Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IX No. 1 (2002), pp. 23–52

LÓGICA BÁSICA CON ACEPTACIÓN FUERTE

MANUEL SIERRA A. (*)

Abstract. The system "Basic Logic with Strong Affirmation" is a generalization of the Classical Logic. In it we introduce a new operator called "strong affirmation", with the next characteristic: it is possible that a proposition and the negation of its strong affirmation can be both true, and, as well, a proposition and the negation of its strong affirmation can be both false.

Resumen
El sistema "Lógica Básica con Aceptación Fuerte" es una generalización de la Lógica Clásica. En él se tiene un operador llamado "aceptación fuerte", el cual tiene la característica de permitir que un enunciado y la negación de su aceptación fuerte sean ambos verdaderos, también permite que un enunciado y la negación de su aceptación fuerte sean ambos falsos.

Key words and phrases. Strong affirmation, weak affirmation, negation, axiom, classical logic, valuation, trivialization.

1. Introducción[1]

La "aceptación clásica"[2], está caracterizada desde el punto de vista semántico por la siguiente equivalencia:

(*) Manuel Sierra A. Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad EAFIT, Medellín. E-mail: msierra@eafit.edu.co.

[1]Este sistema deductivo fue presentado por primera vez en el XVIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística celebrado en la ciudad de Bogotá en noviembre de 2001.

[2]Intuitivamente se dice que un enunciado es aceptado o clásicamente aceptado si es verdadero desde el punto de vista de la Lógica Clásica.

$$\text{A es aceptado} \Leftrightarrow \sim\text{A no es aceptado.}$$

Esta equivalencia dice que un enunciado es aceptado si y solamente si su negación no es aceptada. En ella pueden leerse 4 enunciados condicionales:

$$\begin{array}{l}
\text{A es aceptado} \Rightarrow \sim \text{A no es aceptado.} \\
\sim\text{A es aceptado} \Rightarrow \text{A no es aceptado.} \\
\text{A no es aceptado} \Rightarrow \sim\text{A es aceptado.} \\
\sim\text{A no es aceptado} \Rightarrow \text{A es aceptado.}
\end{array}$$

Los dos primeros enunciados son equivalentes y prohiben que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, es decir, se prohibe que un enunciado sea compatible con su negación; los dos últimos también son equivalentes y prohiben que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, es decir, se prohibe la indeterminación de un enunciado respecto a su negación. La aceptación clásica prohibe la compatibilidad de un enunciado con su negación y la indeterminación respecto a su negación. El sistema presentado en este trabajo es una generalización de la Lógica Clásica, en él se tiene un operador llamado "aceptación fuerte"[3], el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con la negación de su afirmación fuerte ni que un enunciado y la negación de su aceptación fuerte sean ambos no aceptados. Se enfatizará sobre todo el aspecto deductivo del sistema, por esta razón, la Sección 3 de teoremas es presentada de manera extensa y detallada.

Este trabajo se inscribe en el campo de investigación "cálculos intermedios paraconsistentes", el cual se encuentra actualmente en pleno desarrollo. Usualmente los cálculos paraconsistentes son presentados con un operador de "negación débil", el cual es menos fuerte que el operador "negación clásica"[4]; un hecho bien conocido es que estos cálculos soportan las contradicciones al nivel de la "negación débil". En contraste, el sistema aquí presentado trabaja con la "negación clásica" y con dos operadores de afirmación, uno de estos es la afirmación usual de la Lógica Clásica, el sistema al ser una extensión de la Lógica Clásica, no soporta las contradicciones a este nivel (afirmación usual y negación clásica); mientras que, el nuevo operador de afirmación esta caracterizado de tal forma que, a este nivel (afirmación fuerte y negación clásica), el sistema si soporta las contradicciones[5].

[3]También se utilizará como sinónimo el término "afirmación fuerte".

[4]Esta tendencia es común en la escuela belga [1], en la escuela brasilera [2] y en la escuela australiana [3].

[5]Esta tendencia, para el caso de la negación débil, es presentada en [4].

2. Sistema deductivo[6]

Axiomas para la lógica positiva clásica

Axiomas para el condicional (→)

Axioma 1.
Irrelevancia del antecedente[7].
Si el consecuente de un condicional es aceptado entonces el condicional es aceptado.

$$A \to (B \to A).$$

Axioma 2.
Distributividad de →.
Si al aceptar dos enunciados se acepta un tercero y si del primero se sigue el segundo entonces al aceptar el primero se acepta el tercero.

$$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)].$$

Axioma 3.
Ley de Peirce.
Si se acepta que de un condicional se siga su antecedente entonces se acepta el antecedente.

$$[(A \to B) \to A] \to A.$$

Axiomas para la disyunción (∨)

Axioma 4.
Introducción de la disyunción en el consecuente.
Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de éste con cualquier otro.

$$A \to (A \vee B).$$

Axioma 5.
Introducción de la disyunción en el consecuente.

[6]El lenguaje consta de los conectivos binarios {→, ∨, ∧}; los conectivos unarios {∼, +, f, d}; los símbolos de puntuación {), (}; el conjunto de Fórmulas (enunciados) es generado recursivamente con los conectivos a partir del conjunto de enunciados atómicos {p1, p2, ...}. Se escribirá A^f en vez de f(A), y A^d en vez de d(A).

[7]En lo que sigue los axiomas y teoremas estarán acompañados de un comentario en lenguaje natural, este comentario debe verse sólo como una "guía heurística", para el manejo natural de los axiomas y teoremas. Estos comentarios no deben generar confusión entre la sintaxis del sistema y su interpretación semántica.

Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de cualquier otro con este.

$$A \to (B \vee A).$$

Axioma 6.
Introducción de la disyunción en el antecedente.
Un condicional con una disyunción de antecedente es aceptado cuando de cada uno de los disyuntos se sigue el consecuente.

$$(B \to A) \to [(C \to A) \to (B \vee C) \to A].$$

Axiomas para la conjunción ($\wedge$)

Axioma 7.
Eliminación de la conjunción.
Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto izquierdo.

$$(A \wedge B) \to A.$$

Axioma 8.
Eliminación de la conjunción.
Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto derecho.

$$(A \wedge B) \to B.$$

Axioma 9.
Introducción de la conjunción en el consecuente.
Se acepta que una conjunción se siga de un enunciado cuando de éste se siguen cada uno de los coyuntos.

$$(A \to B) \to [(A \to C) \to A \to (B \wedge C)].$$

Axiomas para la negación clásica ($\sim$)

Axioma 10.
Principio de trivialización.
Se acepta un enunciado arbitrario cuando algún enunciado rechazado es aceptado.

$$A \to (\sim A \to B).$$

Axioma 11.
Principio de bivalencia.

