ILUIL, vol. 32, 2009, 59-72

Le cinquième postulat des parallèles chez al-Mu'taman Ibn Hūd, roi de Saragosse (1081-1085)

YOUCEF GUERGOUR
Ecole Normale Supérieure, Kouba, Alger

RESUMEN

El estudio del 5° postulado de los Elementos *de Euclides consiste en el estudio de la teoría de las paralelas. Esta teoría consiste también en el estudio de los intentos que se hicieron para demostrarlo o sustituirlo por otro postulado. La teoría de las paralelas constituye a nivel histórico y epistemológico una introducción indispensable para el estudio de las geometrías euclídeas y el lugar de las paralelas en este tratado.*

En este artículo hacemos una descripción de los rastros de las distintas tentativas de demostración del famoso 5° postulado en las tradiciones matemáticas griegas y árabes así como una exposición íntegra del intento de demostración de al-Mu'taman Ibn Hūd, rey de Zaragoza (1081-1085), en su Tratado al-Istikmāl.

ABSTRACT

Studying the 5th postulate of Euclid's Elements *amounts to the study of the theory of parallels. This theory also amounts to studying attempts to find either proofs for this postulate or to substitute it by another postulate. From a historical and epistemological point of view, the theory of parallels constitutes an important introduction to the study of the Euclidian geometry and the place that parallels have in this treaty.*

In this paper, we describe traces of different attempts to prove this famous 5th postulate in Arabian and Greek mathematical tradition. We end this work with a complete presentation of the proof given by al-Mu'taman Ibn Hūd, king of Saragossa (1081-1085), in his treaty al-Istikmāl.

Palabras clave: Quinto Postulado, Paralelas, Euclides, al-Mu'taman, Al-Andalus, Zaragoza, Reinos de Taifa, Ciencia Árabe, Matemáticas, Geometría, Edad Media, Siglo XI.

Keywords: Fifth Postulate, Parallels, Euclid, al-Mu'taman, Al-Andalus, Saragossa, Taifa, Arabic Science, Mathematics, Geometry, Middle Ages, 11th Century.

Recibido el 28 de agosto de 2008
Aceptado el 28 de noviembre de 2008

ISSN 0210-8615

Introduction

L'étude du 5e postulat des *Eléments* d'Euclide se ramène à l'étude de la théorie des parallèles, qui elle-même renvoie aux différentes tentatives de démonstration du postulat ou de son remplacement par un postulat plus acceptable. Dans cet article, nous nous intéressons à la contribution d'al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 1085) qui visait à démontrer le fameux postulat. L'exposé de cette contribution sera précédé par l'évocation des différentes tentatives de démonstration du postulat, durant les périodes hellénistique et arabe.

La théorie des parallèles chez les mathématiciens grecs

La notion de droites parallèles est formulée en ces termes, dans la définition 23 du Livre I des *Eléments* d'Euclide: «*Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autres, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre*» [EUCLIDE, I, 1994, p. 166]. Cette définition n'a pas tardé à provoquer des réserves de la part de certains mathématiciens. D'une part, elle se présente sous forme négative (non rencontre), et d'autre part, elle fait intervenir une notion qui n'est pas définie auparavant, à savoir celle de l'infini (prolongement indéfini). Dans ces conditions, la vérification du parallélisme est difficile voir même impossible (Figure 1).

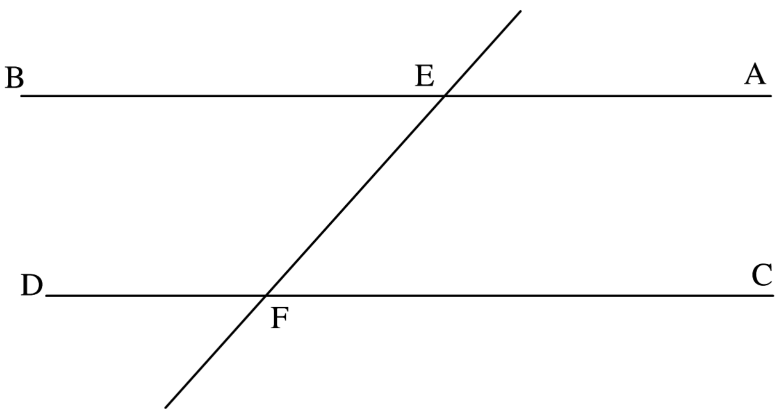


Figure 1

Quant au cinquième postulat, il est énoncé, dans le même le Livre I, ainsi: *«Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits»* [EUCLIDE, I, 1994, p. 175] (Figure 2).

