUMEN

En una comunicación presentada en el Congreso de Filosofía de Roma, en 1933, Beppo Levi expuso ideas sobre el problema de las infinitas elecciones maduradas a lo largo de cuarenta años. Frente a las posiciones extremas sostenidas por los formalistas e intuicionistas, un personal andamiaje de naturaleza epistemológica le permite sustentar una posición intermedia respecto de la validez de los razonamientos que usan infinitas elecciones. La comunicación representa un claro esfuerzo de síntesis y generalidad pero, hasta la fecha, parece haber eludido la atención de los especialistas. El presente artículo se ocupa de hacer una lectura a la vez descriptiva y crítica del original italiano. Se dedica, además, cierta atención al singular marco histórico que rodeó al Congreso.

ABSTRACT

In 1933 takes place at Roma the VIII Congresso di Filosofia. A paper concerning the axiom of choice was presented in the congress by Beppo Levi (1875-1961). His reflections elaborated during forty years on the problem raised by the reasonings involving an infinity of arbitrary choices were abridged in the paper. By stating a general principle of invariance which every mathematical object must satisfy, Levi succeeds in finding an operative criterion to decide whether a given reasoning involving an infinity of arbitrary choices is or not acceptable. In spite of its importance, the text of the paper seems to have eluded the consideration of historians of mathematics. A minute discussion of the Italian original is presented in this article. Some attention is paid to the singular historic circumstances of the congress.

Palabras clave: Matemática, Epistemología, Italia, Siglo XX.

Keywords: Mathematics, Epistemology, Italy, 20th Century.

1. Introducción

Entre las ponencias ocurridas en el *VIII Congresso di Filosofia* reunido en Roma en 1933 se encontraba una que llevaba el explicativo título de *Considerazioni sulle esigenze logiche della nozione del reale e sul principio delle infinite scelte* [LEVI, 1933]. Su autor, el matemático judeo-italiano Beppo Levi (1875-1961) estaba a cargo de la cátedra de «Teoria delle Funzioni» en la Università di Bologna en donde, involucrado en una siempre exigente actividad didáctica, se desempeñaba desde el año académico 1928/29 [COEN; LEVI, 2000, p. 38]. Desde su ascenso al poder en 1922, el fascismo había continuado permeando a sociedad italiana y «haciendo funcionar con puntualidad los trenes del país»¹ mientras que Levi se contaba entre el grupo de intelectuales que en 1925 habían firmado el «Manifiesto Antifascista» de Benedetto Croce. En la Universidad, el «giuramento» del año 31 había funcionado como una criba: la nueva fórmula del juramento que los profesores debían prestar para acceder a sus funciones había excluido, entre los matemáticos, a V. Volterra (1860-1940), destituido de su cátedra en Roma en diciembre de aquel año [NASTASI; ZAPPA].

Intolerancia y persecución: tales los vientos que por entonces agitaban a las sociedades europeas. Recordemos que el 30 de enero de 1933, Hitler se convirtió en canciller de Alemania. Inmediatamente instituye la persecución de los judíos. Durante el mismo año ocurren las primeras «purgas» en la Unión Soviética de Stalin. En Italia, el control de las instituciones por parte del estado venía aumentando gradualmente. G. Gentile (1875-1944), *Ministro della Pubblica Istruzione* de Mussolini y filósofo creador del reduccionismo idealista conocido como «actualismo», había auspiciado una reforma radical del sistema educativo. En el ámbito institucional de la matemática, el estatuto de la *Unione Matematica Italiana* (U.M.I.) fue modificado en 1934 para hacer lugar a las presiones del régimen. Con las modificaciones introducidas se violaba el carácter de libre asociación de la U.M.I. imponiendo la necesidad de la venia del *Ministero dell'Educazione Nazionale* en la designación de Presidente, Vicepresidente y miembros de la comisión científica².

Empleando un criterio comparativo, algunos autores³ consideran que, hasta la promulgación de las Leyes Raciales en 1938, el estado fascista había sido blando en su actitud antisemita. Más allá de cualquier juicio sobre la historia, en diciembre de 1938 a Beppo Levi le correspondió la cesantía en Bologna. Al año siguiente emigró con su familia a Argentina, país en donde las intolerancias y persecuciones locales podían no alcanzarlo⁴.

Tullio Levi Civita (1873-1941) había estado entre aquellos pocos catedráticos italianos que se habían resistido a las imposiciones del régimen. En enero de 1932, durante una reunión de Facultad en Roma, reacciona contra el «allonta-

namiento» de Volterra. Cuando F. Orestano (1873-1945), abogado y filósofo que presidía la *Società Filosofica Italiana* —transformada en *Ente Morale* luego de un decreto de 1931— lo invita a participar del *VIII Congresso*, Levi Civita encuentra adecuado cruzar el Atlántico para conferenciar en la Universidad de Chicago sobre *Alcuni aspetti matematici della nuova meccanica*. Otros matemáticos asistirían a la reunión en Roma: Beppo Levi y Luigi Fantappie (1901-1956) entre los más destacados.

Hasta aquí unas sucintas anotaciones sobre el marco histórico en que se desarrolló el congreso de Roma. Acaso disculpe su parcialidad el hecho de que el interés principal de este trabajo es el de sintetizar y analizar el contenido de la comunicación de Levi. En ella elabora extensamente alrededor de la cuestión de la aplicabilidad concreta del principio que llama «criterio de Dedekind» con el propósito de exponer, a través del ejemplo, su personal concepción del problema planteado por los argumentos que emplean infinitas elecciones arbitrarias.

La «realización» de infinitas elecciones de modo arbitrario —i.e., en ausencia de una regla que defina la manera en que estas han de hacerse— o, dicho con mayor precisión, la síntesis de nuevos objetos del pensamiento apoyada en una infinidad de tales elecciones, había despertado en el última parte del siglo XIX las sospechas de lógicos y de matemáticos. El título elegido por Levi para su comunicación parecería algo holgado y sólo encuentra justificación cuando, siguiendo su desarrollo, se observa a Levi explicitar su pensamiento sobre cuestiones no sólo de fundamentos de la matemática sino ya sobre los presupuestos de la ciencia en general. En realidad, la discusión alrededor del axioma de elección (AC) ocupa solamente la mitad de las apretadas diez páginas de la comunicación. Ahora bien, si es cierto que la participación de Beppo Levi en el debate de fundamentos de la Matemática ocurrido en las tres primeras décadas del siglo XX ha sido reconocida y estudiada con cierto grado de detalle [MOORE; MOSS; LOLLI, 1999], también lo es el que algunos autores han estudiado específicamente sus contribuciones en relación al AC concediéndole, cuando menos, alguna participación en la formulación rigurosa del axioma. Mencionaremos entre estos a A. A. Fraenkel, E. W. Beth, W. Sierpinski [SANTALÓ, nota 6, p. XXV] y, más recientemente a A. Levy [LOLLI, 1999, nota p. LXX]. Además, en *los Éléments d'Histoire des Mathématiques* de N. Bourbaki una nota recuerda a Peano y a Levi entre los primeros críticos de los razonamientos que utilizan infinitas elecciones (cfr. la edición española [BOURBAKI, p. 59]. Sin embargo, no tenemos noticia de estudios que permitan discernir si, desde el momento en que se le presenta por primera vez el problema de las infinitas elecciones⁵ hasta la elaboración de su ponencia para el Congreso, hubo o no una evolución en el pensamiento de Levi sobre el problema y, si la hubo, cómo y bajo cuáles influencias pudo producirse.