Un enunciado es aceptado o es rechazado[8].

$$A\vee\sim A.$$

Axiomas para la aceptación fuerte (+):

Axioma 12.
AfAA+ (Afirmación del Fortalecimiento[9] y Afirmación del Alcance de la Aceptación Fuerte).
Si un enunciado puede ser fortalecido y se acepta entonces el enunciado es fuertemente aceptado.

$$A^{f}\rightarrow(A\rightarrow+A).$$

Axioma 13.
Ff (Falsedad del Fortalecimiento).
Si un enunciado no puede ser fortalecido entonces se acepta y su aceptación fuerte se rechaza.

$$\sim A^{f}\rightarrow(\sim+A\wedge A).$$

Axioma 14.
AdA+ (Afirmación del Debilitamiento[10] y Afirmación de la Aceptación Fuerte).
Si un enunciado es debilitable y fuertemente aceptado entonces es aceptado.

$$A^{d}\rightarrow(+A\rightarrow A).$$

Axioma 15.
Fd (Falsedad del Debilitamiento).
Si un enunciado no puede ser debilitado entonces es fuertemente[11] aceptado y rechazado.

$$\sim A^{d}\rightarrow(+A\wedge\sim A).$$

Regla de inferencia

Mp (Modus Ponens).
Si un condicional y su antecedente son aceptados entonces es aceptado su consecuente.

$$A,\ A\rightarrow B\vdash B.$$

---

[8] *Rechazar* significa no aceptar.

[9] Intuitivamente un enunciado α es *fortalecible* o *puede ser fortalecido* si teniendo la afirmación débil o clásica de α se puede inferir la afirmación fuerte de α.

[10] Intuitivamente un enunciado α es *debilitable* o *puede ser debilitado* si teniendo la afirmación fuerte de α se puede inferir la afirmación débil o clásica de α.

[11] Se dice que un enunciado es *fuertemente aceptado* si se acepta su afirmación fuerte.

3. Algunos teoremas[12]

Teorema 1.
AdFA+ (Afirmación del Debilitamiento y Falsedad del Alcance de la Aceptación Fuerte).
Si un enunciado es debilitable y se rechaza entonces no puede ser fuertemente aceptado.

$$A^{d}\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim+A).$$

Prueba:

1. $A^{d}\rightarrow(+A\rightarrow A)$	Axioma 14 AdA+
2. $A^{d}\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim+A)$	Transposición[13]en 1.

Teorema 2.
AfF+ (Afirmación del Fortalecimiento y Falsedad de la Aceptación Fuerte).
Si un enunciado puede ser fortalecido y su afirmación fuerte es rechazada entonces no es aceptado.

$$A^{f}\rightarrow(\sim+A\rightarrow\sim A).$$

Prueba:

1. $A^{f}\rightarrow(A\rightarrow+A)$	Axioma 12 AfAA+
2. $A^{f}\rightarrow(\sim+A\rightarrow\sim A)$	Transposición en 1.

Teorema 3.
FA+A+f (Falsedad del Alcance de la Aceptación Fuerte y Afirmación de la Aceptación Fuerte en el Fortalecimiento).
Si un enunciado es rechazado y es fuertemente aceptado entonces no es debilitable.

$$\sim A\rightarrow(+A\rightarrow\sim A^{d}).$$

Prueba:

1. $A^{d}\rightarrow(+A\rightarrow A)$	Axioma 14 AdA+
2. $+A\rightarrow(A^{d}\rightarrow A)$	Intercambio[14]en 1
3. $\sim(A^{d}\rightarrow A)\rightarrow\sim+A$	Transposición en 2

[12]Un enunciado A es un teorema ($\vdash$ A) si y solamente si existe una prueba del enunciado A a partir de los axiomas, es decir, si existe una secuencia de enunciados de los cuales el enunciado A es el último y los demás son axiomas o se obtienen a partir de enunciados anteriores utilizando la regla de inferencia Modus Ponens. Los axiomas 1 a 11, junto con la regla de inferencia Modus Ponens, determinan la Lógica Clásica; y puesto que esta lógica es bastante conocida, sus teoremas y reglas de inferencia no serán probados.

[13]De $\sim X\rightarrow Y$ se sigue $\sim Y\rightarrow X$. De $X\rightarrow\sim Y$ se sigue $Y\rightarrow\sim X$. De $X\rightarrow Y$ se sigue $\sim Y\rightarrow\sim X$. De $\sim X\rightarrow\sim Y$ se sigue $Y\rightarrow X$.

[14]De $X\rightarrow(Y\rightarrow Z)$ se sigue $Y\rightarrow(X\rightarrow Z)$.

4. $(A^d \wedge \sim A) \rightarrow \sim +A$	Negación del condicional[15] en 3
5. $(\sim A \wedge A^d) \rightarrow \sim +A$	Conmutatividad de la conjunción[16] en 4
6. $\sim A \rightarrow (A^d \rightarrow \sim +A)$	Exportación[17] en 5
7. $\sim A \rightarrow (+A \rightarrow \sim A^d)$	Transposición en 6.

Teorema 4.
F+AA+f (Falsedad de la Aceptación Fuerte y Afirmación del Alcance de la Aceptación Fuerte en el Fortalecimiento).
Si un enunciado es aceptado y rechazada su aceptación fuerte entonces no puede ser fortalecido.

$$\sim +A \rightarrow (A \rightarrow \sim A^f).$$

Prueba:

1. $A^f \rightarrow (A \rightarrow +A)$	Axioma 12 AfAA+
2. $A^f \rightarrow (\sim +A \rightarrow \sim A)$	Transposición en 1
3. $\sim +A \rightarrow (A^f \rightarrow \sim A)$	Intercambio en 2
4. $\sim +A \rightarrow (A \rightarrow \sim A^f)$	Transposición en 3.

Teorema 5.
F+d (Falsedad de la Aceptación Fuerte en el Debilitamiento).
Si un enunciado no es fuertemente aceptado entonces es debilitable.

$$\sim +A \rightarrow A^d.$$

Prueba:

1. $\sim A^d \rightarrow (+A \wedge \sim A)$	Axioma 15 Fd
2. $\sim A^d \rightarrow +A$	Simplificación[18] en 1
3. $\sim +A \rightarrow A^d$	Transposición en 2.