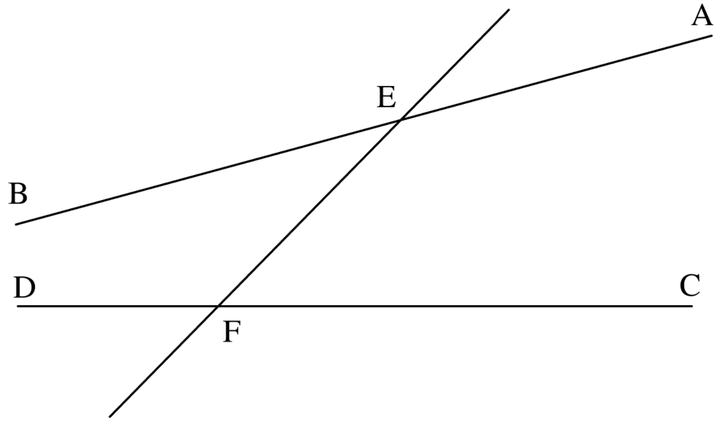


Figure 2

Comme on le constate, l'énoncé de ce postulat ressemble plus à celui d'une proposition. De plus, il est la réciproque d'un énoncé qui, lui, est démontré puisqu'il correspond à la proposition 29 du Livre I des *Eléments* qui affirme ceci: *«Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits»* [EUCLIDE, I, 1994, p. 251]. Ce sont ces raisons qui ont amené de nombreux mathématiciens, des deux traditions grecque puis arabe, à refuser le postulat des parallèles dans la version euclidienne, puis à tenter de lui trouver une démonstration à partir d'autres postulats plus acceptables.

Les premières critiques de la formulation euclidienne du postulat ont été rapportées par Proclus dans son commentaire sur le premier livre des *Eléments*. Il nous a également conservé une démonstration attribuée à Ptolémée (II^{e} s.) qui était contenue dans son traité *Sur la rencontre de droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux droits*. Cette preuve a été critiquée par Proclus qui expose une démonstration reposant sur un axiome attribué à Aristote et qui dit: «*Si deux droites formant un angle sont prolongées à l'infini, leur distance mutuelle dépassera toute grandeur finie*» [EUCLIDE, I, 1994, p. 300].

Proclus rapporte aussi une autre définition des parallèles attribuée à Posidonius (II^{e} s. av. J. C.) qui y utilise la notion d'équidistance. Les parallèles y sont définies comme des droites «*qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent pas dans un seul et même plan, mais ont toutes les perpendiculaires amenées des points de l'une à l'autre égales*» [JAOUICHE, 1986, p. 31] ainsi qu'une tentative de Ptolémée de démontrer directement la proposition 29 [EUCLIDE, I, 1994, p. 251] sans faire intervenir le postulat des parallèles.

Dans un fragment conservé par an-Nayrīzī, dans son *commentaire* sur les *Eléments* d'Euclide [HOGENDIJK, 2000, pp. 252-265], Simplicius attribue à Aghanis une tentative de démonstration du postulat. La démarche de ce dernier consiste à définir les lignes parallèles en termes d'équidistance. Il s'agit pour lui de droites qui «*lorsqu'elles sont prolongées indéfiniment de part et d'autre, la distance entre elles ou la perpendiculaire abaissée de l'une des deux sur l'autre sont toujours égales et non différentes*» [JAOUICHE, 1986, p. 31]. Cela lui permet, contrairement à ce qu'avait fait Euclide, de démontrer la proposition 29 sans l'utilisation du fameux postulat. Après cela, Aghanis a tenté de démontrer le cinquième postulat [JAOUICHE, 1986, p. 32]. Sa preuve est considérée comme l'une des premières tentatives d'application de la définition précédente [JAOUICHE, 1986, p. 34].

La théorie des parallèles dans la tradition mathématiques arabe d'Orient

Selon les sources connues, le premier mathématicien de la tradition arabe qui se soit intéressé au postulat des parallèles est al-Jawharī (X^{e} s.), dans son ouvrage *Sur la théorie des parallèles*, dont le contenu nous est parvenu par l'intermédiaire de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 1274) [JAOUICHE, 1986, p. 137]. Sa méthode consiste à tenter de démontrer d'abord le postulat puis à s'en servir pour établir la proposition 29 des *Eléments*. Al-Jawharī ne donne pas de définition explicite des parallèles. Sa démarche est fondée sur la non-rencontre de deux droites dans un plan. Elle est donc différente des méthodes conçues par les mathématiciens grecs depuis Posidonius. La démonstration d'al-Jawharī repose sur cinq lemmes et une proposition qui est équivalente au cinquième postulat d'Euclide [JAOUICHE, 1986, p. 37].