El principio que Levi atribuye a Dedekind reconoce aquella característica esencial de un conjunto infinito A consistente en la posibilidad de coordinar —es decir, de poner en correspondencia biyectiva— al conjunto con uno de sus subconjuntos propios B . En realidad, la matemática moderna (léase «post-cantoriana») había rescatado el aspecto operativo de esta caracterización y, con ello, había logrado manipular intuiciones como la del *infinito actual*, esa entelequia rechazada desde antiguo por paradójica, inasible o impracticable. Sin embargo, no parece acertado situar en este período —últimas décadas del siglo XIX— a la adquisición de esta herramienta del pensamiento. Resulta más apropiado hablar de maduración de ideas, de marcos históricos favorables a tales o cuales desarrollos, de florecimientos ocurridos en tiempo y forma. Dos segmentos de recta pueden coordinarse cualesquiera sean sus longitudes. Dos circunferencias concéntricas, una con radio doble de la otra, pueden coordinarse aún cuando la longitud de la circunferencia externa duplique a la de la interna. La aparente paradoja que esto encierra se le había presentado ya al griego autor de la *Mecánica*, hay quienes sostienen que el mismo Aristóteles, y la *rota aristotelica* fue motivo de varia disquisición hasta que Galileo, en sus *Discorsi*, debe enfrentar el problema en relación con la coherencia de los cuerpos sólidos. Recuérdense la forma de «dialogo a tre» que Galileo da a sus principales obras: tres personajes, Salviati, Simplicio y Sagredo se reúnen durante jornadas sucesivas para discurrir sobre temas de interés común.

Durante la primera jornada de los *Discorsi* [GALILEI, Jornada Primera, [68]-[73]] luego de una extensa elaboración alrededor de la *rota* e intentando exponer con claridad sus ideas, Salviati efectúa un pasaje desde las cantidades continuas a las discretas y hace observar a su amigos Sagredo y Simplicio que, así como dos circunferencias o dos segmentos cualesquiera pueden coordinarse entre sí, también la sucesión de los números naturales puede coordinarse con la de sus cuadrados [GALILEI, [78]-[81]]. Cuando promediaba el siglo XIX se publicó un libro con el sugestivo título de *Paradoxien des Unendlichen* («Las Paradojas del Infinito»). Su autor, B. Bolzano (1781-1848), matemático y teólogo nacido en Praga, había muerto hacía unos años dejando buena parte de sus trabajos sin publicar. La póstuma publicación de las *Paradoxien* quedó en manos de su amigo y discípulo Fr. Pfihonsky, pero los notables desarrollos que contenía alrededor del problema del infinito, aunque eventualmente reconocidos por algunos matemáticos, nunca encontraron la difusión que hubiera merecido su originalidad⁶. Incluían estos la noción «Cantoriana» de conjunto⁷ y, con el claro entendimiento de que el infinito actual debía ser legalmente introducido en Matemática, también la identificación de la coordinabilidad con una parte propia como propiedad característica de los conjuntos infinitos. Es claro que en Italia, hacia fines del siglo XIX se conocía la obra de Dedekind y no la de Bolzano, obra cuya importancia, insistimos, es de reconocimiento más bien reciente.

Regresando al asunto del presente estudio, digamos que la comunicación de Levi admite una descomposición en dos partes. La primera de ellas elabora sobre el principio de invariancia como postulado epistemológico general. El principio define los objetos del análisis racional y científico como aquellos que permanecen invariantes frente a los cambios espacio-temporales, de sujeto, etc. En la segunda parte se vale de este principio para sustentar una posición intermedia —entre la formalista y la intuicionista— sobre el AC: la invariancia de la conclusión frente a un cambio arbitrario de las elecciones es el criterio de validación para los argumentos que utilizan una infinidad de elecciones. En las dos secciones siguientes presentamos una exposición crítica de cada una de las partes sólo que, con el fin de hacer más asequible su comprensión, invertiremos el orden en que aparecen en la ponencia, abordando primero la cuestión más técnica de las infinitas elecciones y el AC. La sección final reúne una serie de notas y observaciones.

Hemos elegido exponer el material estableciendo conexiones e insertando comentarios entre los párrafos más importantes del original italiano. Ello sirve a un doble propósito: por un lado permite apreciar el particular modo en que Levi expresa sus ideas y por otro, rescata un documento de difícil acceso que no ha sido, creemos, debidamente considerado.

Sobre este último punto, mencionemos que no aparece referencia alguna a la comunicación de 1933 en el artículo [LOLLI, 1999] aparecido en la edición de 1999 de las *Opere* [LEVI, 1999] y que ello vuelve necesariamente parcial a la síntesis que allí se traza sobre las contribuciones de Levi en torno al AC. Mencionemos además un mensaje electrónico⁸ de S. Coen, editor de las *Opere* y biógrafo de Levi, que responde a uno mío en el que le formulaba algunas preguntas. Sobre la comunicación de Levi escribe:

«Ero convinto di avere la riproduzione di tutti i lavori del Levi, ma sfortunatamente non sono riuscito a trovare tra questi la sua comunicazione all'ottavo Congresso di Filosofia. Purtroppo, non sembra nemmeno presente nelle biblioteche dell'Università di Bologna; fatto, invero, un poco strano».

2. La posición de Levi sobre la validez de AC: «un partido mediano»

El primer párrafo de la segunda parte de la comunicación se abre señalando la general falta de acuerdo sobre el AC:

«Vengo così a denunciare fin da principio che, nella risposta a qualche domanda che l'argomento presenta, non sono oggi d'accordo nemmeno i matematici...».

