Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No. 1 (2001), pp. 13–25

COMPACIDAD RADIAL, SURCADA, HORIZONTAL Y MASIVA EN $\mathbb{R}^2$

JULIO ROBERTO RINCÓN (*)
NÉSTOR RAÚL PACHÓN (**)

Resumen. Lo que se pretende en este artículo es caracterizar de manera completa cuatro tipos de subconjuntos especiales de $\mathbb{R}^2$: los radialmente compactos, los surcadamente compactos, los horizontalmente compactos y los masivamente compactos. Con esto se consigue ampliar de manera sustancial el estudio iniciado por J. A. Ávila [1] quien propone hallar los subespacios compactos de $\mathbb{R}^2$, cuando se le dota de topologías diferentes de la usual.

Palabras clave: Topología radial, topología de las bolas surcadas, topología de los segmentos y las rectas horizontales, topología *mas*.

1. Introducción

Uno de los principales y útiles conceptos de la topología es el concepto de Compacidad. Su comprensión es importante para abordar temas de interés en diversas ramas de la Matemática.

Un ejercicio que nos permite madurar y asimilar este concepto es analizar la compacidad de los diferentes subespacios de un espacio. Este problema no es abordado comúnmente en los textos de Topología, y en muy raras ocasiones se caracterizan los subconjuntos compactos, como sucede, por ejemplo, en los

(*) Julio Roberto Rincón. Estudiante del programa de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. e-mail: j_rinc_c@yahoo.com

(**) Néstor Raúl Pachón. Profesor de la Universidad Nacional de Colombia y de la Escuela Colombiana de Ingeniería. e-mail: nrpachon@hotmail.com.

espacios métricos, los espacios discretos, los espacios "groseros" y los espacios de complementarios finitos.

Tratando de "remediar" esa falencia, J. A. Ávila [1] propone algunas topologías sobre $\mathbb{R}^2$, más o menos conocidas, logrando interesantes caracterizaciones de los subespacios compactos correspondientes.

Nuestro trabajo está motivado por ese buen artículo, ya que si bien se trataron allí topologías importantes, también es cierto que se dejaron de lado otras que se pueden considerar como clásicas, como lo son la topología radial, la topología de las "bolas surcadas", la topología de Zariski, y la topología "mas" (las definiciones de las tres primeras aparecen en [7] , *pgs* $29, 36, 90$, y la de la cuarta en [6] , *pg*.733).

En este artículo nos concentraremos en la topología radial, en la topología de las bolas surcadas, en la topología *mas*, y en una topología que se introdujo en [2] con el propósito de demostrar que la intersección de topologías F-T_1 (definidas por N. R. Pachón [3]) no necesariamente es de ese tipo.

Por $\mathcal{U}$ vamos a simbolizar a la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y cuando se hable, por ejemplo, de la adherencia usual de un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ se entenderá que nos estamos refiriendo al conjunto $adh_{\mathcal{U}}(\mathrm{A})$.

De la misma manera, si hablamos de una bola abierta usual en $\mathbb{R}^2$ estamos refiriéndonos a un conjunto de la forma $\mathrm{B}_r(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r\right\}$, para algún $x \in \mathbb{R}^2$ y algún real positivo r , donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

2. Compacidad radial en $\mathbb{R}^2$

Vamos a comenzar esta sección con la definición de una topología para el plano, que según Velleman [6] es una topología adecuada para estudiar la continuidad y las derivadas direccionales de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, en direcciones diferentes a las de los ejes coordenados. Al parecer con esta topología se logra generalizar en cierto modo el trabajo desarrollado por Velleman, sobre el que haremos un pequeño comentario en la sección 5.

Topología radial para $\mathbb{R}^2$.

Sea $\Re$ la topología para $\mathbb{R}^2$ descrita de la siguiente manera:
Si $x \in \mathbb{R}^2$, un subconjunto V de $\mathbb{R}^2$, que contenga a x, es una vecindad de x si para toda recta R del plano que contenga a x, $\mathrm{V} \cap \mathrm{R}$ contiene un segmento abierto que contiene a x. Dicho de otro modo, un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que contenga a x, es una vecindad de x si V contiene un segmento abierto que contenga a x, en cada dirección.

Es claro que la topología usual, $\mathcal{U}$, de $\mathbb{R}^2$ está contenida en $\Re$. Un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es abierto radial pero no abierto usual se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. *Sean, r un real positivo, (a,b) un elemento de $\mathbb{R}^2$, (c,d) un elemento de $B_r(a,b)\setminus\{(a,b)\}$, y $s=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.*
Ahora sea $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=s\right\}$. Entonces el conjunto $U=(B_r(a,b)\setminus\ V)\cup\{(a,b)\}$ está en $\Re$ pero no en $\mathcal{U}$.