Teorema 6.
AA+d (Afirmación del Alcance de la Aceptación Fuerte en el Debilitamiento).
Si un enunciado es aceptado entonces es debilitable.

$$A \rightarrow A^d.$$

[15] De $\sim(X \rightarrow Y)$ se sigue $X \wedge \sim Y$. De $X \wedge \sim Y$ se sigue $\sim(X \rightarrow Y)$.

[16] De $X \wedge Y$ se sigue $Y \wedge X$.

[17] De $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ se sigue $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$.

[18] De $Z \rightarrow (X \wedge Y)$ se sigue $Z \rightarrow X$. De $Z \rightarrow (X \wedge Y)$ se sigue $Z \rightarrow Y$.

Prueba:

1. $\sim A^{d} \rightarrow (+A \wedge \sim A)$ Axioma 15 Fd
2. $\sim A^{d} \rightarrow \sim A$ Simplificación en 1
3. $A \rightarrow A^{d}$ Transposición en 2.

Como caso particular se tiene: Si un enunciado es debilitable entonces el enunciado que dice que es debilitable también es debilitable.

$$A^{d} \rightarrow (A^{d})^{d}.$$

Como consecuencia inmediata se tiene: Si un enunciado es aceptado entonces el enunciado que dice que es debilitable es debilitable.

$$A \rightarrow (A^{d})^{d}.$$

Teorema 7.
FA+f (Falsedad del Alcance de la Aceptación Fuerte en el Fortalecimiento).
Si un enunciado es rechazado entonces puede ser fortalecido.

$$\sim A \rightarrow A^{f}.$$

Prueba:

1. $\sim A^{f} \rightarrow (\sim +A \wedge A)$ Axioma 13 Ff
2. $\sim A^{f} \rightarrow A$ Simplificación en 1
3. $\sim A \rightarrow A^{f}$ Transposición en 2.

Teorema 8.
A+f (Afirmación de la Aceptación Fuerte en el Fortalecimiento).
Si un enunciado es fuertemente aceptado entonces puede ser fortalecido.

$$+A \rightarrow A^{f}.$$

Prueba:

1. $\sim A^{f} \rightarrow (\sim +A \wedge A)$ Axioma 13 Ff
2. $\sim A^{f} \rightarrow \sim +A$ Simplificación en 1
3. $+A \rightarrow A^{f}$ Transposición en 2.

Teorema 9.
FfFd (Falsedad del Fortalecimiento y Falsedad del Debilitamiento).
Si un enunciado no puede ser fortalecido y no puede ser debilitado entonces todo es aceptado. Esto significa que no puede ocurrir que un enunciado no pueda ser fortalecido y no pueda ser debilitado.

$$\sim A^{f} \rightarrow (\sim A^{d} \rightarrow B).$$

Prueba:

1. $\sim A^f$	Premisa 1
2. $\sim A^d$	Premisa 2
3. $\sim A^f \rightarrow (\sim +A \wedge A)$	Axioma 13 Ff
4. $\sim +A \wedge A$	Modus Ponens en 1 y 3
5. A	Simplificación en 4
6. $\sim A^d \rightarrow (+A \wedge \sim A)$	Axioma 15 Fd
7. $+A \wedge \sim A$	Modus Ponens en 2 y 6
8. $\sim A$	Simplificación en 7
9. $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	Axioma 10 Principio de trivialización
10. $\sim A \rightarrow B$	Modus Ponens en 5 y 9
11. B	Modus Ponens en 8 y 10
12. $\sim A^d \rightarrow B$	MDC[19]en 2 y 11
13. $\sim A^f \rightarrow (\sim A^d \rightarrow B)$	MDC en 1 y 12.

Teorema 10.
AfoAd (Afirmación del Fortalecimiento o Afirmación del Debilitamiento).
Un enunciado puede ser fortalecido o puede ser debilitado.

$$A^f \vee A^d.$$

Prueba:

1. $\sim A^f$	Premisa
2. $\sim A^f \rightarrow A \wedge \sim +A$	Axioma 13 Ff
3. $A \wedge \sim +A$	Modus Ponens en 1 y 2
4. A	Simplificación en 3
5. $A \rightarrow A^d$	Teorema 6 AA+d
6. A^d	Modus Ponens 4 y 5
7. $\sim A^f \rightarrow A^d$	MDC en 1 y 6
8. $A^f \vee A^d$	Implicación disyunción [20]en 7.

Como consecuencia inmediata se tiene que si un enunciado no puede ser fortalecido entonces dicho enunciado puede ser debilitado.

$$\sim A^f \rightarrow A^d.$$

También se concluye que si un enunciado no puede ser debilitado entonces dicho enunciado puede ser fortalecido.

$$\sim A^d \rightarrow A^f.$$

[19]Si de X1, ..., Xn, Y se sigue Z entonces de X1, ..., Xn se sigue Y→Z.

[20]De X→Y se sigue ∼X∨Y. De ∼X→Y se sigue X∨Y.

Teorema 11.
Propagación del fortalecimiento.
Si un enunciado puede ser fortalecido entonces el enunciado que lo acepta y que rechaza su aceptación fuerte también puede ser fortalecido.

$$A^{f} \to (A \wedge \sim + A)^{f}.$$

Prueba:

1. A^{f}	Premisa
2. $A^{f} \to (\sim + A \to \sim A)$	Teorema 2 AfF+
3. $\sim + A \to \sim A$	Modus Ponens en 1 y 2
4. $A \vee \sim A$	Tercero excluido[21]
5. $A \to + A$	Transposición en 3
6. $\sim A \to \sim A$	Identidad[22]
7. $\sim A \vee + A$	Dilema constructivo[23] en 4, 5 y 6
8. $\sim (A \wedge \sim + A)$	DeMorgan[24] en 7
9. $\sim (A \wedge \sim + A) \to (A \wedge \sim + A)^{f}$	Teorema 7 FA+f
10. $(A \wedge \sim + A)^{f}$	Modus Ponens en 8 y 9
11. $A^{f} \to (A \wedge \sim + A)^{f}$	MDC en 1 y 10.

Teorema 12.
Propagación del debilitamiento.
Si un enunciado puede ser debilitado entonces el enunciado que lo acepta o que rechaza su aceptación fuerte puede ser debilitado.

$$A^{d} \to (A \vee \sim + A)^{d}.$$

Prueba:

1. A^{d}	Premisa
2. $A^{d} \to (\sim A \to \sim + A)$	Teorema 1 AdFA+
3. $\sim A \to \sim + A$	Modus Ponens en 1 y 2
4. $A \vee \sim + A$	Implicación disyunción en 3
5. $(A \vee \sim + A) \to (A \vee \sim + A)^{d}$	Teorema 6 AA+d
6. $(A \vee \sim + A)^{d}$	Modus Ponens en 4 y 5
7. $A^{d} \to (A \vee \sim + A)^{d}$	MDC en 1 y 6.

