Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No. 1 (2001), pp. 8–12

ESTRUCTURA ORDENADA DE LA COLECCIÓN DE TOPOLOGÍAS FILTROSAS COMPACTAS

LORENZO ACOSTA (*)
PEDRO GAONA

Abstract. For a set X with two or more elements, we show that the set of filtrose compact topologies on X is isomorphic to the complete boolean algebra of the subsets of X.

Resumen. Dado un conjunto X con al menos dos elementos, se muestra que el conjunto de topologías filtrosas compactas sobre X es isomorfo al álgebra de Boole completa de las partes de X. El instrumento utilizado es el operador que a cada topología τ sobre X le asocia el conjunto de puntos cerrados del espacio (X, τ).

Palabras clave: Topologías filtrosas compactas, álgebra de Boole completa.

1. Introducción

En [1] se muestra un criterio de compacidad para espacios topológicos que, en el caso de los espacios T_0, es una caracterización. Este criterio está basado en dos sub-espacios asociados a todo espacio topológico X :

$$\begin{aligned}\gamma(X) &= \{x \in X \mid \overline{\{x\}} = \{x\}\} \\ \varepsilon(X) &= \{x \in X \mid \overline{\{x\}} \cap \gamma(X) = \phi\}.\end{aligned}$$

El criterio es el siguiente:

(*) Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
e-mail: lacosta@matematicas.unal.edu.co.

Teorema 1. *Sea X un espacio topológico.*

a) Si $\gamma(X)$ es compacto y $\varepsilon(X) = \phi$ entonces X es compacto.

b) Si X es un espacio T_0 se tiene la recíproca de a).

El objetivo de este artículo es realizar un estudio de las propiedades del primer operador visto como función del conjunto $Top(X)$ de topologías sobre un conjunto X al conjunto $\mathfrak{P}(X)$ de los subconjuntos de X. Mostramos en particular que esta función es un morfismo de conjuntos ordenados y que admite adjunta a izquierda. Al estudiar el isomorfismo de adjunción correspondiente, se llega a que el conjunto de topologías filtrosas compactas sobre X, ordenado por contenencia, es isomorfo al álgebra de Boole completa $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$.
Para comenzar recordemos algunas notaciones y hechos conocidos que utilizaremos más adelante.
Sean $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ y $g : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Decimos que f es adjunta a izquierda de g si y solamente si para todo x de X y todo y de Y

$$f(x) \leq y \Longleftrightarrow x \leq g(y).$$

En este caso también se dice que (f, g) es un par adjunto.

Nota 1. *Las funciones adjuntas también reciben el nombre de "residuated mappings" (ver* [2]*) y "conexiones de Galois" aunque este término se utiliza generalmente para el caso contravariante.*

A continuación presentamos algunas propiedades de la adjunción (el lector interesado puede consultar [2], [3], [4] y [5] para las demostraciones):
1. f es adjunta a izquierda de g si y solamente si f y g son morfismos de conjuntos ordenados y para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} i)\ g(f(x)) &\geq x \\ ii)\ f(g(y)) &\leq y. \end{aligned}$$

2. El adjunto, si existe, es único: si (f, g) y (f, h) son pares adjuntos entonces $g = h$ y si (g, f) y (h, f) son pares adjuntos entonces $g = h$.
3. Si (f, g) es un par adjunto entonces f respeta extremos superiores y g respeta extremos inferiores.
4. Si (f, g) es un par adjunto y si F y G son las imágenes de f y g respectivamente entonces f restringida a G es un isomorfismo de conjuntos ordenados entre G y F.
5. La imagen de g es el conjunto de puntos fijos de $g \circ f$ y la imagen de f es el conjunto de puntos fijos de $f \circ g$.

Si X es un conjunto no vacío y τ es una topología sobre X, diremos que τ es filtrosa si es $\mathfrak{P}(X)$ o si $\tau - \{\phi\}$ es un filtro sobre X. Diremos que τ es compacta si el espacio topológico (X, τ) es compacto, es decir, si todo recubrimiento de X por elementos de τ se puede reducir a un sub-recubrimiento finito.

2. El operador de puntos cerrados y su adjunto

En esta sección consideramos el operador que a cada topología sobre X le asocia el conjunto de puntos cerrados. Mostramos que éste es un morfismo de conjuntos ordenados que admite adjunto a izquierda y construimos dicho adjunto.

Definición 1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Diremos que x es un punto cerrado si $X - \{x\} \in \tau$.*

Definición 2. *Si (X, τ) un espacio topológico designaremos por $\gamma(\tau)$ al subconjunto de X de los puntos cerrados del espacio (X, τ).*

De esta forma, γ es una función de $Top(X)$ en $\mathfrak{P}(X)$.
La siguiente proposición es evidente:

Proposición 1. $\gamma : (Top(X), \subseteq) \to (\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ *es un morfismo de conjuntos ordenados.*

Vamos a construir ahora una función de regreso de tal manera que resulte adjunta de γ. Para cada $A \subseteq X$, queremos una topología τ sobre X tal que $\gamma(\tau) = A$. Es natural considerar el conjunto $\mathcal{C}$ de todas las topologías sobre X para las cuales los conjuntos de la forma $X - \{a\}$, con $a \in A$, sean abiertos. Definimos entonces $\eta(A)$ como la intersección de todas las topologías de la colección $\mathcal{C}$. Es claro que ésta es la topología menos fina sobre X para la cual los puntos de A son cerrados. La siguiente proposición es fácil de verificar:

Proposición 2. *Sea $A \subseteq X$.*

1) $\eta(A)$ es la topología generada por $\{X - F \mid F \subseteq A$ y F es finito$\}$.