Après cette tentative, c'est Thābit Ibn Qurra (m. 901) qui s'est intéressé au sujet. Il a élaboré deux démonstrations du postulat. La première se trouve dans le traité intitulé: *Maqāla fī burhān al-muṣādarāt al-mashhūra min Uqlīdis* [Opuscule sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide]. Elle est basée sur le principe disant que «*si les deux droites coupées se rencontrent d'un côté, elles ne se rencontrent pas de l'autre*». Cela lui permet de démontrer, dans le cas où les angles alternes internes sont égaux, que les deux droites sont équidistantes. De plus, il introduit le postulat suivant: «*Si une sécante coupe deux droites et que celles-ci se rapprochent l'une de l'autre d'un de leurs côtés, alors elles s'écartent l'une de l'autre de l'autre côté et leur rapprochement du côté où elles se rapprochent l'une de l'autre et leur écartement du côté où elles s'écartent vont croissant*». C'est à l'aide de ce postulat et de la définition des parallèles que Thābit Ibn Qurra démontre la proposition 29 d'Euclide. Il donne ensuite, dans la proposition cinq de son traité, une démonstration du postulat en se basant sur l'axiome d'Archimède.

La deuxième tentative de Thābit est décrite dans un autre traité intitulé: *Maqāla fī anna al-khaṭṭayn idhā ukhrijā ᶜalā aqall min zāwiyyatayn qā'imatayn iltaqayā* [Opuscule sur le <fait> que si deux droites sont menées selon des angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent]. Cette tentative est basée essentiellement sur le mouvement uniforme d'un point sur une droite perpendiculaire à une autre droite fixe. Il obtient alors deux droites équidistantes comme l'avait fait Aghanis. Mais il introduit un postulat dont lequel il remarque que tous les points d'un solide qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme décrivent des droites. C'est à l'aide de ce postulat et de quelques propositions sur les propriétés du quadrilatère que Thābit Ibn Qurra démontre la proposition 29. Il donne ensuite une démonstration du cinquième postulat d'Euclide.

On remarque, que c'est avec ce traité qu'apparaissent les premières considérations sur les propriétés du rectangle. Il s'agit, premièrement, de démontrer que si dans un quadrilatère deux angles adjacents à un même côté sont égaux et si les deux autres côtés de ces angles sont égaux, alors les deux autres angles du quadrilatère sont égaux (Figure 3). Deuxièmement, il suffit de démontrer, le théorème suivant: «*si les deux angles à la base sont droits, les deux autres le sont aussi*» [JAOUICHE, 1986, p. 59; RASHED & HOUZEL, 2005, pp. 9-54].

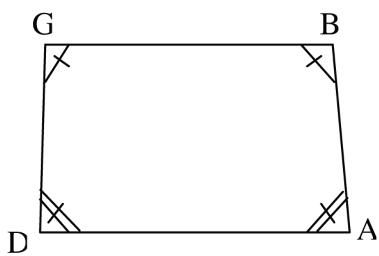


Figure 3

Après Thābit Ibn Qurra, les contributions les plus importantes qui nous sont parvenues sont celles d'Ibn al-Haytham (m. 1041). Elles se trouvent dans deux commentaires qu'il a consacrés aux *Eléments* d'Euclide. Le premier est *Kitāb sharḥ muṣā darāt Uqlīdis fī l-Uuṣl* [Livre expliquant les postulats d'Euclide dans les *Eléments*] [IBN AL-HAYTHAM, Ms. Istanbul, Feyzullah 1359/2, p. 7]. Le second est le *Kitāb fī all shukūk kitāb Uqlīdis fī l-Uuṣl* [livre sur la résolution des doutes du livre des *Eléments* d'Euclide] [IBN AL-HAYTHAM, Ms. Istanbul, University 800, pp. 24-27]. Dans ses démonstrations, il utilise l'intuition et l'imagination pour s'assurer la construction de droites infinies. Puis, comme Thābit, il introduit le mouvement uniforme et continu dans son utilisation des droites équidistantes [JAOUICHE, 1986, p. 65].