[21]Principio del tercero excluido es otro nombre para el principio de bivalencia (axioma 11).

[22]El principio de identidad dice: $X \to X$.

[23]De $X \vee Y$, $X \to Z$, $Y \to T$ se sigue $Z \vee T$. De $X \vee Y$, $X \to Z$, $Y \to Z$ se sigue Z.

[24]De $\sim (X \wedge Y)$ se sigue $\sim X \vee \sim Y$. De $\sim X \vee \sim Y$ se sigue $\sim (X \wedge Y)$. De $\sim (X \vee Y)$ se sigue $\sim X \wedge \sim Y$. De $\sim X \wedge \sim Y$ se sigue $\sim (X \vee Y)$.

Teorema 13.
Si un enunciado no puede ser fortalecido entonces el enunciado que lo acepta o que rechaza su aceptación fuerte puede ser debilitado.

$$\sim A^{f} \to (A \vee \sim +A)\ ^{d}.$$

Prueba:

1. $A^{f} \vee A^{d}$ — Teorema 10 AfoAd
2. $\sim A^{f} \to A^{d}$ — Implicación disyunción en 1
3. $A^{d} \to (A \vee \sim +A)\ ^{d}$ — Teorema 12
4. $\sim A^{f} \to (A \vee \sim +A)\ ^{d}$ — Silogismo Hipotético[25]en 2 y 3.

Teorema 14.
Si un enunciado no puede ser debilitado entonces el enunciado que lo acepta o que rechaza su aceptación fuerte puede ser fortalecido.

$$\sim A^{d} \to (A \vee \sim +A)\ ^{f}.$$

Prueba:

1. $\sim A^{d} \to (+A \wedge \sim A)$ — Axioma 15 Fd
2. $(+A \wedge \sim A) \to \sim (\sim +A \vee A)$ — DeMorgan
3. $\sim (\sim +A \vee A) \to (\sim +A \vee A)\ ^{f}$ — Teorema 7 FA+f
4. $\sim A^{d} \to (\sim +A \vee A)\ ^{f}$ — Silogismo Hipotético en 1, 2 y 3.

Teorema 15.
Si un enunciado no puede ser fortalecido entonces el enunciado que lo acepta y que rechaza su aceptación fuerte puede ser debilitado.

$$\sim A^{f} \to (A \wedge \sim +A)\ ^{d}.$$

Prueba:

1. $\sim A^{f} \to A \wedge \sim +A$ — Axioma 13 Ff
2. $A \wedge \sim +A \to (A \wedge \sim +A)\ ^{d}$ — Teorema 6 AA+d
3. $\sim A^{f} \to (A \wedge \sim +A)\ ^{d}$ — Silogismo Hipotético en 1 y 2.

Teorema 16.
Si un enunciado no puede ser debilitado entonces el enunciado que lo acepta y que rechaza su aceptación fuerte puede ser fortalecido.

$$\sim A^{d} \to (A \wedge \sim +A)\ ^{f}.$$

[25]De X→Y, Y→Z se sigue X→Z.

Prueba:

1. $\sim A^{d} \rightarrow (+A \wedge \sim A)$	Axioma 15 Fd
2. $\sim A^{d} \rightarrow +A$	Simplificación en 1
3. $\sim A^{d} \rightarrow (+A \vee \sim A)$	Adición[26]en 2
4. $(+A \vee \sim A) \rightarrow \sim(\sim +A \wedge A)$	DeMorgan
5. $\sim(\sim +A \wedge A) \rightarrow (\sim +A \wedge A)\ ^{f}$	Teorema 7 FA+f
6. $\sim A^{d} \rightarrow (\sim +A \wedge A)\ ^{f}$	Silogismo Hipotético en 3, 4 y 5.

Teorema 17.
Principio de debilitamiento.
Si un enunciado se acepta o se rechaza su aceptación fuerte entonces puede ser debilitado.

$$(A \vee \sim +A) \rightarrow A^{d}.$$

Prueba:

1. $\sim A^{d} \rightarrow (+A \wedge \sim A)$	Axioma 15 Fd
2. $\sim(+A \wedge \sim A) \rightarrow A^{d}$	Transposición en 1
3. $(\sim +A \vee A) \rightarrow A^{d}$	DeMorgan en 2.

Teorema 18.
Principio de debilitamiento.
Si un enunciado puede ser debilitado entonces se acepta o se rechaza su aceptación fuerte.

$$A^{d} \rightarrow (A \vee \sim +A).$$

Prueba:

1. $A^{d} \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim +A)$	Teorema 1 AdFA+
2. $A^{d} \rightarrow (A \vee \sim +A)$	Implicación disyunción en 1.

De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^{d}:

Los enunciados que pueden ser debilitados son los que se aceptan o rechazan su aceptación fuerte.

$$A^{d} \leftrightarrow^{27} (A \vee \sim +A).$$

Los enunciados que no pueden ser debilitados son los que se rechazan y son fuertemente aceptados.

[26]De $Z \rightarrow X$ se sigue $Z \rightarrow (X \vee Y)$. De $Z \rightarrow Y$ se sigue $Z \rightarrow (X \vee Y)$.

[27]$A \leftrightarrow B$ se define como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

$$\sim A^{d} \leftrightarrow (\sim A \wedge +A).$$

Teorema 19.
AA+F+f (Afirmación del Alcance de la Aceptación Fuerte y Falsedad de la Aceptación Fuerte en el Fortalecimiento).
Si un enunciado se acepta y se rechaza su afirmación fuerte entonces no puede ser fortalecido.

$$(A \wedge \sim +A) \rightarrow \sim A^{f}.$$

Prueba:

1. $A^{f} \rightarrow (\sim +A \rightarrow \sim A)$	Teorema 2 AfF+
2. $A^{f} \rightarrow (+A \vee \sim A)$	Implicación disyunción en 1
3. $A^{f} \rightarrow \sim(\sim +A \wedge A)$	DeMorgan en 2
4. $(A \wedge \sim +A) \rightarrow \sim A^{f}$	Transposición en 3.