Ahora, si L es una recta del plano, la restricción de $\Re$ a L es la restricción de la topología usual $\mathcal{U}$ a L, y si $\mathcal{C}$ es una circunferencia del plano, la restricción de $\Re$ a $\mathcal{C}$ es la topología discreta, luego la topología radial se "discretiza" sobre todo subconjunto de una circunferencia. En efecto:

i) Sea V un elemento de $\Re_L$. Existe $U\in\Re$ con $V=U\cap L$. Supongamos que $z\in U\cap L$. Como U es abierto radial existe un segmento abierto I_L tal que $z\in I_L\subseteq U\cap L=V$. Por lo tanto V es abierto en el espacio $(L,\mathcal{U}_L)$.
Por otra parte, como $\mathcal{U}\subseteq\Re$ entonces $\mathcal{U}_L\subseteq\Re_L$.

ii) Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro (a,b) y radio r, es decir,

$$\mathcal{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right\}.$$

Supongamos que $(c,d)\in\mathcal{C}$. El conjunto $U=(\mathrm{B}_r(c,d)\setminus\mathcal{C}\ )\cup\{(c,d)\}$ es abierto radial y $U\cap\mathcal{C}=\{(c,d)\}$.

En conclusión, todo punto de $\mathcal{C}$ es abierto en el espacio $(\mathcal{C}\ ,\ \Re_{\mathcal{C}})$.

Definición 2.1. *Diremos que un subconjunto K de $\mathbb{R}^2$ es* ***radialmente compacto*** *si K es compacto en el espacio $\left(\mathbb{R}^2\ ,\ \Re\right)$.*

Es claro que un subconjunto radialmente compacto de $\mathbb{R}^2$ es compacto usual, y que un subconjunto cerrado usual de un subconjunto radialmente compacto de $\mathbb{R}^2$ es radialmente compacto.

En el siguiente ejemplo mostramos conjuntos compactos usuales que no son radialmente compactos.

Ejemplo 2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia en el plano. Ya que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^2\ ,\mathcal{U})$ entonces $\mathcal{C}$ es compacto usual.*

Como se anotó antes, la restricción de la topología $\Re$ al conjunto $\mathcal{C}$ es la topología discreta. En consecuencia, $\mathcal{C}$ no puede ser radialmente compacto, como tampoco lo es ninguno de sus subconjuntos infinitos.

Uno de nuestros propósitos es caracterizar los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que son radialmente compactos, para lo que nos será útil el siguiente resultado.

Lema 2.1. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en el espacio $(\mathbb{R}^2\ ,\ \mathcal{U})$ y sea x el límite de esta sucesión. Si $K=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ y K es radialmente* *compacto, entonces K está contenido en la unión de un número finito de rectas del plano.*

Demostración. (Por contradicción.) Supongamos que no existe un conjunto finito de rectas del plano en cuya unión esté contenido K. El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ debe ser infinito, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todos $i, j \in \mathbb{N}$, con $i \neq j$, $x_i \neq x_j$, y que para todo $i \in \mathbb{N}$, $x_i \neq x$. Sea R_n la recta que pasa por x y x_n. Es claro que $\{\mathrm{R}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito. Consideremos la relación de equivalencia $\trianglelefteq$ en $\mathbb{N}$ dada por: $n \trianglelefteq m \Leftrightarrow \mathrm{R}_n = \mathrm{R}_m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos a definir un número natural m_n, como sigue: En primer lugar definimos $m_1 = 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, y supongamos que para todo $j < k$ tenemos definido un natural m_j. Definimos

$$m_k = \min \{l \in \mathbb{N} : l \ntrianglelefteq m_j, \text{ para cada } j \text{ con } 1 \leq j < k\}$$

Es claro que si $i, j \in \mathbb{N}$ e $i < j$ entonces $m_i < m_j$. En consecuencia $\{x_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y cada una de las rectas del conjunto $\{\mathrm{R}_n : n \in \mathbb{N}\}$ contiene exáctamente un punto de esta subsucesión, al que vamos a denotar por z_n. Sea

$$\mathrm{V}_x = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Veamos que V_x es un elemento de $\Re$.

i) V_x es una vecindad de x. En efecto: como $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x \in \mathrm{V}_x$. Si R es una recta del plano tal que $x \in \mathrm{R}$ y $\mathrm{R} \notin \{\mathrm{R}_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\mathrm{R} \cap \mathrm{B}_1(x)$ es un segmento abierto que contiene a x, y está contenido en V_x. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_n \cap \mathrm{B}_{\|x-z_n\|}(x) \subseteq \mathrm{V}_x$.

ii) V_x es una vecindad de cada uno de sus puntos distintos de x. En efecto: $\mathrm{V}_x \setminus \{x\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\})$ es un elemento de $\mathcal{U}$, y por lo tanto de $\Re$.