Après lui, cUmar al-Khayyām (m. 1131) s'est intéressé au postulat en lui consacrant une épître importante intitulée *Risāla fīshar mā ashkala min muṣādarāt kitāb Uqlīdis* [Epître sur l'explication des prémisses du livre d'Euclide] [DJEBBAR, 14, 2002, p. 79-136]. Il commence par critiquer les tentatives de ses prédécesseurs et plus particulièrement celle d'Ibn al-Haytham à qui il reproche d'avoir introduit le mouvement en géométrie allant ainsi à l'encontre du principe d'Aristote qui affirme ceci: «*La Physique traite des êtres qui ont en eux-mêmes un principe de mouvement. D'autre part, la Mathématique est une science théorétique et qui traite d'êtres immuables, mais non séparés*» [ARISTOTE, 1981, II, f. 1064a]. Puis il expose sa tentative de démonstration dont l'intérêt, pour l'histoire de la théorie des parallèles, réside dans son utilisation du fameux quadrilatère qui portera le nom de Saccheri (m. 1733). Al-Khayyām considère successivement les cas où l'angle des deux droites est droit, aigu ou obtus et il démontre ainsi que les deux cas de l'angle aigu et de l'angle obtus aboutissent à une contradiction. A partir de là, al-Khayyām expose sa tentative de démonstration du postulat des parallèles.

Nous concluons cette évocation rapide de l'histoire de la théorie des parallèles en pays d'Islam en évoquant les travaux de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī dans ce domaine, qu'il a publiés dans deux écrits: *ar-Risāla ash-shāfiya can ash-shak fī al-khuṭūṭ al-mutawāziya* [Epître qui délivre du doute concernant les droites parallèles] et le *Taḥrīr Uqlīdis* [Rédaction <des Eléments> d'Euclide].

La contribution d'al-Mu'taman (m. 1085)

Il s'agit du plus ancien texte connu de l'Occident musulman qui concerne le cinquième postulat d'Euclide. Al-Mu'taman l'a intégré à l'ensemble des propositions traitant de la géométrie plane et il en a fourni une tentative de preuve. La proposition qu'il a consacrée au postulat est la quatorzième de la deuxième section du premier chapitre. Elle a été placée après celle qui est équivalente aux deux propositions 29 et 30 du Livre I des *Eléments*. Elle vient aussi après celle qui regroupe les trois propositions 27, 28 et 31 du premier Livre de ce traité, c'est-à-dire celles qui concernent la théorie des parallèles. La tentative de démonstration d'al-Mu'taman est basée sur le mouvement et s'inscrit donc dans le prolongement des démarches de Thābit Ibn Qurra dans les deux traités déjà évoqués et de celles d'Ibn al-Haytham dans ses *Muṣādarāt*.

Mais, comme les autres démonstrations des mathématiciens d'Orient antérieurs au XI^e^ siècle, celle d'al-Mu'taman utilise implicitement le postulat des parallèles. En effet, grâce au mouvement, l'auteur a pu remplacer la notion de rencontre des deux droites D_1 et D_2 à une distance finie d par celle du mouvement d'un point sur D_1 qui atteindrait D_2 en un temps fini puisque la vitesse v de la droite parallèle est supposée «uniforme» (Figure 4).