Puesto que por axioma 13 Ff se tiene la recíproca del Teorema 19, se puede concluir la siguiente caracterización de A^{f}: Los enunciados que no pueden ser fortalecidos son los que se aceptan y se rechaza su aceptación fuerte.

$$\sim A^{f} \leftrightarrow (A \wedge \sim +A).$$

Los enunciados que pueden ser fortalecidos son los que no se aceptan o son fuertemente aceptados.

$$A^{f} \leftrightarrow (\sim A \vee +A).$$

Teorema 20.
Principio de trivialización.
Si un enunciado puede ser fortalecido y es aceptado y rechazada su aceptación fuerte entonces todo enunciado es aceptado.

$$A^{f} \rightarrow [\sim +A \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Prueba:

1. $A^{f} \rightarrow (\sim +A \rightarrow \sim A)$	Teorema 2 AfF+
2. $(A^{f} \wedge \sim +A) \rightarrow \sim A$	Importación[28]en 1
3. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Axioma 10 Principio de trivialización
4. $(A^{f} \wedge \sim +A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Silogismo hipotético en 2 y 3
5. $A^{f} \rightarrow [\sim +A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Exportación en 4.

[28]De $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ se sigue $(X \wedge Y) \rightarrow Z$.

Teorema 21.
Principio de trivialización.
Si un enunciado no puede ser debilitado y es aceptado y rechazada su aceptación fuerte entonces todo enunciado es aceptado.

$$\sim A^{d} \rightarrow [\sim +A \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Prueba:

1. $\sim A^{d} \rightarrow (+A \wedge \sim A)$	Axioma 15 Fd
2. $\sim A^{d} \rightarrow \sim A$	Simplificación en 1
3. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Axioma 10 Principio de trivialización
4. $\sim A^{d} \rightarrow (A \rightarrow B)$	Silogismo hipotético en 2 y 3
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow [\sim +A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Axioma 1 Irrelevancia del antecedente
6. $\sim A^{d} \rightarrow [\sim +A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Silogismo hipotético en 4 y 5.

Teorema 22.
Falsedad del debilitamiento.
Si un enunciado no es debilitable entonces aceptarlo equivale a rechazar su aceptación fuerte.

$$\sim A^{d} \rightarrow (A \leftrightarrow \sim +A).$$

Prueba:

1. $\sim A^{d} \rightarrow (\sim A \wedge +A)$	Axioma 15 Fd
2. $\sim A^{d} \rightarrow \sim A$	Simplificación en 1
3. $\sim A \rightarrow (+A \rightarrow \sim A)$	Axioma 1 Irrelevancia del antecedente
4. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim +A)$	Transposición en 3
5. $\sim A^{d} \rightarrow (A \rightarrow \sim +A)$	Silogismo hipotético en 2 y 4
6. $\sim A^{d} \rightarrow +A$	Simplificación en 1
7. $+A \rightarrow (\sim A \rightarrow +A)$	Axioma 1 Irrelevancia del antecedente
8. $+A \rightarrow (\sim +A \rightarrow A)$	Transposición en 7
9. $\sim A^{d} \rightarrow (\sim +A \rightarrow A)$	Silogismo hipotético en 6 y 8
10. $\sim A^{d} \rightarrow [(\sim +A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \sim +A)]$	Conjunción[29]en 5 y 9
11. $\sim A^{d} \rightarrow (A \leftrightarrow \sim +A)$	Equivalencia[30]en 10.

Teorema 23.
Reducción al absurdo débil.
Si de un enunciado que puede ser debilitado se sigue la aceptación y el rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido entonces la aceptación fuerte del enunciado inicial es rechazada.

[29]De $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y$ se sigue $Z \rightarrow (X \wedge Y)$. De $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y$ se sigue $Z \rightarrow (Y \wedge X)$.

[30]De $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ se sigue $X \leftrightarrow Y$ y de $X \leftrightarrow Y$ se sigue $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$.

$$(A^d \wedge B^f) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow \sim{+}A].$$

Prueba:

1. $A^d \wedge B^f$	Premisa 1
2. A^d	Simplificación en 1
3. $A^d \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim{+}A)$	Teorema 1 AdFA+
4. $(\sim A \rightarrow \sim{+}A)$	Modus Ponens en 2 y 3
5. B^f	Simplificación en 1
6. $B^f \rightarrow (\sim{+}B \rightarrow \sim B)$	Teorema 2 AfF+
7. $(\sim{+}B \rightarrow \sim B)$	Modus Ponens en 5 y 6
8. $A \rightarrow B$	Premisa 2
9. $A \rightarrow \sim{+}B$	Premisa 3
10. $A \rightarrow \sim B$	Silogismo hipotético en 7 y 9
11. $A \rightarrow (B \wedge \sim B)$	Conjunción en 8 y 10
12. $\sim(B \wedge \sim B)$	Principio de no contradicción[31]
13. $\sim A$	Modus tollens[32]en 11 y 12
14. $\sim{+}A$	Modus Ponens en 4 y 13
15. $(A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow \sim{+}A$	MDC en 9 y 14
16. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow \sim{+}A]$	MDC en 8 y 15
17. $A^d \wedge B^f \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow \sim{+}A]$	MDC en 1 y 16.

Observando la prueba, se tiene también que si de un enunciado que puede ser debilitado se sigue la aceptación y el rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido entonces el enunciado inicial es rechazado.

$$(A^d \wedge B^f) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow \sim A].$$

De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte: Si del rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser debilitado se sigue la aceptación y el rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido entonces el enunciado inicial es aceptado.

$$(A^d \wedge B^f) \rightarrow (\sim{+}A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim{+}A \rightarrow \sim{+}B) \rightarrow A].$$

[31] Los principios de no contradicción ($\sim(B \wedge \sim B)$), bivalencia e identidad son equivalentes gracias a las leyes de DeMorgan e Implicación disyunción.

[32] De $X \rightarrow Y$, $\sim Y$ se sigue $\sim X$. De $X \rightarrow \sim Y$, Y se sigue $\sim X$. De $\sim X \rightarrow Y$, $\sim Y$ se sigue X. De $\sim X \rightarrow \sim Y$, Y se sigue X.