A este párrafo sigue una minuciosa exposición de naturaleza técnica. Una cosa es el reconocimiento de la propiedad general de coordinabilidad de los con-

juntos infinitos, el «criterio de Dedekind», y otra bien distinta la de su aplicación para decidir si un conjunto prefijado A es infinito. De hecho, Levi interroga

«come si deve prendere, in un tale aggregato, una parte per assoggettarla all'esperimento di porla in corrispondenza coll'aggregato totale e una sua parte propria comunque definita? Come si deve effettuare questo tentativo per assicurare che l'esito negativo eventuale dipende da una proprietà intrinseca nell'aggregato e non da nostra incapacità più o meno momentanea? La ricercata corrispondenza si potrà porre fra l'aggregato totale e una sua parte propria comunque definita?... L'applicazione caso per caso della regola del Dedekind dipende ciascuna volta da una particolare invenzione!»

Subrayamos en este párrafo el uso que hace Levi de la palabra «experimento». Así pues, la aplicación del criterio de Dedekind a un conjunto determinado A requiere de la doble identificación de una parte propia B y de una biyección $f : A \setminus B \rightarrow B$, ambas producto de un particular artificio. Esta dificultad desaparecería, indica luego, si fuese posible aplicar el siguiente procedimiento general: dado el conjunto (no vacío) A , elijamos uno cualquiera de sus elementos a_1 ; si $A_1 = A \setminus \{a_1\}$ fuera no vacío, extraigamos $a_2 \in A_1$; luego, si $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\}$ fuera, a su vez, no vacío, elijamos $a_3 \in A_2$... Continuando con el mismo procedimiento hasta cuando resulte posible, dos casos mutuamente excluyentes pueden presentarse. En el primero de ellos, alguno de los A_n es vacío y A es un conjunto finito; en el segundo, para cada n resulta $A_n \neq \emptyset$; y se habrá extraído del conjunto A una sucesión a_1, a_2, \dots . Llamando H al conjunto de los a_n y poniendo $K = A \setminus H$, se define entonces una función («correspondencia») $f : A \rightarrow A_1$ mediante

| | | |
|----------|-----------|--------------------|
| | $a(n+1),$ | si $x = a_n \in H$ |
| $f(x) =$ | | . |
| | $x,$ | si $x \in K$ |

Enseguida cuestiona

«...qual senso ha tutto questo? Dopo tutte le parole dette, sappiamo noi qual parte di A è H e qual parte K ? Sappiamo noi qual è la corrispondenza di cui parliamo? Peggio ancora: sappiamo noi se K esiste oppure non?»,

para luego observar cómo el procedimiento descrito consta de partes de muy diverso valor lógico, pues

«se l'aggregato H si può pensare definito, colla sua numerazione, la definizione data della corrispondenza ci permette di dire immediatamente quale sia l'elemento corrispondente a un elemento preso arbitrariamente in A . È ciò che avverrebbe, per es. se A fosse un aggregato di numeri comprendente la totalità dei numeri interi, nel qual caso potremmo assu-

mere per H la successione dei numeri interi medesimi. Se invece si conosce H ma non la sua numerazione, la corrispondenza sarebbe assegnata senza ambiguità solo per gli elementi di K (corrispondenti a se stessi), mentre rimarrebbe incerta per quelli di H : ma nell'ipotesi più generale in cui l'aggregato A , infinito per la nostra intuizione, non possedesse già distinta una parte numerata o da numerarsi, e il procedimento descritto si dovesse applicare ad esso nel modo più puro, in questo caso, preso ad arbitrio un elemento qualunque di A , noi non saremo in grado di dire quale elemento gli corrisponda (se sé stesso, od altro e quale altro); perchè la risposta a questa domanda potrebbe darsi soltanto dopo effettuata la estrazione da A di tutti gli elementi di H , e cioè dopo aver eseguita infinite volte l'operazione di estrazione da A di un elemento arbitrario».

Levi concluye que la función f no queda bien determinada y pregunta si es que, a falta de una determinación precisa para f , todavía puede hablarse de su existencia. Desde luego, esta es la dificultad que debe salvarse cuando se piensa en los objetos matemáticos originados mediante una infinidad de selecciones. La respuesta es incierta, afirma Levi en este punto de su exposición, pero

«pare innegabile che il ragionamento abbozzato dia per lo meno una convinzione morale che ogni aggregato, o contiene soltanto un numero finito di elementi e questi si possono contare facendo uso di una parte limitata della successione dei numeri naturali, ovvero se ne può estrarre una successione di elementi in corrispondenza colla successione completa dei numeri naturali e che così ogni aggregato si può senza ambiguità classificare fra i finiti ovvero fra gli infiniti secondo la definizione del Dedekind».

Una «convicción moral», señala; pero, ¿cuál es el valor lógico-matemático de esta convicción? La pregunta es de la mayor importancia, pues si bien el ejemplo adoptado para exponer el problema se cuenta entre los más simples y menos significativos, existen otros (cuyo detalle omite interponiendo un retórico «...che qui non sarebbe il caso di riportare») en los que tales razonamientos

«hanno non trascurabile importanza euristica e didattica in quanto permettono di giungere in modo semplice e comodo a conclusioni cui pure si arriva, sebbene spesso con maggior difficoltà, con altri raziocinii».

Este pasaje revela el estatus que la cuestión tenía para Levi. En trabajos anteriores podemos encontrar esos ejemplos de naturaleza más técnica que faltan en su exposición en el Congreso. En el artículo [LEVI, 1902], por ejemplo, objeta la prueba dada por Bernstein de que la familia integrada por los subconjuntos cerrados de la recta tiene la potencia del continuo —prueba que se vale de una infinidad de elecciones arbitrarias— y proporciona una alternativa que, si bien evita el uso de infinitas elecciones, resulta bastante más extensa.

Volviendo a la cuestión fundamental del valor matemático de los razonamientos que involucran infinitas elecciones, distingue Levi una división tripartita en las opiniones:

«gli estremisti del rigore, che rifiutano senz'altro ogni ragionamento in cui si faccia ogni e qualsiasi uso delle infinite scelte; si potrebbe porre a capo di questa scuola il nostro Peano... Gli estremisti dall'altro lato, che accettano un principio che prende nome da E. Zermelo, il quale lo enunciò nel 1904, e considerano senz'altro ammissibile un ragionamento in cui occorran infinite scelte... Infine esiste un partito mediano, il quale dal più al meno è disposto ad adottare un atteggiamento pragmatico, accettando o rifiutando le conseguenze delle infinite scelte secondochè il buon senso o l'intuizione della verità matematica lo consiglia».