2) Si A es un subconjunto propio de X el conjunto $\{X - F \mid F \subseteq A$ y F es finito$\}$ es un filtro sobre X.

3) $\eta(A) = \{X - F \mid F \subseteq A$ y F es finito$\} \cup \{\phi\}$.

Tenemos así que para cada sub-conjunto A de X la topología $\eta(A)$ es una topología filtrosa sobre X (es claro que si $A = X$ y X es finito, entonces $\eta(A)$ es la topología discreta sobre X). Como $\eta(A)$ está contenida en la topología de complementarios finitos resulta ser compacta. Además, si $A \subseteq B$ entonces $\eta(A) \subseteq \eta(B)$ y así tenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 3. *Para todo sub-conjunto A de X, $\eta(A)$ es una topología filtrosa compacta sobre X.*

Proposición 4. *$\eta : (\mathfrak{P}(X), \subseteq) \to (Top(X), \subseteq)$ es un morfismo de conjuntos ordenados.*

Teorema 2. *La función $\eta : (\mathfrak{P}(X), \subseteq) \to (Top(X), \subseteq)$ es adjunta a izquierda de $\gamma : (Top(X), \subseteq) \to (\mathfrak{P}(X), \subseteq)$.*

En efecto, tenemos que para todo $A \subseteq X$, $\gamma(\eta(A)) \supseteq A$ y para toda topología τ sobre X, $\eta(\gamma(\tau)) \subseteq \tau$. En realidad, si X tiene al menos dos puntos, se tiene que $\gamma(\eta(A)) = A$.

Corolario 1. *γ respeta extremos inferiores y η respeta extremos superiores. En otras palabras, si $\{\tau_i\}_{i\in I}$ es una colección de topologías sobre X y $\{A_j\}_{j\in J}$ es una colección de subconjuntos de X se tiene:*

$$\textit{i) } \gamma\left(\bigcap_{i\in I}\tau_i\right) = \bigcap_{i\in I}\gamma(\tau_i)$$

$$\textit{ii) } \eta\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right) = \left\langle \bigcup_{j\in J}\eta(A_j)\right\rangle,$$

donde $\langle\beta\rangle$ denota la topología generada por la colección β sobre X.

El siguiente ejemplo muestra que, en general, γ no respeta extremos superiores:

Ejemplo 1. *Sea $X = \mathbb{R}$ y sean τ la topología de colas a derecha y μ la topología de colas a izquierda sobre X. Tenemos que $\gamma(\tau) = \gamma(\mu) = \phi$, pero $\langle\tau \cup \mu\rangle$ es la topología discreta y así $\gamma(\langle\tau \cup \mu\rangle) = X \neq \phi = \gamma(\tau) \cup \gamma(\mu)$.*

3. El teorema principal

Presentamos en esta sección el resultado principal de este artículo que consiste en mostrar que el conjunto de todas las topologías filtrosas compactas sobre X, cuando X tiene al menos dos puntos, tiene estructura de álgebra de Boole completa. Esto es consecuencia del isomorfismo correspondiente a la adjunción que encontramos en la sección anterior.

Para determinar el isomorfismo de adjunción vamos a encontrar los puntos fijos de los operadores $\gamma \circ \eta$ y $\eta \circ \gamma$. En primer lugar consideremos la siguiente proposición que es consecuencia directa de la adjunción y del hecho que si X tiene al menos dos puntos, para todo sub-conjunto A de X, $\gamma(\eta(A)) = A$.

Proposición 5. *Si X tiene al menos dos puntos tenemos que:*

1) La función $\gamma : Top(X) \to \mathfrak{P}(X)$ es sobreyectiva.
2) La función $\eta : \mathfrak{P}(X) \to Top(X)$ es inyectiva.

3) $\eta : \mathfrak{P}(X) \to \eta(\mathfrak{P}(X))$ *es un isomorfismo de conjuntos ordenados*

Sabemos ya que $\eta(\mathfrak{P}(X))$ está contenido en el conjunto de las topologías filtrosas compactas sobre X. La siguiente proposición nos dice que esta contenencia es, en realidad, una igualdad:

Proposición 6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) τ *es una topología filtrosa y compacta sobre* X.

2) $\tau = \eta(A)$ *para algún* $A \subseteq X$.

3) $\tau = \eta(\gamma(\tau))$.

4) τ *es filtrosa y menos fina que la topología de complementarios finitos sobre* X.

Teorema 3. *Si* X *tiene al menos dos puntos, el conjunto de topologías filtrosas compactas sobre* X *es un álgebra de Boole completa, isomorfa a* $\mathfrak{P}(X)$.

Este teorema es consecuencia de la parte 3) de la Proposición 5 y de la Proposición 6 que afirma que $\eta(\mathfrak{P}(X))$ es la colección de topologías filtrosas compactas sobre X.

Bibliografía

[1] L. Acosta y E. Lozano, *Una caracterización de las topologías compactas* T_0, Boletín de Matemáticas, **VI** (1999) no. 2, 77–84.

[2] T. S. Blyth, *Residuated mappings*, Order 1, 1984.

[3] G. Gierz et al., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer Verlag, New York, 1980.

[4] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1971.

[5] C. J. Ruiz, *Teoría de la adjunción*, Trabajo de año sabático, Universidad Nacional de Colombia, 1989.