Teorema 24.
Si cuando de un enunciado que puede ser fortalecido y que implica el rechazo de la aceptación fuerte de uno que puede ser debilitado, se sigue el rechazo de la aceptación fuerte del que puede ser fortalecido, entonces del que puede ser fortalecido se sigue el que puede ser debilitado.

$$(A^{f}\wedge B^{d})\rightarrow[(A\rightarrow\sim+B)\rightarrow\sim+A]\rightarrow(A\rightarrow B).$$

Prueba:

1. $A^{f}\wedge B^{d}$	Premisa 1
2. $(A\rightarrow\sim+B)\rightarrow\sim+A$	Premisa 2
3. A	Premisa 3
4. A^{f}	Simplificación en 1
5. $A^{f}\rightarrow(\sim+A\rightarrow\sim A)$	Teorema 2 AfF+
6. $\sim+A\rightarrow\sim A$	Modus Ponens en 4 y 5
7. $+A$	Modus tollens en 3 y 6
8. $\sim(A\rightarrow\sim+B)$	Modus tollens en 7 y 2
9. $A\wedge+B$	Negación de $\rightarrow$ en 8
10. B^{d}	Simplificación en 1
11. $B^{d}\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim+B)$	Teorema 1 AdFA+
12. $(\sim B\rightarrow\sim+B)$	Modus Ponens en 10 y 11
13. $+B$	Simplificación en 9
14. B	Modus tollens en 13 y 12
15. $A\rightarrow B$	MDC en 3 y 14
16. $[(A\rightarrow\sim+B)\rightarrow\sim+A]\rightarrow(A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 15
17. $A^{f}\wedge B^{d}\rightarrow[(A\rightarrow\sim+B)\rightarrow\sim+A]\rightarrow(A\rightarrow B)$	MDC en 1 y 16.

De manera similar se tiene: Si cuando del rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido y que implica el rechazo de la aceptación fuerte de uno que puede ser debilitado, se sigue el que puede ser fortalecido, entonces del rechazo de la aceptación fuerte del que puede ser fortalecido se sigue el que puede ser debilitado.

$$(A^{f}\wedge B^{d})\rightarrow[(\sim+A\rightarrow\sim+B)\rightarrow A]\rightarrow(\sim+A\rightarrow B).$$

Teorema 25.
Conjunción de aceptaciones fuertes.
De la conjunción de aceptaciones fuertes se sigue la aceptación fuerte de la conjunción cuando la conjunción puede ser fortalecida y cada uno de los coyuntos puede ser debilitado.

$$[(A\wedge B)\ ^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}]\rightarrow[(+A\wedge+B)\rightarrow+(A\wedge B)].$$

Prueba:

1. $(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}$	Premisa 1
2. $\sim+(A\wedge B)$	Premisa 2
3. $+A$	Premisa 3
4. $(A\wedge B)^{f}$	Simplificación en 1
5. $(A\wedge B)^{f}\rightarrow[\sim+(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]$	Teorema 2 AfF+
6. $\sim+(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$	Modus Ponens en 4 y 5
7. $\sim(A\wedge B)$	Modus Ponens en 2 y 6
8. $\sim A\vee\sim B$	DeMorgan en 7
9. A^{d}	Simplificación en 1
10. $A^{d}\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim+A)$	Teorema 1 AdFA+
11. $\sim A\rightarrow\sim+A$	Modus Ponens en 9 y 10
12. A	Modus tollens en 3 y 11
13. $\sim B$	Silogismo disyuntivo[33] en 12 y 8
14. B^{d}	Simplificación en 1
15. $B^{d}\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim+B)$	Teorema 1 AdFA+
16. $\sim B\rightarrow\sim+B$	Modus Ponens en 14 y 15
17. $\sim+B$	Modus Ponens en 13 y 16
18. $+A\rightarrow\sim+B$	MDC en 3 y 17
19. $\sim+(A\wedge B)\rightarrow(+A\rightarrow\sim+B)$	MDC en 2 y 18
20. $(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim+(A\wedge B)\rightarrow(+A\rightarrow\sim+B)]$	MDC en 1 y 19
21. $(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim+(A\wedge B)\rightarrow(\sim+A\vee\sim+B)]$	Implicación disyunción en 20
22. $(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim(\sim+A\vee\sim+B)\rightarrow+(A\wedge B)]$	Transposición en 21
23. $(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim(+A\wedge+B)\rightarrow+(A\wedge B)]$	DeMorgan en 22.

Rechazo de la aceptación fuerte de la conjunción. Observando la prueba, se tiene que si se rechaza la afirmación fuerte de una conjunción, se tiene la disyunción de la afirmaciones fuertes de sus componentes si la conjunción puede ser fortalecida y cada uno de sus componentes puede ser debilitado.

$$(A\wedge B)^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim+(A\wedge B)\rightarrow(\sim+A\vee\sim+B)].$$

[33] De X∨Y, ∼X se sigue Y. De X∨Y, ∼Y se sigue X.

Teorema 26.
Aceptación fuerte de la conjunción.
De la aceptación fuerte de la conjunción se sigue la conjunción de las aceptaciones fuertes de sus componentes cuando la conjunción puede ser debilitada y dada uno de los coyuntos puede ser fortalecido.

$$[(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\wedge B)\rightarrow(+A\wedge +B)].$$

Prueba:

1.	$(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}$	Premisa 1
2.	$\sim +A\vee\sim +B$	Premisa 2
3.	A^{f}	Simplificación en 1
4.	$A^{f}\rightarrow(\sim +A\rightarrow\sim A)$	Teorema 2 AfF+
5.	$\sim +A\rightarrow\sim A$	Modus Ponens en 3 y 4
6.	B^{f}	Simplificación en 1
7.	$B^{f}\rightarrow(\sim +B\rightarrow\sim B)$	Teorema 2 AfF+
8.	$\sim +B\rightarrow\sim B$	Modus Ponens en 6 y 7
9.	$\sim A\vee\sim B$	Dilema constructivo en 2, 5 y 8
10.	$\sim(A\wedge B)$	DeMorgan en 9
11.	$(A\wedge B)^{d}$	Simplificación en 1
12.	$(A\wedge B)^{d}\rightarrow[\sim(A\wedge B)\rightarrow\sim +(A\wedge B)]$	Teorema 1 AdFA+
13.	$\sim(A\wedge B)\rightarrow\sim +(A\wedge B)$	Modus Ponens en 11 y 12
14.	$\sim +(A\wedge B)$	Modus Ponens en 10 y 13
15.	$(\sim +A\vee\sim +B)\rightarrow\sim +(A\wedge B)$	MDC en 2 y 14
16.	$[(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[(\sim +A\vee\sim +B)\rightarrow\sim +(A\wedge B)]$	MDC en 1 y 15
17.	$[(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\wedge B)\rightarrow\sim(\sim +A\vee\sim +B)]$	Transposición en 16
18.	$[(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\wedge B)\rightarrow(+A\wedge +B)]$	DeMorgan en 17.

Disyunción de rechazos de afirmaciones fuertes. Observando la prueba, también se tiene que de la disyunción de los rechazos de las afirmaciones fuertes de dos enunciados que pueden ser fortalecidos se sigue el rechazo de la afirmación fuerte de su conjunción si esta puede ser debilitada.

$$[(A\wedge B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[(\sim +A\vee\sim +B)\rightarrow\sim +(A\wedge B)].$$

Teorema 27.
Disyunción de aceptaciones fuertes.