Levi prosigue observando que los sostenedores de la segunda posición⁹ suelen apoyarse en la visión axiomática de la matemática, visión según la cual cualquier deducción derivada de un sistema de postulados siguiendo las reglas de la Lógica, resulta «ammissibile e degna di considerazione»: la validez del AC resulta entonces inobjetable consecuencia de la consistencia del sistema. Una prueba de la consistencia de AC+ZF debía todavía esperar hasta 1938. Aquel año vio aparecer el trabajo [GÖDEL, 1938], donde K. Gödel demuestra que AC+ZF es consistente si ZF lo es¹⁰ (consistencia relativa). No parece, sin embargo, que Levi haya nunca considerado el revolucionario trabajo [GÖDEL, 1931], aparecido dos años antes del Congreso. De haberlo hecho, ello le habría sugerido otros argumentos en favor de su posición. Como veremos, de índole muy distinta serán las razones que esgrima Levi para enmarcar su pensamiento acerca del rol del AC dentro de aquellos pertenecientes a un «partito mediano».

Distintas concepciones han aparecido acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos y, como consecuencia, de los criterios de validación y creación de nuevos objetos¹¹. Cada una de ellas asigna un significado distinto a una misma palabra: existencia. Una visión ya clásica los compartimenta en tres «ismos». El Platonismo los considera existentes de manera independiente de la mente humana, en tanto que el Constructivismo les confiere legalidad sólo cuando son producto de un proceso efectivo de construcción. Las relaciones del Constructivismo con la lógica intuicionista son bien conocidas. Para el Formalismo, en cambio, es la consistencia del sistema axiomático la dispensadora de legalidad. Así pues, el formalismo y el constructivismo-intuicionismo parecen capturar apropiadamente las posiciones extremas. Ahora bien, ¿puede la posición de Levi encuadrarse dentro del Platonismo? Observemos su concluyente expresión en el siguiente pasaje:

«...io credo di non andare errato col ritenere che, anche qui, la virtù stia veramente nel mezzo: che non sia illimitatamente accettabile il principio delle infinite scelte, anche se vestito del manto assiomatico: ma che nemmeno si debba aderire alle tesi dei puristi del finito che metterebbero in mora troppa parte del nostro pensiero; che però anche sia troppo poco l'adagiarsi in criteri pragmatici e di buon senso o anche di intuito matematico per accettare o respingere caso per caso l'applicazione del principio. Ma che un più sicuro criterio per caratterizzare i casi in cui le infinite scelte siano da ammettersi come procedimento dedut-

tivo possa ritrovarsi riferendosi agli stessi presupposti di invarianza obbiettiva di cui si parlava in principio: vale cioè per gli oggetti del pensiero (e del pensiero matematico, in particolare) come per ogni altro oggetto, che essi debbano considerarsi definiti sempre e soltanto quando siano identificabili in condizioni diverse di luogo, di tempo, di soggetto pensante: quindi il criterio essenziale per l'accettabilità di un ragionamento fondato sopra infinite scelte è che la conclusione di esso resti immutata quando si mutino queste scelte».

El párrafo propone al criterio de «invarianza obbiettiva» —i.e., independencia del objeto de las variaciones temporales, espaciales, del sujeto pensante, etc.— como dispensador de legalidad (existencia) para los entes matemáticos como objetos del pensamiento al igual que para cualquier otra clase de objetos. Aplicado a la validación de un argumento en el que intervienen infinitas elecciones, el criterio se traduce en una regla práctica: la conclusión del argumento debe permanecer invariante frente a cambios arbitrarios de las elecciones. Pero, ¿de dónde emana y en qué consiste el criterio propuesto? Levi discute sobre ello en la primera parte de su comunicación, parte que desbrozaremos en la sección siguiente.

3. La invariancia de lo real

La trama conceptual que exhibe Levi para cimentar su criterio de validación de los objetos del pensamiento admite un postulado básico. Ya en la primera línea de su comunicación distingue la existencia de «un alcunchè di «reale, obbiettivo» entre los presupuestos necesarios de la investigación científica, señalándole a esta entidad una característica primordial: la invariancia; es decir

«una identità che questo «reale, obbiettivo» conserva al variare delle condizioni che caratterizzano l'atto soggettivo: tempo, spazio, persona del soggetto».

La «*scienza antica*», construcción de sentido común ante todo —señala después— encontró en la idea de *materia* una realización de estas condiciones. Así las cuatro raíces de Empédocles, aire, agua, tierra y fuego, que calan hondo en el pensamiento filosófico griego y que Levi, sintetizando ideas, menciona a propósito. Ocurre, sin embargo, que la *scienza* pronto encuentra obstáculos para encajar lo real en este marco y es entonces cuando apela a entidades más elementales: la molécula, el átomo... También para las ciencias biológicas lo real se aparta de la experiencia macroscópica, y lo orgánico se vuelve célula, gen, cromosoma, en un proceso que puede denominarse *desmaterialización*. Entre tanto, las ciencias de lo inorgánico, la Física y la Química, no se detienen allí. El átomo —observa, pierde la unidad que Leucipo y Demócrito le atribuyeran «e si scinde in elettroni, protoni, neutroni, positroni...»¹². Sin embargo,

«...in queste entità (che bisogna pur riconoscere appartenere in buona parte al dominio del simbolo o della immaginazione) è ancora concesso un certo posto ad attributi fittizi con-

nessi appunto con detta immaginazione e rappresentanti un residuo del concetto di "materialità": durezza, forma, elasticità, ecc.; attributi fittizi, ho detto, perchè privi di importanza nei rapporti scientifici».

Más aún,

«questo residuo appare come un fardello non soltanto inutile ma ingombrante ed il «reale» si converte in onda, campo, potenziale, ecc. Nè vi è da illudersi che il processo abbia ad arrestarsi».

La noción de lo real, presupuesto de la investigación científica —concluye, ha sido gradualmente despojada durante su desarrollo de sus condiciones esenciales; la invariancia en primer lugar. Para Levi, la ciencia de su época sustituye de manera desventajosa el requisito de invariancia por la hipótesis del «progreso científico»: subsiste un sustrato de «reale-vero», pero se trata ahora de una entidad a cuyo conocimiento la ciencia no puede llegar si no es mediante una sucesión ilimitada de aproximaciones. En cualquier caso, le parece evidente el que

«se questo reale-vero deve necessariamente restarci eternamente nascosto sotto le presunte approssimazioni illimitatamente succedentesi, è perfettamente equivalente il credere a queste e a quello, ovvero accettare senz'altro la conclusione che noi andiamo alla ricerca di un pseudo-reale che del reale non ha le proprietà caratteristiche ed in primo luogo non ha quella della identità a se stesso in altro luogo ed in altro tempo».