Ahora, el conjunto $\{\mathrm{V}_x\} \cup \left\{\mathbb{R}^2 \setminus adh_{\mathcal{U}} \mathrm{B}_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un cubrimiento de K por elementos de $\Re$, que no posee un subcubrimiento finito. Esto contradice la hipótesis de que K es radialmente compacto. □

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que resultan ser radialmente compactos quedan determinados en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Tenemos que K es radialmente compacto si, y sólo si, K es compacto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ y K está contenido en la unión de un número finito de rectas.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que K es radialmente compacto. Resta ver que K está contenido en la unión de un número finito de rectas, lo cual se demostrará por contradicción. Supongamos que K no está contenido en ninguna unión finita de rectas. K debe ser infinito. Sean $x_1, x_2 \in K$, distintos. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Supongamos que tenemos elementos distintos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ en K. Si $i, j \in \{1, ..., n-1\}$ e $i \neq j$, denotamos por $\mathrm{R}_{\{i,j\}}$ a la recta que pasa por x_i y x_j. Podemos escoger un punto x_n en K que no pertenezca a ninguna de las rectas $\mathrm{R}_{\{i,j\}}$, donde $i, j \in \{1, ..., n-1\}$ e $i \neq j$. El conjunto $\mathrm{L} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ es infinito y está contenido en K. La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, en el espacio $\left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U}\right)$, a un punto $x \in K$. Esta subsucesión no puede estar contenida en una unión finita de rectas (por la forma como se construyeron los elementos de L), luego su clausura usual[1], $\{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, tampoco puede estarlo. Por el lema 2.1, $\{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ no puede ser radialmente compacto, lo que resulta absurdo ya que este conjunto es cerrado en $\left(\mathbb{R}^2 , \Re\right)$, por ser cerrado en $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U})$, y $\{x_{m_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq K$.

($\Leftarrow$) Supongamos que K es compacto en $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U})$ y K está contenido en la reunión de un número finito de rectas. Sean R_1,R_2,...,R_n rectas del plano tales que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{R}_i$. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de K por elementos de $\Re$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$ arbitrario pero fijo. Para cada $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{R}_i$ es una unión de segmentos abiertos, con lo que $\mathrm{A} \cap \mathrm{R}_i$ es un subconjunto abierto de R_i, dotado de la topología usual de subespacio, $\mathcal{U}_{\mathrm{R}_i}$. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{S} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{R}_i : \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}$ es un cubrimiento de $K \cap \mathrm{R}_i$ por elementos de $\mathcal{U}_{\mathrm{R}_i}$. Como $K \cap \mathrm{R}_i$ es un cerrado en $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U})$ y $K \cap \mathrm{R}_i \subseteq K$, entonces $K \cap \mathrm{R}_i$ es compacto en $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito $\left\{ \mathrm{A}_{i_1} \cap \mathrm{R}_i , ..., \mathrm{A}_{i_{k_i}} \cap \mathrm{R}_i \right\}$. El conjunto $\mathcal{F}_i = \left\{\mathrm{A}_{i_1}, ..., \mathrm{A}_{i_{k_i}}\right\}$ es un cubrimiento finito de $K \cap \mathrm{R}_i$, por lo que el conjunto $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ es un cubrimiento finito de $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (K \cap \mathrm{R}_i)$. En conclusión, K resulta radialmente compacto. □

[1]Es decir, la clausura de la subsucesión en el espacio $\left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{U}\right)$.

3. Compacidad surcada en $\mathbb{R}^2$

La presente sección está dedicada a la caracterización de los conjuntos surcadamente compactos del plano, que terminarán siendo los conjuntos compactos usuales de $\mathbb{R}^2$ que tienen intersección finita con toda recta del plano.

Empezamos definiendo la topología que será objeto de nuestro estudio inmediato.

Topología de las bolas surcadas para $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathcal{D}$ la topología para $\mathbb{R}^2$ descrita de la siguiente manera: Si $x \in \mathbb{R}^2$ entonces un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es una vecindad de x si $x \in \mathrm{U}$ y existen, una familia finita de rectas del plano, $\{\mathrm{R}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$, que contienen a x, y un real positivo ε tales que $\left[\mathrm{B}_\varepsilon(x) \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{R}_i\right] \cup \{x\} \subseteq \mathrm{U}$.