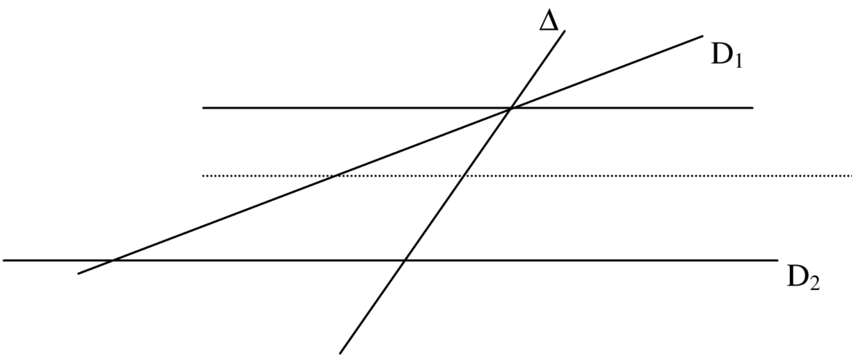


Figure 4

Nous donnons, ci-après, l'édition du texte de la proposition 14 de la deuxième section du premier chapitre de l'*Istikmāl.* Elle sera précédée par une transcription moderne de son contenu et par une traduction française. Nous devons préciser que le texte édité n'est pas la version d'al-Mu'taman (qui n'a pas encore été retrouvée), mais celle d'Ibn Sartāq (XIV^e^ s.), un mathématicien d'Asie Centrale qui avait entrepris, en son temps, une rédaction complète du premier volume de l'ouvrage d'al-Mu'taman. Cette rédaction, intitulée *al-Ikmāl ar-riyyāḍī* [La complétion mathématique], nous est parvenue dans deux copies [DJEBBAR, 1997, p. 185-192]. Nous avons utilisé pour ce travail la copie du Caire [Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université 23029].

Transcription moderne

Si une ligne tombe sur deux lignes, <de sorte que> les deux angles intérieurs d'un même côté sont inférieurs à deux <angles> droits, les deux <lignes> se rencontrent dans cette direction.

Considérons une droite HGT qui coupe une autre DGBA au point G. Traçons une droite EBZ passant par le point B de sorte que les points Z et T soient du même côté de la droite AD et que $Z\hat{B}G) + B\hat{G}T) < \pi$.

Alors les droites BZ et GT se rencontrent du côté des points Z et T.

Preuve

On trace une ligne droite KBL passant par B de sorte que le point K soit du même côté que les points Z et T par rapport à la droite AD et $K\hat{B}G = T\hat{G}D$.

Supposons que la droite KB se déplace du point B au point G tout en gardant l'angle KBG constant (Alors en toute position K_1B_1G de la droite KB, on a $K_1\hat{B}_1G = K\hat{G}B = T\hat{G}D$).

Au début de ce déplacement, KB coupe ZB en B. Ensuite le point d'intersection de ZB et K_1B_1 se déplace sur BZ dans la direction de Z.

La position finale de ce déplacement est $K_2B_2 >$ GT.

Supposons que K_2B_2 et BZ ne se rencontrent pas en cette position finale. KB et BZ ne se rencontrent pas en B lors de la position initiale. Par conséquent, nous avons deux lignes droites qui se prolongent indéfiniment du même côté et ces deux droites se rencontrent au début du déplacement mais ne le sont pas à la fin de ce déplacement. Ceci ne peut se produire que si les deux lignes droites coïncident quelque part durant leurs déplacements au moins en partie. Ceci est impossible.

Donc GT et BZ doivent avoir un point d'intersection (Figure 5**)**.

Traduction française

<Proposition 14>

Si une ligne tombe sur deux lignes, <de sorte que> les deux angles intérieurs d'un même côté sont inférieurs à deux <angles> droits, les deux <lignes> se rencontrent dans cette direction.

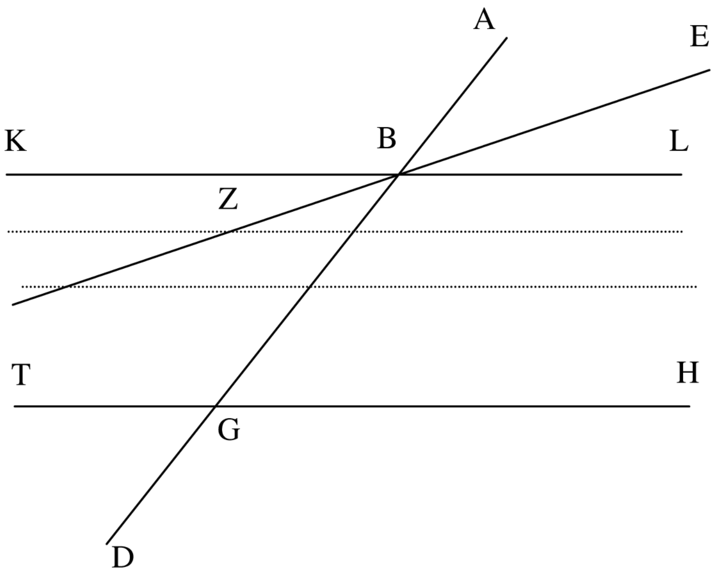


Figure 5

<Preuve>

<Supposons> que ABGD tombe sur EBZ, HGT et que les deux angles ZBG, TGB ensemble soient inférieurs à deux droits. Alors, l'angle ZBG est inférieur à l'angle TGD.

Si on construit sur le point B, de la ligne BG, l'angle GBK comme l'angle DGT, le côté BK <de l'angle> tombe, par rapport à BZ, du côté de A, c'est-à-dire qu'il y tombe entre A et Z.