De la disyunción de aceptaciones fuertes de dos enunciados se sigue la aceptación fuerte de la disyunción de los enunciados cuando la disyunción puede ser fortalecida y cada uno de los disyuntos puede ser debilitado.

$$[(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}]\rightarrow[(+A\vee +B)\rightarrow +(A\vee B)].$$

Prueba:

1. $(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}$	Premisa 1
2. $\sim +(A\vee B)$	Premisa 2
3. $(A\vee B)\ {}^{f}$	Simplificación en 1
4. $(A\vee B)\ {}^{f}\rightarrow[\sim +(A\vee B)\rightarrow\sim(A\vee B)]$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim +(A\vee B)\rightarrow\sim(A\vee B)$	Modus Ponens en 3 y 4
6. $\sim(A\vee B)$	Modus Ponens en 2 y 5
7. $\sim A\wedge\sim B$	DeMorgan en 6
8. A^{d}	Simplificación en 1
9. $A^{d}\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim +A)$	Teorema 1 AdFA+
10. $\sim A\rightarrow\sim +A$	Modus Ponens en 8 y 9
11. $\sim A$	Simplificación en 7
12. $\sim +A$	Modus Ponens en 11 y 10
13. $\sim B$	Simplificación en 7
14. B^{d}	Simplificación en 1
15. $B^{d}\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim +B)$	Teorema 1 AdFA+
16. $\sim B\rightarrow\sim +B$	Modus Ponens en 14 y 15
17. $\sim +B$	Modus Ponens en 13 y 16
18. $\sim +A\wedge\sim +B$	Conjunción en 12 y 17
19. $\sim +(A\vee B)\rightarrow(\sim +A\wedge\sim +B)$	MDC en 2 y 18
20. $(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim +(A\vee B)\rightarrow(\sim +A\wedge\sim +B)]$	MDC en 1 y 19
21. $(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim(\sim +A\wedge\sim +B)\rightarrow +(A\vee B)]$	Transposición en 20
22. $(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[(+A\vee +B)\rightarrow +(A\vee B)]$	DeMorgan en 21.

Rechazo de la afirmación fuerte de la disyunción. De la prueba se puede observar que del rechazo de la afirmación fuerte de una disyunción que puede ser fortalecida se sigue el rechazo de cada una de las afirmaciones fuertes de sus componentes si estas pueden ser debilitadas.

$$(A\vee B)\ {}^{f}\wedge A^{d}\wedge B^{d}\rightarrow[\sim +(A\vee B)\rightarrow(\sim +A\wedge\sim +B)].$$

Teorema 28.
Aceptación fuerte de la disyunción.
De la aceptación fuerte de la disyunción se sigue la disyunción de las afirmaciones fuertes de sus componentes cuando estos pueden ser fortalecidos y la disyunción puede ser debilitada.

$$[(A\vee B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\vee B)\rightarrow(+A\vee +B)].$$

Prueba:

1. $(A\vee B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}$	Premisa 1
2. $\sim +A\wedge\sim +B$	Premisa 2
3. A^{f}	Simplificación en 1
4. $A^{f}\rightarrow(\sim +A\rightarrow\sim A)$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim +A\rightarrow\sim A$	Modus Ponens en 3 y 4
6. B^{f}	Simplificación en 1
7. $B^{f}\rightarrow(\sim +B\rightarrow\sim B)$	Teorema 2 AfF+
8. $\sim +B\rightarrow\sim B$	Modus Ponens en 6 y 7
9. $\sim +A$	Simplificación en 2
10. $\sim A$	Modus Ponens en 9 y 5
11. $\sim +B$	Simplificación en 2
12. $\sim B$	Modus Ponens en 11 y 8
13. $\sim A\wedge\sim B$	Conjunción en 10 y 12
14. $\sim(A\vee B)$	DeMorgan en 13
15. $(A\vee B)^{d}$	Simplificación en 1
16. $(A\vee B)^{d}\rightarrow[\sim(A\vee B)\rightarrow\sim +(A\vee B)]$	Teorema 1 AdFA+
17. $\sim(A\vee B)\rightarrow\sim +(A\vee B)$	Modus Ponens en 15 y 16
18. $\sim +(A\vee B)$	Modus Ponens en 14 y 17
19. $(\sim +A\wedge\sim +B)\rightarrow\sim +(A\vee B)$	MDC en 2 y 18
20. $[(A\vee B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[(\sim +A\wedge\sim +B)\rightarrow\sim +(A\vee B)]$	MDC en 1 y 19
21. $[(A\vee B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\vee B)\rightarrow\sim(\sim +A\wedge\sim +B)]$	Transposición en 20
22. $[(A\vee B)^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[+(A\vee B)\rightarrow\sim(+A\vee +B)]$	DeMorgan en 21.

Conjunción de rechazos de afirmaciones fuertes. De la prueba se observa que de la conjunción de rechazos de dos enunciados que pueden ser fortalecidos se sigue el rechazo de la afirmación fuerte de la disyunción si esta puede ser debilitada.

$$[(A\vee B)\ ^{d}\wedge A^{f}\wedge B^{f}]\rightarrow[(\sim+A\wedge\sim+B)\rightarrow\sim+(A\vee B)].$$

Teorema 29.
Preservación del condicional con la aceptación fuerte.
Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente puede ser fortalecido, cuyo antecedente puede ser debilitado y el antecedente es fuertemente aceptado entonces se acepta fuertemente el consecuente.

$$[A^{d}\wedge B^{f}]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(+A\rightarrow+B)].$$

Prueba:

1. $A^{d}\wedge B^{f}$	Premisa 1
2. $A\rightarrow B$	Premisa 2
3. $\sim B\rightarrow\sim A$	Transposición en 2
4. A^{d}	Simplificación en 1
5. $A^{d}\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim+A)$	Teorema 1 AdFA+
6. $\sim A\rightarrow\sim+A$	Modus Ponens en 4 y 5
7. $\sim B\rightarrow\sim+A$	Silogismo hipotético en 3 y 6
8. B^{f}	Simplificación en 1
9. $B^{f}\rightarrow(\sim+B\rightarrow\sim B)$	Teorema 2 AfF+
10. $\sim+B\rightarrow\sim B$	Modus Ponens en 8 y 9
11. $\sim+B\rightarrow\sim+A$	Silogismo hipotético en 10 y 7
12. $(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim+B\rightarrow\sim+A)$	MDC en 2 y 11
13. $(A^{d}\wedge B^{f})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim+B\rightarrow\sim+A)]$	MDC en 1 y 12
14. $(A^{d}\wedge B^{f})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(+A\rightarrow+B)]$	Transposición en 13.