Es claro que la topología usual $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ está contenida en $\mathcal{D}$, ya que, para todos $x \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}_\epsilon(x) = \left(\mathrm{B}_\varepsilon(x) \setminus \bigcup\limits_{i\in\emptyset} \mathrm{R}_i\right) \cup \{x\}$.

Ahora, veamos que la restricción de la topología $\mathcal{D}$ a cualquier recta R del plano es la topología discreta, con lo cual la restricción de $\mathcal{D}$ a cualquier subconjunto de una recta es la topología discreta.

En efecto: sea $z \in R$. Como $(\mathrm{B}_1(z) \setminus R) \cup \{z\}$, que es un elemento de $\mathcal{D}$, y R sólo tienen en común a z, entonces $\{z\} \in \mathcal{D}_R$.

Definición 3.1. *Diremos que un subconjunto K de $\mathbb{R}^2$ es **surcadamente compacto** si K es compacto en el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D})$.*

Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ entonces todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ surcadamente compacto es compacto usual.

En el próximo ejemplo se exhibe un conjunto compacto usual que no es surcadamente compacto.

Ejemplo 3.1. *Sea $W = [0,1] \times \{0\}$. W es compacto usual, por ser cerrado y acotado en el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$. Como W es un subconjunto de una recta del plano, la restricción de $\mathcal{D}$ a W es la topología discreta, como lo anotamos antes. Luego W no es surcadamente compacto.*

En el teorema siguiente se encuentran todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que son surcadamente compactos.

Teorema 3.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Se tiene que K es surcadamente compacto si, y sólo si, K es compacto en el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ y para toda recta R del plano, $K \cap R$ es un conjunto finito.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que K es surcadamente compacto. Lo que hace falta es ver que si R es una recta del plano entonces $K \cap \mathrm{R}$ es finito. Sea R una recta arbitraria del plano. El conjunto

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{R}^c\} \cup \{\mathrm{D}_x : x \in K \cap \mathrm{R}\},$$

donde $\mathrm{R}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R}$, y $\mathrm{D}_x = (\mathrm{B}_1(x) \setminus \mathrm{R}) \cup \{x\}$, es un cubrimiento de K por elementos de $\mathcal{D}$. Este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito y en consecuencia $K \cap \mathrm{R}$ es finito.

($\Leftarrow$) Supongamos que K es compacto usual y que para toda recta R del plano, $K \cap \mathrm{R}$ es finito. Una sub-base para $\mathcal{D}$ es el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{(\mathrm{B}_\varepsilon(x) \setminus \mathrm{R}) \cup \{x\} : x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0, \text{ R es una recta del plano}\right\}.$$

Veamos que todo cubrimiento de K por elementos de $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito, con lo cual, según el lema de Alexander[2], podremos concluir que K es surcadamente compacto. Sea $\mathcal{A}$ uno de tales cubrimientos. Si V_x es un elemento de $\mathcal{A}$ y $\mathrm{V}_x = (\mathrm{B}_\varepsilon(x) \setminus \mathrm{R}) \cup \{x\}$ entonces $\mathrm{V}_x \cap K$ es un abierto del espacio $(K, \mathcal{U}_K)$, puesto que

$$\mathrm{V}_x \cap K = [(\mathrm{B}_\varepsilon(x) \setminus \mathrm{R}) \cup \{x\}] \cap K = [\mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap ((\mathrm{R} \setminus \{x\}) \cap K)^c] \cap K,$$

y $\mathrm{B}_\varepsilon(x) \cap ((\mathrm{R} \setminus \{x\}) \cap K)^c$ es un elemento de $\mathcal{U}$. Ahora bien, como el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathrm{W}_\mathrm{V} = \mathrm{V} \cap K : \mathrm{V} \in \mathcal{A}\}$ es un cubrimiento abierto de K por elementos de $\mathcal{U}_K$, entonces existe un subcubrimiento finito $\{\mathrm{W}_{\mathrm{V}_1}, ..., \mathrm{W}_{\mathrm{V}_n}\}$. Como $K = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{W}_{\mathrm{V}_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_i$ entonces $\{\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n\}$ es un subcubrimiento finito de K, y K resulta surcadamente compacto. □

4. Compacidad horizontal en $\mathbb{R}^2$

Nos disponemos ahora a describir los conjuntos horizontalmente compactos del plano, por lo que definimos inicialmente una topología sobre $\mathbb{R}^2$ con la que empezamos a desarrollar este trabajo. En realidad, aprovechamos la coincidencia entre la aparición del artículo de J. A. Ávila y la casi simultánea obtención de un cierto ejemplo, buscado de tiempo atrás por parte de N. R. Pachón,

[2] El lema de Alexander afirma que un espacio topológico (X , Ω) es compacto si, y sólo si, existe una sub-base $\Im$ de Ω tal que todo cubrimiento de X por elementos de $\Im$ tiene un subcubrimiento finito. Para una demostración de ese resultado se puede consultar, por ejemplo, la referencia [4] , pg. 112, o la referencia [5], pg. 62.

que involucraba dos topologías para el plano, y pensamos en complementar dicho artículo, analizando una de ellas. Como las cosas marcharon bien con esa topología nos dimos a la tarea de seguir ampliando el estudio con las otras topologías que estamos presentando en este trabajo.