De las dos posibilidades señaladas —continúa explicando, la primera conlleva un residuo subjetivo en su concepción de un «reale non realmente constatabile», mientras que la segunda «ci lascia l'insoddisfazione dell'antinomia e pare spingerci a cercare piú lontano quel sustrato da chiamarsi reale». Recordando el proceso de desmaterialización de lo real, supone que tal proceso deba finalizar en las nociones indefinidas de espacio y tiempo, nociones cuyo tratamiento podría corresponder antes a la Lógica que a la «scienza positiva».

Ahora bien, el hipotético real se compone de elementos diferentes (materia, energía, átomos, moléculas, electrones, células...), y la ciencia investiga las *relaciones constantes* entre estos elementos: la existencia y constancia de tales relaciones es pues otro de los presupuestos de la ciencia¹³. En verdad, razona Levi, la distinción entre invariancia de lo real por una parte, e invariancia de las relaciones entre sus elementos es mera ficción:

«poichè qualunque oggetto ci si presenta soltanto per le sue relazioni con altri, la distinzione fra l'invariabilità dell'oggetto e l'invariabilità di tali relazioni è una finzione di comodo; il porre l'una in dubbio equivale a porre l'altra: con questa differenza che, se il reale obbiettivo, indietreggiando successivamente, può immaginare di riparare in ultimo in nozioni invariabili di spazio e di tempo, ciò a nulla serve per mantenere vero il presupposto di una qualche invarianza di relazioni».

El agudo concepto que cierra el párrafo conduce enseguida a considerar a la *probabilidad*, «nozione forse altrettanto indefinita quanto il tempo e lo spazio», como un expediente que ha permitido a la ciencia moderna reencontrar la invariancia en la variabilidad de las relaciones.

En este momento, la comunicación presenta un «punto y aparte». Levi pasa a considerar otro de los presupuestos de la investigación científica: *la logicidad de los hechos*; vale decir, el que los hechos «si adeguino, nel loro svolgimento, alle regole medesime seguite dalla nostra ragione». Comienza estableciendo que

«La ragione determinante per cui l'immagine del reale [...] si sposta continuamente si riassume essenzialmente nel fatto che a mano a mano che la scienza progredisce, e cioè a mano a mano che la nostra esperienza viene a contatto colla realtà fenomenica, si presentano fatti incapaci di rientrare nelle conseguenze logiche delle immagini [...] costituenti il reale obiettivo e le sue leggi».

Habitualmente, estas discordancias entre teoría y realidad fenoménica se atribuyen al supuesto carácter perennemente aproximativo de la teoría, indica Levi; y es tal supuesto el que confiere sentido a las tentativas que tienen por objeto la erradicación de las discordancias mediante la modificación del iequadro del reale obiettivo, per modo da sistemare logicamente le conoscenze antiche e nuove. Claro es que la Lógica ofrece la posibilidad de validar algunas proposiciones en función de un determinado número finito de otras asumidas como verdaderas. En este punto, Levi hace intervenir la *esperienza del investigador*, que nunca alcanza a enunciar un número finito de proposiciones verdaderas tales que ellas mismas junto con sus derivaciones lógicas puedan resumir «tutta la verità sperimentale». De esta experiencia extrae Levi una verdad de consecuencias dramáticas: la fe en la logicidad de los hechos es también ilusoria. Expresado en términos de una clásica concepción dualista, propone un argumento de plausibilidad:

«...se noi ammettiamo un «fuori di noi» —i fatti,— e un «dentro di noi» —il nostro pensiero,— è ben chiaro che fra il modo unico in cui potrebbe avvenire l'adeguamento dei primi al secondo e gli infiniti modi in cui può avvenire la loro divergenza, sia da considerarsi come più probabile la seconda eventualità».

Por cierto, Levi encuentra en la ilogicidad de lo real una justificación de mayor peso para la fe en el «progresso della scienza» que aquella proporcionada por la postulación de inasibilidad:

«...se l'ammettere la illogicità del reale, invece della ipotetica irrimediabile approssimazione delle nostre conoscenze, dà anche [...] un fondamento alla nostra fede nell'infinito sviluppo e nella perpetua esistenza della ricerca scientifica, pare che questa debba essere veramente la conclusione».

Pero si lo real no obedece esencialmente a los principios de la Lógica, observa Levi, eso excluye a la *predicción* de entre las tareas de la ciencia. Y la observación involucra peligrosamente a la Matemática —«scienza di calcolo e di deduzione e quindi, parrebbe, rivolta essenzialmente al prevedere»— en su histórica relación con las ciencias fácticas. Levi va a interponer aquí tres razones que funcionan como tres salvavidas. La primera es de orden psicológico:

«...io credo di non errare affermando che il conoscere e non il prevedere è l'intimo movente dello scienziato».

La segunda devuelve a la deducción una cierta función instrumental, pues

«...anche (la deduzione) ha in verità il suo posto, se non per la fede nella verità delle previsioni, almeno per saggiare fin dove si può mantenere la logicità dei fatti e dove è invece necessario mutare e moltiplicare le premesse».

Es sin embargo la última de las razones la que va a rescatar un rol trascendente para la Matemática, pues

«...essa compie una specie di esperienza interna del pensiero, talora accidentalmente occasionata da qualche comune applicazione, allo stesso modo che sorge il fatto nuovo nel mondo fisico nella ripetizione e osservazione di operazioni abituali; talvolta coscientemente predisposta come l'esperimento scientifico e cioè ponendosi in condizioni di particolare semplicità, per modo da svincolarsi quanto possibile dalle suggestioni del mondo fisico: in tutti i casi essa compie, nel suo svolgimento, una analisi e una decomposizione progressiva dei concetti intorno ai quali essa opera».

Aparece pues el valor de la Matemática como una especie de laboratorio de ideas en donde se sintetizan unos patrones para el pensamiento¹⁴:

«Questa esperienza mentale mostra [...] che le nostre idee [...] sono complessi di attributi che soltanto la consuetudine o la comune esperienza fisica ci fa apparire come necessariamente concomitanti; essa ci porta così a separare questi attributi e a ricomporli diversamente, preparando [...] l'esempio di schemi logici cui la scienza del reale può rivolgersi per inquadrare il fatto nuovo che viene in conflitto con le deduzioni fatte entro un quadro precedente».