Et si on prolonge KB du côté de B jusqu'à L, BL tombe entre E et H parce que les quatre parties des deux <droites> concourantes se situent selon des positions alternées et parce qu'il est possible de mener, à partir de tout point donné sur BG, une ligne entourant, avec elle, un angle comme l'angle KBG, en grandeur et en position.

Il est donc possible de supposer une ligne LBK mobile sur la ligne BG, préservant sa position, c'est-à-dire préservant un angle comme l'angle KBG, en grandeur et en position, à chaque instant où elle coupe BG entre les deux points B, G.

Il est possible de supposer ce mouvement semblable <à lui-même>, de sorte qu'il ne ralentisse pas chaque fois qu'il est examiné, et de supposer que ce mouvement préserve sa similitude et conserve la position de toute ligne donnée superposée à LBK.

Supposons donc <donnée> une ligne infinie dans les deux directions et superposée à LBK. Appelons cette ligne la *ligne donnée*. Supposons également que EBZ est infini dans les deux directions et que les lignes LBK, ABG, EBZ, HGT sont toutes fixes et que la *ligne donnée* est en mouvement à une distance délimitée de G, du côté de G, <selon> un mouvement semblable <à lui-même> et qui conserve la position, comme nous l'avons indiqué.

Il est alors clair que la *ligne donnée*, lorsqu'elle se superpose à LBK, coupe les deux lignes ABG, EBZ en un même point qui est B, et que si elle se sépare de LBK, à l'aide du mouvement semblable <à lui-même> <tout> en conservant sa position sur BG de sorte qu'elle soit entre LBK et HGT, alors les deux intersections se séparent et son intersection avec BG a lieu sur un point entre les deux points B, G et avec BZ sur un point entre les deux points B, Z.

Et à chaque fois que la <*ligne donnée*> poursuit son mouvement, <l'une de> ses deux intersections s'éloigne de B et se rapproche de G et l'autre se rapproche de Z.

Et tant que la *ligne donnée* est dans cet état de mouvement, elle l'est, avec toutes ses parties, de LBK vers la région de HGT; et aucune de ses parties n'est en contact avec LB vers la région de A; et sa superposition avec EBZ selon une de ses parties à l'exclusion d'autres est impossible à cause du fait qu'elles sont rectilignes.

Quant à <sa superposition> selon toutes ses parties, elle ne peut se concevoir que si une de ses parties, celle sur BK, soit dans la région de G, et <celle> sur LB dans la région de A. Ceci est impossible.

Donc, tant que la *ligne donnée* est dans cet état, elle n'est pas superposable sur EBZ, ni selon toutes ses parties ni selon certaines d'entres-elles. Et puisque la *ligne donnée* et EBZ sont infinies et que <lorsque> deux <lignes> infinies se coupent, alors qu'elles sont dans un même plan, on ne peut les séparer qu'après leur superposition. La *ligne donnée* ne peut non plus, tant qu'elle dans cet état, ne pas être en contact avec EBZ. Tant qu'elle est en mouvement vers la région G, d'un mouvement semblable <à lui-même> et conservant sa position sur BG, elle est en fait concourante à EBZ et à nulle autre.

Et puisque le mouvement est semblable <à lui-même>, qu'il ne ralentit pas au fur et à mesure qu'il se prolonge, que la distance est finie, c'est la distance de B à G-, et que la position est conservée, alors la *ligne donnée* mobile atteindra, par son mouvement, HGT. Elle se superposera à elle. Si la *ligne donnée* se superpose à HGT alors qu'elle coupe EBZ, alors HGT coupe EBZ au point d'intersection de la *ligne donnée* avec elle (Figure 6).

C'est ce à quoi nous voulions aboutir.

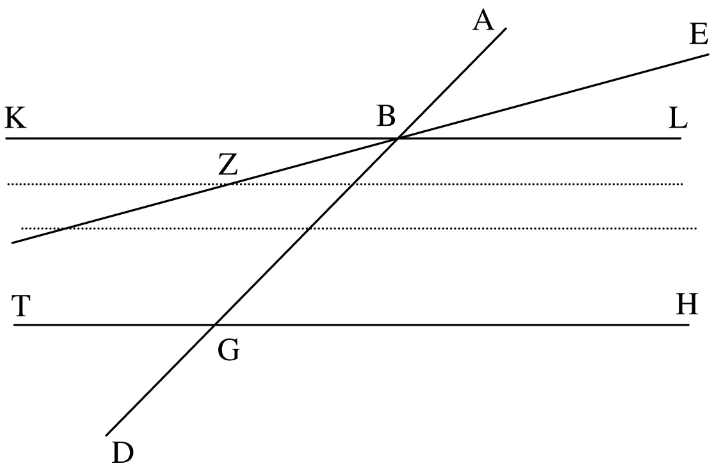


Figure 6

<مبرهنة 14>

إذا وقع خط على خطين قصيّر الداخليتين في جهة أقل من قائمتين، فهما يلتقيان في تلك الجهة.