Topología de los segmentos y las rectas horizontales para $\mathbb{R}^2$.

Consideremos la topología Ψ [3] para $\mathbb{R}^2$ descrita de la siguiente forma:
Un subconjunto V de $\mathbb{R}^2$ es una vecindad de un punto $(a,b) \neq (0,0)$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left\{(x,b) \in \mathbb{R}^2 : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\right\} \subseteq \mathrm{V}$.

Un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es una vecindad de $(0,0)$ si $(0,0) \in \mathrm{W}$ y existe un subconjunto finito $\mathrm{J_W}$ de $\mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}\setminus \mathrm{J_W}$, $\mathbb{R}\times \{y\} \subseteq \mathrm{W}$.

Una vecindad de un punto $(a,b) \neq (0,0)$ la podemos imaginar como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contiene un "segmento abierto horizontal" centrado en (a,b), y una vecindad de $(0,0)$ la podemos visualizar como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $(0,0)$ y a "casi todas" las rectas horizontales del plano.

Por supuesto que todo elemento de $\mathcal{U}$ que no contenga a $(0,0)$ es un elemento de Ψ. Sin embargo, existen elementos de Ψ que contienen a $(0,0)$ y que no son abierto usuales, como se evidencia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.

1) *Toda recta horizontal del plano, que no contenga a* $(0,0)$*, está en* Ψ *pero no en* $\mathcal{U}$.

2) *El conjunto* $U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\setminus \{0\}\}$ *es un elemento de* Ψ *que no está en* $\mathcal{U}$.

3) *El conjunto* $V = \mathbb{R}^2 \setminus U$ *es un elemento de* Ψ *pero no de* $\mathcal{U}$*, pues* V *no es una vecindad de* $(0,0)$ *en* $\left(\mathbb{R}^2\ ,\ \mathcal{U}\right)$.

V es el plano completo quitándole los puntos del "eje x" distintos del origen.

Definición 4.1. *Diremos que un subconjunto* K *de* $\mathbb{R}^2$ *es* ***horizontalmente compacto*** *si* K *es compacto en el espacio* $\left(\mathbb{R}^2\ ,\ \Psi\right)$.

En parte esta definición está motivada por la forma de los elementos de Ψ, pero también lo está por los resultados de los teoremas 4.1 y 4.2 siguientes, en los que se determinan todos los subconjuntos compactos de $\left(\mathbb{R}^2\ ,\ \Psi\right)$.

Antes de enunciar estos teoremas vamos a mostrar un conjunto que es compacto usual y que no es horizontalmente compacto, y un conjunto horizontalmente compacto que no es compacto usual.

[3] Esta topología fue introducida por N. R. Pachón R. en [2], como parte de un ejemplo en el que se quería comprobar que la intersección de topologías F-T_1 no siempre es de ese tipo.

Ejemplo 4.2.
1) *Sea a un real, y sea* $H = \left\{(a, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant y \leqslant 2\right\} = \{a\} \times [1, 2]$. *$H$ es compacto usual. El conjunto* $\{\mathbb{R}\times \{y\} : y \in [1, 2]\}$ *es un cubrimiento de H por elementos de Ψ del que no podemos extraer un subcubrimiento finito, pues cada elemento de este cubrimiento contiene un solo elemento de H.*
2) *El conjunto $\{0\} \times \mathbb{R}$ no es compacto usual, por no ser acotado, pero sí es horizontalmente compacto ya que si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de $\{0\} \times \mathbb{R}$ por elementos de Ψ, entonces $(0, 0) \in U_\theta$, para algún $\theta \in I$, con lo que U_θ contiene casi todas las rectas horizontales, es decir todas salvo un número finito, y en consecuencia contiene a todos los elementos de $\{0\}\times\mathbb{R}$, salvo un número finito. Esto implica inmediatamente que $\{0\} \times \mathbb{R}$ es horizontalmente compacto.*

Notación.