En octubre de 1935, en ocasión de la vigésimocuarta reunión de la «Società Italiana per il Progresso delle Scienze» en Palermo, retornará Levi sobre el punto hablando sintéticamente del «ufficio *quasi-esperimentale* del pensiero logico e matematico nella formazione delle nozioni» y creyendo [LEVI, 1936, p. 4]

«... di dover insistere sul termine "quasi-sperimentale" perchè la cosa ravvicinata a fatti analoghi che si presentano nello studio di concetti inerenti alla filosofia naturale...».

La concepción de la Matemática, al menos en su fase de formación, como ciencia *quasi-experimental* ha sido difundida por G. Polya (1887-1985). En el prefacio de [POLYA, 1954], leemos:

«Mathematics is regarded as a demonstrative science. Yet this is only one of its aspects. Finished mathematics presented in a finished form appears as purely demonstrative, consisting of proofs only. Yet mathematics in the making resembles any other human knowledge in the making. [...] The choice of appropriate experimental material is of great importance in the inductive investigation of any problem. It seems to me that mathematics is, in several respects, the most appropriate experimental material for the study of inductive reasoning».

Elaboradas por I. Lakatos (1922-1974), las ideas de Polya se transformarían en una incisiva mirada arrojada sobre la epistemología de la Matemática (cfr. [MOTTERLINI] pero, insistamos, Levi escribe en 1935, treinta años antes de que Lakatos desarrollase las tesis básicas que conforman el trabajo [LAKATOS]¹⁵. Ya radicado en Argentina, Levi recensiona en 1945 —el mismo año de su aparición— el *How to Solve it* [POLYA, 1945], primer libro en donde Polya sintetiza su método heurístico; es también cierto que la recensión [LEVI, 1945] recoge sin mermas el espíritu de la obra¹⁶. La cronología indica, sin embargo, que debió de abreviar en otras fuentes. A propósito, recordemos que estaba bien al tanto de los recentísimos desarrollos de la Física¹⁷. Es así que Levi advierte:

«Occorre però, a mio modo di vedere, bene intendere anche questo ufficio della matematica in rapporto alle altre scienze sperimentali e speculative: perchè qualche tendenza, avvalorata forse da taluni saggi recentissimi di applicazioni alla fisica teorica, coronati da successi che parvero impressionanti, potrebbe far sorgere il pensiero che alla formola matematica possa spettare quasi un potere magico, per cui regole combinatorie e superficiali analogie formali potrebbero avere valore di spiegazioni e di previsioni nel mondo dei fatti».

Este uso «mágico» de las expresiones matemáticas para el que, parafraseando a R. Feynman, reservaríamos el apelativo de babilónico, lo juzga Levi en consonancia con la hipótesis de una «massima illogicità dei fatti», hipótesis menos digna de consideración que aquella otra de una «totale e necessaria logicità», pues

«...non meno di questa essa suppone una coincidenza fra un qualche cosa che avviene fuori di noi e qualche cosa che, indipendentemente di esso, si svolge dentro di noi: con questa differenza però, che l'ipotesi della logicità e non quella della totale illogicità trova appoggio in un presupposto iniziale della ricerca scientifica».

La ciencia es, finalmente, el dominio de la legalidad, y vemos a Levi afirmar su epistemología en ese terreno:

«Io dico al contrario che solo il fatto e l'esperienza esterna, coadiuvati sì, ma non srogati, da quel senso speciale in cui si riassume l'intima esperienza deduttiva, sono la guida utile per la scelta di quelli, fra gli infiniti schemi logici che la matematica continuamente prepara, che meglio si offrono come quadro conveniente alle nostre conoscenze».

4. Conclusión y notas finales

El pensamiento de Levi alrededor de las cuestiones de fundamento en general, y sobre el AC en particular, parece haber experimentado, desde sus publicaciones de los años iniciales del siglo, menos una evolución que una acumulación. Al igual que el de otros matemáticos del llamado período áureo de la matemática italiana, el pensamiento de Levi es rico y complejo. Como hemos visto, en la comunicación de 1933 formula un criterio operativo de validación para los razonamientos que involucran una infinidad de elecciones arbitrarias.

El criterio encuentra sustento en una concepción general de la ciencia, delimitando la naturaleza de los objetos con los que esta es capaz de operar. En el artículo [LEVI, 1934] aparecido en 1934, Levi vuelve sobre la cuestión del AC en relación con su noción de dominio deductivo. Un párrafo entre las páginas 70 y 71 de dicho artículo reconoce la impotencia de tal noción como instrumento para establecer la existencia de un buen orden sobre un conjunto arbitrario A ,

«...perchè, essendo lo scopo medesimo del supposto ampliamento del dominio deduttivo quello di stabilire l'esistenza dell'aggregato A , cesserebbe ogni ragione di effettuare il detto ampliamento se ci si astringesse a costruire prima qualche ben-ordinamento di A ».

G. Lolli [LOLLI, 1999, p. LXXI] sugiere que Levi no se daba cuenta de que la sustancia del AC es de naturaleza existencial, en el sentido de que el axioma consiste concretamente en la afirmación de que el conjunto de selectores es no vacío. Teniendo en cuenta el hecho de que el postulado de buena ordenación es equivalente al AC¹⁸, la lectura del párrafo citado muestra por el contrario que, al menos para la época del congreso, Levi comprendía muy bien la cuestión.

Cerramos este trabajo con una serie de observaciones de índole diversa. La singularidad del marco histórico que rodeó al congreso plantea algunos interrogantes. Por ejemplo, ¿cuál había sido el propósito perseguido por los filósofos gentilianos al invitar a participar del Congreso de 1933 a personalidades ciertamente heterodoxas como Levi-Civita y Levi?

En una carta enviada por correo electrónico a comienzos de 2006, P. Nastasi responde a la cuestión informándome sobre la primera circular dirigida aquel año a los socios de la *Società Filosofica*. En realidad, la reunión de la Società en Roma era la primera en convocarse luego de su transformación en *Ente Morale Nazionale*. En aquel documento, Orestano, el presidente del *Ente*, se refiere «alle forze filosofiche che operano nel seno del nostro Ente» y declara los objetivos de «impedire la dispersione...», «concentrare tutta la collaborazione...» además del de

«...dare a questo nostro Congresso il carattere d'una consultazione multipla..., si che possa essere messa in evidenza, e precisamente in Regime Fascista, tutta la originalità. ricchez-

za e potenza, ma anche consonanza del pensiero filosofico italiano sui bisogni essenziali della vita nazionale».