<برهان>

فليقع أ ب جــ د على هــ[1] ب ز، ح جــ ط. ولتكن زاويتا ز ب جــ، ط جــ ب جميعا أقل من قائمتين. فتكون زاوية ز ب جــ أصغر من زاوية ط جــ د. فلو عملنا على نقطة ب من خط ب جــ زاوية جــ ب ك كزاوية د جــ ط، وقع ضلع ب ك منها من ب ز إلى جهة أ، أي وقــع فيها بين أ، ز.

ولو أخرجنا ك ب في جهة ب إلى ل وقع ب ل فيها بين هــ، ح إذ المتقاطعان إنما تقع اقسامهما الأربعة على تبادل الأوضاع. ولأنه من الممكن أن يخرج من كل نقطة تفرض على ب جــ خط محيط معه بزاوية كزاوية ك ب جــ في القدر والوضع، فمن الممكن أن يفرض خط ل ب ك متحركا على خط ب جــ حافظا لوضعه، أي حافظا لزاوية كزاوية ك ب جــ في القدر والوضع في جميع أزمان كونه متقاطعا لــ ب جــ فيما بين نقطتي ب، جــ. ومن الممكن أن تفرض هذه الحركة متشابهة حتى لا يبطئ كلما أمعن فيها وأن تفرض هذه الحركة مع نعت تشابهها وحفظها الوضع لكل خط يفرض منطبقا على ل ب ك. فلنفرض خطا غير متناه في الجهتين منطبقا على ل ب ك، ولنسمه بالمفروض. ونفرض هــ ب ز أيضا غير متناه في الجهتين وخطوط ل ب ك، أ ب جــ، هــ ب ز،ح جــ ط[2] كلها ثابتة، والمفروض متحركا على بعد جــ المحدود إلى جهة جــ، حركة متشابهة وحافظة للوضع كما ذكرنا. فظاهر أن المفروض عند انطباقه على ل ب ك مقاطع لخطي أب جــ، هــ ب ز كليهما على نقطة واحدة هي ب، وأنه إذا فارق ل ب ك بالحركة المتشابهة حافظا لوضعه على ب جــ، فصار فيما بين ل ب ك، ح جــ ط، افترق التقاطعان، فوقع تقاطعه مع ب جــ على نقطة فيما بين نقطتي ب، جــ ومع ب ز على نقطة فيما بين نقطتي ب، ز. وكلما أمعن في الحركة ازداد تقاطعه معهما بعدا عن ب وقربا عن جــ و ز. ولأن المفروض مادام في هذه الحالة من الحركة، فهو إنما يكون بجميع أجزائه بأسرها عن ل ب ك إلى ناحية ح جــ ط، ولا يكون شيء من أجزائه البتة،

[1] هــ ب ز : م. جــ ب ز

[2] ح جــ ط : م. ح ط، ثم زيدت الجيم فوق السطر

واصلاعن ل ب إلى ناحية أ وإنطباقه على هـــ ب ز ببعض أجزائه دون البعض محال لاستقامتهما.

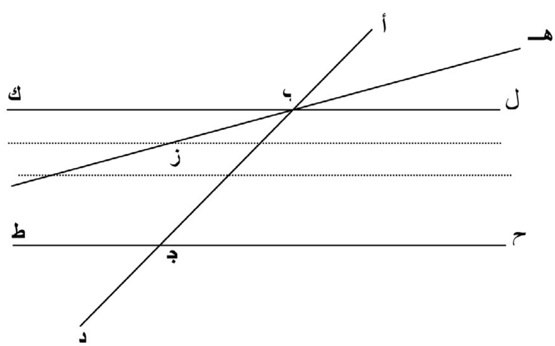
وأما بكل أجزائه فهو إنما يتصوّر بعد أن يصير البعض من أجزائه التي عن ب ك إلى ناحية ل جـــ وعن ل ب إلى ناحية أ وهو غير ممكن.