1. Por $\mathbb{R}_0$ vamos a denotar al conjunto $\left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$, y si y es un real no cero, por $\mathbb{R}_y$ denotaremos al conjunto $\mathbb{R}\times \{y\}$.
2. Si $\mathrm{H} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $y \in \mathbb{R}$, al conjunto $\mathrm{H} \cap \mathbb{R}_y$ lo denotaremos por H_y.

De la definición de Ψ se sigue que los conjuntos $\mathbb{R}_y$ son a la vez abiertos y cerrados en el espacio $\left(\mathbb{R}^2 , \Psi\right)$.

En la caracterización de los subconjuntos horizontalmente compactos de $\mathbb{R}^2$ necesitaremos del siguiente resultado.

Lema 4.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Si K es horizontalmente compacto entonces, para todo $y \in \mathbb{R}$, el conjunto K_y es compacto usual.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$, arbitrario. Si K_y es vacío, no hay nada que probar. Supongamos que K_y no es vacío. Sea $\mathcal{B}$ un cubrimiento de K_y por elementos de $\mathcal{U}$. El conjunto $\mathcal{S} = \{(\mathbb{R}_y)^c\} \cup \{\mathrm{B} \setminus \{(0, 0)\} : \mathrm{B} \in \mathcal{B}\}$ es un cubrimiento de K por elementos de Ψ. Este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito $\{(\mathbb{R}_y)^c\} \cup \{\mathrm{B}_1 \setminus \{(0, 0)\}, ..., \mathrm{B}_k \setminus \{(0, 0)\}\}$. Ya que $K \subseteq (\mathbb{R}_y)^c \cup \bigcup_{i=1}^{k} (\mathrm{B}_i \setminus \{(0, 0)\})$ entonces $K_y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (\mathrm{B}_i \setminus \{(0, 0)\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{B}_i$, con lo que K_y es compacto usual. $\square$

En los dos siguientes teoremas quedan en evidencia los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que resultan ser horizontalmente compactos.

Es oportuno señalar aquí que si (X , Ω) es un espacio topológico y $K \subseteq \mathrm{X}$, K es compacto en (X , Ω) si, y sólo si, el espacio (K, Ω_K) es compacto.

Teorema 4.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$, con $(0,0) \in K$. Entonces, K es horizontalmente compacto si, y sólo si, para todo $y \in \mathbb{R}$, K_y es compacto usual.*

Demostración. Una de las implicaciones está probada en el lema 4.1.
Supongamos que, para todo $y \in \mathbb{R}$, K_y es compacto usual. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de K por elementos de Ψ. Existen $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ y $\mathrm{F} \subseteq \mathbb{R}$, F finito, tales que $\bigcup\limits_{y \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{F}} \mathbb{R} \times \{y\} \subseteq \mathrm{B}$ y $(0,0) \in \mathrm{B}$. Como, para todos $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ y $y \in \mathrm{F}$, $(0,0) \notin \mathrm{A}_y$ entonces A_y es una unión de segmentos abiertos. Además, para todo $y \in \mathrm{F}$, $K_y \subseteq \bigcup\limits_{\mathrm{A} \in \mathcal{A}} \mathrm{A}_y$; en consecuencia, si $y \in \mathrm{F}$, el conjunto $\mathcal{S}_y = \{\mathrm{A}_y : \ \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}$ resulta ser un cubrimiento de K_y por elementos de $\mathcal{U}_{\mathbb{R}_y}$. Como K_y es un compacto usual existen $\mathrm{A}_{(1,y)}, ..., \mathrm{A}_{(n_y,y)} \in \mathcal{A}$ tales que $K_y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} \left(\mathrm{A}_{(i,y)}\right)_y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} \mathrm{A}_{(i,y)}$.
Luego $K \subseteq \mathrm{B} \cup \left(\bigcup\limits_{y \in \mathrm{F}} \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} A_{(i,y)} \right)$, con lo que K es horizontalmente compacto. □

Teorema 4.2. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$, con $(0,0) \notin K$. Entonces, K es horizontalmente compacto si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:*

i) Para todo $y \in \mathbb{R}$, K_y es compacto usual.

ii) El conjunto $F = \{y \in \mathbb{R} : K_y \neq \emptyset\}$ es finito.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si K es horizontalmente compacto. Nos resta probar que se cumple la condición (ii), según el lema 4.1.
Si $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}_y : (x,y) \in K$, para algún $x \in \mathbb{R}\}$ entonces $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de K por elementos de Ψ. Este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito $\{\mathbb{R}_{y_1}, ..., \mathbb{R}_{y_n}\}$. Como $\mathrm{F} = \{y_1, ..., y_n\}$ entonces F es finito.
$(\Leftarrow)$ Si se cumplen las condiciones (i) y (ii). Como $(0,0) \notin K$ entonces $K = \bigcup\limits_{y \in \mathrm{F}} K_y$. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de K por elementos de Ψ. Para cada $y \in \mathrm{F}$, sea $\mathcal{S}_y = \{\mathrm{A}_y : \ \mathrm{A} \ \in \mathcal{A}\}$.