Es que los procedimientos de exclusión del régimen, lanzados como instrumentos de selección, podían tener los efectos adversos de la aislación y el empobrecimiento. Es así como interpreta Nastasi al propósito de los filósofos actualistas, quienes con la organización del Congreso «tentavano di uscire da un certo isolamento».

La frecuentación de artículos de filosofía, el acercamiento a los sistemas filosóficos en la búsqueda de entendimientos fundamentales, es característica inquietud del joven Levi: su discurso inaugural en Cagliari [LEVI, 1908] durante el acto de inicio del año académico 1907/08 testimonia este hecho. Ahora bien, disertando en el Congreso de 1933, ¿resulta menos incisivo que aquel otro que pronunciaba su conferencia inaugural en Cagliari? En otras palabras, la presencia de los filósofos gentilianos (y también la de otros colegas matemáticos simpatizantes del régimen, como Fantappie), ¿inhibe de algún modo en Levi la libre manifestación de ideas? Veamos. Por lo menos desde su discurso en Cagliari, apele a cierta gnoseología de raíz kantiana. El entendimiento indefinido de la relación $x \in A$ crea el conjunto subyacente A: «poichè noi concepiamo la classe, quand'anche non ne sappiamo identificare i singoli elementi... L'essenziale è invero, perché di classe si possa parlare, che, un'idea essendo data, noi sappiamo distinguere se alla classe (l'elemento) appartiene oppur no». [LEVI, 1918, pp. 710-711]. También expresa ideas de corte nominalista: «la parola crea l'oggetto, la definizione è inutile...». [LEVI, 1918, p. 697] y retorna a Kant cuando expresa que «Ancora una volta, qualunque sia l'esperienza, la lingua in cui la dobbiamo esprimere deve esistere indipendentemente da essa...». [LEVI, 1918, p. 710]. La identificación entre acto de pensamiento y acto nominativo aparece repetidamente en el artículo [LEVI, 1923]. Como es natural en un agudo crítico de la axiomática, Levi percibe claramente las limitaciones de los sistemas filosóficos:

«La filosofia medesima, in quanto sistema gnoseologico e costruzione cosmologica, entra quasi interamente in questa regione delle asserzioni fittuanti e variabili: il complesso delle nostre attività psichiche ed intellettuali, onde è ben naturale che invano si tenti un sistema che raccolga l'adesione di tutti i pensatori, invano ancora si tenti un sistema che soddisfi appieno l'architetto medesimo, s'egli non si risolve a serrarvisi dentro e a dare ad esso, con atto d'arbitrio, il primo posto delle certezze: atti d'arbitrio di cui anche i più profondi pensatori ci offrono esempi non rari». [LEVI, 1918, p. 684]

Desde luego, tales concepciones se alejaban de las sostenidas por los filósofos del régimen pero, según señala Nastasi en su carta, el valor principal de los trabajos presentados en el *Congreso* fue dado a las comunicaciones mientras que

«alle discussioni sarà riservato soltanto il tempo lasciato disponibile dalle comunicazioni; tenuto anche conto che le discussioni in una materia di lentissima elaborazione quale la filosofia è, non possono improvvisarsi e lasciano per lo più il tempo che trovano».

Nastasi transcribe también la correspondencia que Orestano envió a Levi Ci-vita a propósito del *Congresso*. La nota de invitación formal para participar del mismo está fechada el 28 de septiembre. Desconozco si es que se conserva o no la carta de invitación dirigida a Beppo Levi.

NOTAS

1. La mención irónica es de Hobsbawm, [HOBSBAW, p. 130].
2. Al respecto, véase [NASTASI, p. 336].
3. V.g. A. Kuznitsky en [KUZNITZKI].
4. Un comprensivo relato del proceso contiene el ya citado artículo [NASTASI]. Estudios biográficos sobre B. Levi pueden leerse en Levi [2000] y [COEN]. En el tomo III, págs. 312 y ss. de Levene, G. G. (1967), *Historia Argentina*, 2da. edición, Editorial Campano, Buenos Aires, puede recabarse información sobre la situación institucional y social de Argentina en la época del arribo de Levi y su familia.
5. Recordemos rápidamente el episodio. Pocos años después de la publicación de su célebre artículo sobre la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ bajo la sola hipótesis de continuidad de la función f , G. Peano había retomado la cuestión enfocándola desde un punto de vista más general. Producto de tales esfuerzos fue la memoria [PEANO] aparecida en *Matematische Annalen* en 1890. En 1893, Levi reescribe la memoria de Peano

«...liberandola dal nuovo ostacolo posto alla lettura dall'uso della ideografia logica che il Peano aveva introdotto nella propria esposizione, e dalle prolissità derivanti da un eccesso di precisione nella enunciazione di osservazioni introduttorie. Soltanto dopo questo lavoro del Mie il risultato ed il procedimento dimostrativo del Peano poté essere universalmente stimato al suo giusto valore e provocare altri studi e complementi da parte del De la Vallée-Pousin, dell'Arzelà, dell'Osgood. Merita di essere ricordata, fra le osservazioni critiche di questo lavoro, una relativa alla necessità —per il rigore matematico— di evitare “le infinite scelte”: la quale se, in confronto coll'argomento, poté allora parere uno degli accennati eccessi di precisione, ebbe ed ha tuttavia una così estesa eco di discussioni» [LEVI, 1932].
6. Al respecto véase [ŠEBESTIK, Part IV].
7. G. Cantor no introduce en sus trabajos la noción de conjunto (como entidad constituida por una multiplicidad de elementos con alguna característica en común descripta por una regla) sino hasta 1883. Un intento de comparación entre las posibles diferencias entre las concepciones de Cantor y las de Bolzano puede verse en [BUSSOTTI].
8. El mensaje de Coen está fechado el 22 de enero de 2006.
9. Zermelo y, luego de él, muchos de los representantes de la escuela alemana.
10. Después del teorema de incompletitud, probado por Gödel en 1931 [GÖDEL, 1931], se sabía que una demostración de la consistencia relativa de ZF+AC era todo lo que podía obtenerse. En 1963, Cohen probó la independencia relativa de AC; i.e., asumida la consistencia de ZF, ZF + (\sim AC) es también consistente.