حينئذ فالمفروض مادام في هذه الحالة ليس بمنطبق على هـــ ب ز لا بكل أجزائه ولا ببعضها.

ولأن المفروض و هـــ ب ز غير متناهيين اذا تقاطعا لم يمكن افتراقهما، وهما في سطح واحد، إلاّ بعد انطباقهما. فلا يكون أيضا المفروض، مادام في هذه الحالة، مباينا لـــ هـــ ب ز. فهو مادام متحركا حركة متشابهة حافظة لوضعه على ب جـــ إلى جهة جـــ، إنما هو مقاطع لـــ هـــ ب ز لا غير.

ولأن الحركة متشابهة ليست تبطئ كلما أزدادت والمسافة متناهية، وهي بعد ب عن جـــ، والوضع محفوظ، فسيصل المفروض المتحرك بحركته هذه إلى ح جـــ ط وينطبق عليه بلا تمييز بينهما. وإذا انطبق المفروض على ح جـــ ط، وهو مقاطع لـــ هـــ ب ز، فيكون إذن ح جـــ ط مقاطعا لـــ هـــ ب ز على نقطة تقاطع المفروض اياه.

وذلك ما أردناه.



BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE (1981) *La Métaphysique*. Paris, Trad. J. Vrin.

DJEBBAR, A. (1997) «La rédaction de l'*Istikmāl.* d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq, un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles». *Historia Mathematica, 24,* 185-192.

DJEBBAR, A. (2002) «L'épître d'al-Khayyām sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide». Revue *Farhang* (Téhéran), *14(39-40),* 79-136.

EUCLIDE (1990-2000) *Les Eléments*. Traduction et commentaires de B. Vitrac. Paris, P.U.F., 4 vols.

GUERGOUR, Y. (2006) *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 478/1085): Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*. Thèse de Doctorat, Université d'Annaba.

GUERGOUR, Y. (2005) «Le roi de Saragosse al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 1085) et le théorème de Pythagore: ses sources et ses prolongements». *Llull, 28,* 415-434.

HEATH, S.T.L. (1956) *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Cambridge, University Press, 1908. 2nd Ed. Cambridge, University Press, 1925. Reprint New York, Dover Publ.

HOGENDIJK, J.P. (2000) «Al-Nayrīzī's own proof of Euclid's parallel postulate». In: M. Folkerts (éd.) *Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften. Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70 Geburtstag.* Wiesbaden, Harrassowitz Verlag.

IBN AL-HAYTHAM (1985) *Fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fīl-uṣūl wa tafsīr ma^{c}ānīh* [Sur la résolution des doutes des *Eléments* d'Euclide et l'explication de ses notions]. Ms. Istambul, Bibliothèque de l'Université, n° 800, Fac-simile, F. Sezgin (éd.), Frankfurt.

IBN AL-HAYTHAM *Maqāla fī sharḥ muṣādarāt Uqlīdis* [Epître sur l'explication des prémisses d'Euclide], Ms. Istanbul, Feyzullah 1359/2.

JAOUICHE, K. (1986) *La théorie des parallèles en pays d'Islam*. Paris, Vrin.

JAOUICHE, K. (1988) *Naẓariyat al-mutawāziyāt fī l-handasa al-islāmiya*. Tunis, Bayt al-çikma.

AL-KHAYĀM (1961) *Risāla fī sharḥ mā ashkala min muṣādarāt kitāb Uqlīdis* [Epître sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide]. Ed. A. Sabra, Alexandrie.

AN-NAYRĪZĪ: *Shar Kitāb al-uṣūl li Uqlīdis* [Commentaire du Livre des *Eléments* d'Euclide], Ms. Leiden 399/1.

PAPPUS (1982) *Collection mathématique*. Trad. P. Ver Eecke. Paris, Blanchard, 2 vols.

PROCLUS (1948) *Les commentaires sur le premier Livre des Eléments d'Euclide*. Trad. P. Ver Eecke. Bruges, Desclée de Brouwer.

RASHED, R. & HOUZEL, C. (2005) «Thābit Ibn Qurra et la théorie des parallèles». *Arabic Sciences and Philosophy, 15,* 9-55.

AṬ-ṬŪSĪ N. *Taḥrīr Uqlīdis* [Rédaction <des *Eléments*> d'Euclide], Ms. Istanbul, Aya Sofya, Ahmet III 3452.