Como, para todos $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ y $y \in \mathrm{F}$, $(0,0) \notin \mathrm{A}_y$, entonces A_y es una unión de segmentos abiertos. Además, para todo $y \in \mathrm{F}$, $K_y \subseteq \bigcup\limits_{\mathrm{A} \in \mathcal{A}} \mathrm{A}_y$; en consecuencia, para todo $y \in \mathrm{F}$, $\mathcal{S}_y$ resulta ser un cubrimiento de K_y por elementos de $\mathcal{U}_{\mathbb{R}_y}$. Como K_y es un compacto usual existen $\mathrm{A}_{(1,y)}, ..., \mathrm{A}_{(n_y,y)} \in \mathcal{A}$ tales que $K_y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} \left(\mathrm{A}_{(i,y)}\right)_y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} \mathrm{A}_{(i,y)}$. Entonces $K \subseteq \bigcup\limits_{y \in \mathrm{F}} \bigcup\limits_{i=1}^{n_y} \mathrm{A}_{(i,y)}$, y podemos asegurar que K es horizontalmente compacto. □

5. Compacidad masiva en $\mathbb{R}^2$

Nuestro propósito presente es considerar la topología *mas*, que por muchas razones es considerada la mas adecuada sobre $\mathbb{R}^2$ para estudiar conceptos relacionados con límites con respecto a las variables independientes separadamente. Esta topología, que es un tipo especial de producto que ocasionalmente aparece en la literatura, es de utilidad en Cálculo en varias variables, como se puede evidenciar en el trabajo de Velleman [6].

Dado que las derivadas parciales de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se definen en términos de límites con respecto a las variables independientes de manera separada, estas no pueden darnos información acerca del comportamiento local de la función en cercanías de un punto, por lo menos si "local" se define con respecto a la topología usual. ¿Y si se considera otra topología?

Pues la topología *mas* es apropiada para estudiar las derivadas parciales, en la misma forma en que la topología usual es apropiada para estudiar la continuidad y la diferenciabilidad.

En parte, la importancia de la topología *mas* la podemos sustentar con el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [6] :

"Para todo espacio topológico $(Y\ ,\ \beta)$ y toda función f de $\left(\mathbb{R}^2\ ,\ \mathcal{U}\right)$ en $(Y\ ,\ \beta)$*, f es* **separadamente continua**[4] *si, y sólo si, f es continua con respecto a la topología mas para $\mathbb{R}^2$. Además esa es la única topología para $\mathbb{R}^2$ con esta propiedad."*

Correspondiente al hecho de que todas las funciones diferenciables son continuas, tenemos el siguiente corolario del resultado anterior.

"Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función, y si las derivadas parciales f_x y f_y están definidas en todo punto de $\mathbb{R}^2$, entonces f es continua con respecto a la topología mas *en $\mathbb{R}^2$ ".*

Otras propiedades de importancia de la topología que estamos por definir pueden apreciarse en el artículo de Velleman [6].

La Topología *mas* para $\mathbb{R}^2$.

Sea ✠ la topología para $\mathbb{R}^2$ que tiene como abiertos a aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que tienen un "mas" centrado en cada uno de sus elementos.

Más precisamante, $\mathrm{U} \in$ ✠ si, y sólo si, para cada $(x, y) \in \mathrm{U}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\left\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \varepsilon < u < x + \varepsilon\right\} \cup \left\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : y - \varepsilon < v < y + \varepsilon\right\},$$

al que denotaremos por $\mathrm{B}^+_\varepsilon(x, y)$, está contenido en U.

[4] Una función $f : \left(\mathbb{R}^2\ ,\ \mathcal{U}\right) \to (Y\ ,\ \beta)$ es *separadamente continua* si para todos $a, b \in \mathbb{R}$, las funciones $f(x, b)$ y $f(a, y)$ son continuas.

Resulta evidente que $\maltese$ contiene tanto a la topología radial como a la topología usual para $\mathbb{R}^2$. Un abierto en este espacio, que no es un abierto radial es el conjunto U_k descrito enseguida:
Sea k un número real con $0 < k < 1$. El conjunto

$$\mathrm{U}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k\,|y| > |x|\,,\ \text{o},\ k\,|x| > |y|\right\} \cup \{(0,0)\}$$

está en $\maltese$ pero no en $\Re$.