11. La literatura sobre el tema es extensa (véase Lolli [2000] y las referencias allí citadas).
12. Nótese la mención que, bien al corriente de los desarrollos de la Física de su época, hace Levi de los neutrones y los positrones. El descubrimiento experimental de los primeros lo había hecho J. Chadwick en Cambridge; mientras que los últimos se evidenciaron dejando trazas anómalas en las cámaras de niebla con las que experimentaba C. D. Anderson: ambos descubrimientos datan de 1932.
13. El tema había sido considerado por Peano y todavía antes por los empiristas ingleses.
14. Al respecto véase Lolli [2001].
15. El trabajo estaba basado en una conferencia pronunciada durante el *Colloquium in the Philosophy of Sciences*, llevado a cabo en Londres en 1965.
16. «...la matemática en construcción aparece como una ciencia experimental, inductiva...». [LEVI, 1945, p. 240] traduce Levi del prefacio del libro.
17. Su extenso artículo crítico «Nuove teorie della meccanica quantistica e le loro relazioni coll'analisi» había aparecido en el *Annuario Scientifico e Industriale* en 1928.
18. La prueba de que el AC implica el postulado de buena ordenación había sido dada por Zermelo en su artículo de 1904. La afirmación recíproca es de simple demostración.

AGRADECIMIENTOS

Los profesores S. Coen (Bologna) y P. Nastasi (Palermo) han cedido gentilmente buena parte de la información utilizada en las notas históricas de este trabajo además de revisar y corregir mis deficiencias atinentes al Italiano.

BIBLIOGRAFÍA

- BOURBAKI, N. (1976) *Elementos de Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza, 2ª ed.
- BUSSOTTI, P. (1998) «Il problema dei fondamenti della matematica negli scritti giovanili di Bernard Bolzano». *Epistemologia*, 2, 225-244 (<http://www.tilgher.it/epistemologia.html>).
- COEN S. (1999) «Beppo Levi: una biografia». En: *Opere 1897-1926*. Bologna, A cura dell'Unione Matematica Italiana con contributo del CNR, Edizioni Cremonese, XIII-LIV.
- GALILEI G. (1945) *Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias*. Buenos Aires, Librería del Colegio. Versión española de *Discorsi e Dimostrazioni*, trad. por J. San Román Villasante, anotada por T. Isnardi.
- GÖDEL, K. (1931) «Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica und verwandter systeme I». *Monatshefte für Math. Phys.*, 38, 173-198.
- GÖDEL, K. (1938) «The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis». *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 24, 556-557.
- HOBSBAWM, E. (1995) *Historia del Siglo XX*. Barcelona, Crítica. Traducción castellana de J. Faci, J. Ainaud y C. Castells.

- KUZNITZKI, A. (2001). *Italia y el Antisemitismo*. Córdoba, Talleres gráficos J. Solsona.
- LAKATOS, I. (1978) «A renaissance of empiricism in the recent philosophy of Mathematics in Mathematics, Science and Epistemology». En: J. Worrall and G. Currie (eds.) *Philosophical papers*. Cambridge, Cambridge University Press, 24-42.
- LEVI, B. (1902) «Intorno alla teoria degli insiemi e degli aggregati». *Rendiconti R. Ist. Lomb. di sc. e lett.*, (II), XXXV, 863-868.
- LEVI, B. (1908) «Alcune considerazioni sulle idee scientifiche primordiali». Cagliari, Tip. Pietro Valdès. Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1907/08 nella R. Università di Cagliari, 1-53.
- LEVI, B. (1918) «Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni». En: *Scritti Matematici offerti ad Enrico d'Ovidio*. Torino, Bocca, 305-324.
- LEVI, B. (1923) «Sui procedimenti transfiniti». *Math. Ann.*, 90, 3/4, 164-173.
- LEVI, B. (1932) «L'opera matematica di Giuseppe Peano». *Boll. U.M.I.*, XI, 5, 253-252. Reproducido en el volúmen A. Terracini (Ed.) (1955) *In Memoria di Giuseppe Peano*. Cuneo, Stab. Tip. Editoriale.
- LEVI, B. (1933) «Considerazioni sulle esigenze logiche della nozione del reale e sul principio delle infinite scelte». En: *Atti dell'VIII Congresso di Filosofia*, Roma, Tipografia Agostiniana.
- LEVI, B. (1934) «La nozione di "dominio deduttivo" e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi». *Fund. Math.*, XXIII, 63-74.
- LEVI, B. (1936) «A proposito dell'infinito e delle sue antinomie». En: *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*. Roma, XXIV Riunione, Palermo, 12-18 ottobre 1935, 363-367.
- LEVI, B. (1945) Recensión de G. Polya *How to Solve it - A New aspect of mathematical method*. Princeton, Princeton Univ. Press, 204 pp. En: *Math. Notae*, V, 242-243.
- LEVI, B. (1999), S. Coen (ed.) *Opere 1897-1926*. Bologna, Edizioni Cremonese. A cura dell'Unione Matematica Italiana con contributo del CNR.
- LEVI, L. (2000) *Beppo Levi. Italia y Argentina en la vida de un matemático*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- LOLLI, G. (2000) «La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia». (<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli>).
- LOLLI, G. (2001) «Esperimenti e dimostrazioni». (<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli>).
- LOLLI, G. «L'opera logica di Beppo Levi». En: *Opere 1897-1926*. Bologna, Edizioni Cremonese. A cura dell'Unione Matematica Italiana con contributo del CNR, LXVII-LXXVI.

- MOORE, G.H. (1982). *Zermelo's Axiom of Choice, Its Origins, Development and Influence*. Berlin, Springer.
- MOSS, B. (1979) «Beppo Levi and the Axiom of Choice». *Hist. Math.*, 6, 54-56.
- MOTTERLINI, M. (2000) *Lakatos*. Milano, Il Saggiatore.
- NASTASI, P. (1998) «La matematica italiana dal manifesto degli intellettuali fascisti alle leggi razziali». *Boll. U.M.I., La Matematica nella Società e nella Cultura*, (8) 1-A, 317-345.
- PEANO, G. (1890) «Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires». *Math. Ann.*, XXXVII, 182-228.
- POLYA, G. (1945) *How to Solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton, Princeton Univ. Press.
- POLYA, G. (1954) *Induction and Analogy in Mathematics. A guide to the art of plausible reasoning*. Princeton, Princeton Univ. Press.
- ŠEBESTIK, J. (1992) *Bernhard Bolzano*. Paris, Textes et études J. Vrin, L'histoire des sciences.
- SANTALÓ, L.A. (1962) «La obra científica de Beppo Levi». *Math. Notae*, XVIII, Vol. 16, XXIII-XXVIII.
- ZAPPA, G. (1999) «Matematici al tempo del fascismo. Ricordi di un vecchio docente». *Boll. U.M.I., La matematica*, (8) 2-A, 37-40.