La topología $\maltese$ se "discretiza" sobre toda recta oblicua del plano, pues si R es una de tales rectas y $(a, b) \in R$ entonces $\left(\mathbb{R}^2 \setminus R\right) \cup \{(a, b)\} \in \maltese$ y $\left[\left(\mathbb{R}^2 \setminus R\right) \cup \{(a, b)\}\right] \cap R = \{(a, b)\}$.

Definición 5.1. *Diremos que un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es* ***masivamente compacto*** *si es compacto en el espacio $\left(\mathbb{R}^2, \maltese\right)$.*

Como $\Re \subseteq \maltese$, todo conjunto masivamente compacto es compacto usual y está contenido en un número finito de rectas del plano. Mostraremos ahora que existen conjuntos radialmente compactos que no son masivamente compactos.

Ejemplo 5.1. *Si R es cualquier recta oblicua del plano y K es un subconjunto infinito y compacto usual de $\mathbb{R}^2$, contenido en R, entonces sabemos que K es radialmente compacto. Sin embargo, el hecho de que la topología inducida en R por $\maltese$ sea la topología discreta impide que K sea masivamente compacto.*

Los subconjuntos masivamente compactos de $\mathbb{R}^2$ quedan determinados en el teorema 5.1, cuya demostración estará basada en el siguiente resultado.

Lema 5.1. *Si R es una recta oblicua del plano entonces, para todo $z \in R$, $\left(\mathbb{R}^2 \setminus\ R\right) \cup \{z\} \in \maltese$. Además, si K es masivamente compacto entonces $K \cap R$ es finito.*

Demostración. Es claro que, para cada $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}_\varepsilon^+(z) \subseteq \left(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R}\right) \cup \{z\}$. Además, $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R} \in \maltese$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R} \subseteq \left(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R}\right) \cup \{z\}$.

Por otra parte, el conjunto $\left\{\left(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{R}\right) \cup \{z\} : z \in K \cap\ \mathrm{R}\right\}$ es un cubrimiento de $K \cap \mathrm{R}$ por elementos de $\maltese$. Como este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito, $K \cap \mathrm{R}$ debe ser finito. □

Teorema 5.1. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es masivamente compacto si, y sólo si, es compacto usual y está contenido en la unión de un número finito de rectas no oblicuas del plano.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que K es un subconjunto masivamente compacto de $\mathbb{R}^2$. Como K es radialmente compacto, existe un número finito de rectas oblicuas, $\mathrm{S}_1, ...\mathrm{S}_m$, y un número finito de rectas no oblicuas $\mathrm{R}_1, ...,\mathrm{R}_p$ tales que $K \subseteq \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathrm{S}_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{p} \mathrm{R}_j\right)$. Luego $K = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} K \cap \mathrm{S}_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{p} K \cap \mathrm{R}_j\right)$. Por el lema anterior $\bigcup\limits_{i=1}^{m} K \cap \mathrm{S}_i$ es un conjunto finito, digamos $\bigcup\limits_{i=1}^{m} K \cap \mathrm{S}_i = \{z_1, ..., z_q\}$. Si denotamos por R_{p+i} a la recta horizontal que pasa por z_i, para cada $1 \leqslant i \leqslant q$, entonces $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p+q} \mathrm{R}_j$.

($\Leftarrow$) Esta implicación tiene una demostración que es esencialmente la misma que se hizo para demostrar la implicacion ($\Leftarrow$) en el teorema 2.1, y por esa razón la vamos a omitir. $\square$

Es evidente que una forma equivalente de enunciar el teorema anterior es la siguiente:

Teorema 5.2. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es masivamente compacto si, y sólo si, es compacto usual, está contenido en la unión de un número finito de rectas del plano, y su intersección con toda recta oblicua es un conjunto finito.*

Bibliografía

[1] J. A. Ávila, *Caracterización de los subespacios compactos de $\mathbb{R}^2$ con algunas topologías distintas de la usual*, Boletín de Matemáticas **VII** no. 1 (2000), 29–38.

[2] N. R. Pachón, *Espacios Fuertemente T_1*, Revista Integración (UIS) **16** no. 2 (2001).

[3] N. R. Pachón, *Un mecanismo de adjunción para comparar topologías*, Tesis de Doctorado en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[4] G. F. Simmons, *Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1963.

[5] B. Sims, *Fundamentals of Topology*, MacMillan Publishing Co., 1976.

[6] D. J. Velleman D. J, *Multivariable Calculus and the Plus Topology*, The American Mathematical Monthly **106** no. 8 (1999).

[7] S. Willard S *General Topology*, Addison Wesley Publishing Co., 1970.