Contra recíproca débil. De la prueba se puede observar que si al aceptar un condicional se rechaza la aceptación fuerte del consecuente que puede ser fortalecido, se puede inferir el rechazo de la aceptación fuerte del antecedente si éste puede ser debilitado.

$$(A^{d}\wedge B^{f})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim+B\rightarrow\sim+A)].$$

Teorema 30.
Recíproca de preservación del condicional con la aceptación fuerte.
Si de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido se sigue la aceptación fuerte de otro que puede ser debilitado entonces del primero se sigue el segundo.

$$[A^{f}\wedge B^{d}]\rightarrow[(+A\rightarrow+B)\rightarrow(A\rightarrow B)].$$

Prueba:

1. $A^f \wedge B^d$	Premisa 1
2. $\sim+B \rightarrow \sim+A$	Premisa 2
3. A^f	Simplificación en 1
4. $A^f \rightarrow (\sim+A \rightarrow \sim A)$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim+A \rightarrow \sim A$	Modus Ponens en 3 y 4
6. $\sim+B \rightarrow \sim A$	Silogismo hipotético en 2 y 5
7. B^d	Simplificación en 1
8. $B^d \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim+B)$	Teorema 1 AdFA+
9. $\sim B \rightarrow \sim+B$	Modus Ponens en 7 y 8
10. $\sim B \rightarrow \sim A$	Silogismo hipotético entre 9 y 6
11. $A \rightarrow B$	Transposición en 10
12. $(\sim+B \rightarrow \sim+A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	MDC en 2 y 11
13. $(A^f \wedge B^d) \rightarrow [(\sim+B \rightarrow \sim+A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$	MDC en 1 y 12
14. $(A^f \wedge B^d) \rightarrow [(+A \rightarrow +B) \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Transposición en 13.

Observando la prueba, también se tiene que si del rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser debilitado se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero.

$$B^d \rightarrow [(\sim+B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Observando la prueba, también se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido entonces si se acepta el último también se acepta el primero.

$$A^f \rightarrow [(\sim B \rightarrow \sim+A) \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Observando la prueba, se puede inferir un condicional cuando del rechazo de la afirmación fuerte del consecuente que puede ser debilitado se sigue el rechazo de la afirmación fuerte del antecedente que puede ser fortalecido.

$$(A^f \wedge B^d) \rightarrow [(\sim+B \rightarrow \sim+A) \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Teorema 31.
Principio de bivalencia.
Si un enunciado se sigue de uno que puede ser debilitado y del rechazo de la aceptación fuerte de éste entonces ese enunciado es aceptado.

$$B^d \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (\sim+B \rightarrow A) \rightarrow A].$$

Prueba:

1. B^d	Premisa 1
2. B→A	Premisa 2
3. ∼+B→A	Premisa 3
4. B^d→(∼B→∼+B)	Teorema 1 AdFA+
5. ∼B→∼+B	Modus Ponens en 1 y 4
6. ∼B→A	Silogismo hipotético entre 5 y 3
7. B∨∼B	Principio de bivalencia
8. A	Dilema constructivo en 7, 2 y 6
9. (∼+B→A)→A	MDC en 3 y 8
10. (B→A)→[(∼+B→A)→A]	MDC en 2 y 9
11. B^d→(B→A)→[(∼+B→A)→A]	MDC en 1 y 10.

De manera similar se prueba que si el rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado se sigue de uno que puede ser debilitado y del rechazo de la aceptación fuerte de éste entonces se rechaza la aceptación fuerte de ese enunciado.

$$B^d\to[(B\to\sim+A)\to(\sim+B\to\sim+A)\to\sim+A].$$

Teorema 32.
Si del rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado que puede ser fortalecido se sigue un segundo enunciado, y esto implica el segundo, entonces el segundo se sigue del primero.

$$B^f\to[(\sim+B\to A)\to A\to(B\to A)].$$

Prueba:

1. B^f	Premisa 1
2. (∼+B→A)→A	Premisa 2
3. B^f→(∼+B→∼B)	Teorema 2 AfF+
4. ∼+B→∼B	Modus Ponens en 1 y 3
5. B	Premisa 3
6. +B	Modus Tollens en 5 y 4
7. +B→(∼A→+B)	Axioma 1 Irrelevancia del antecedente
8. ∼A→+B	Modus Ponens en 6 y 7
9. ∼+B→A	Transposición en 8
10. A	Modus Ponens en 9 y 2
11. B→A	MDC 5 y 10
12. [(∼+B→A)→A]→(B→A)	MDC en 2 y 11
13. B^f→[(∼+B→A)→A]→(B→A)	MDC en 1 y 12.

Teorema 33.
Introducción del doble rechazo de la aceptación fuerte.
Si se acepta un enunciado que puede ser fortalecido y el rechazo de su aceptación fuerte puede ser debilitado entonces se rechaza la aceptación fuerte del rechazo de la aceptación fuerte de este.

$$[\mathrm{A}^{\mathrm{f}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{d}}]\rightarrow[\mathrm{A}\rightarrow\sim+\sim+\mathrm{A})].$$

Prueba:

1. $\mathrm{A}^{\mathrm{f}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{d}}$	Premisa 1
2. $\mathrm{A}^{\mathrm{f}}\rightarrow(\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim\mathrm{A})$	Teorema 2 AfF+
3. A^{f}	Simplificación en 1
4. $\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim\mathrm{A}$	Modus Ponens en 3 y 2
5. $(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{d}}$	Simplificación en 1
6. $(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{d}}\rightarrow(\sim\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim+\sim+\mathrm{A})$	Teorema 1 AdFA+
7. $\sim\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim+\sim+\mathrm{A}$	Modus Ponens en 5 y 6
8. $\mathrm{A}\rightarrow\sim\sim+\mathrm{A}$	Transposición en 4
9. $\mathrm{A}\rightarrow\sim+\sim+\mathrm{A}$	Silogismo hipotético en 8 y 7
10. $(\mathrm{A}^{\mathrm{f}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{d}})\rightarrow(\mathrm{A}\rightarrow\sim+\sim+\mathrm{A})$	MDC en 1 y 9.

Teorema 34.
Eliminación del doble rechazo de la aceptación fuerte.
Al rechazar la aceptación fuerte del rechazo de la aceptación fuerte de un enunciado se sigue el enunciado cuando éste puede ser debilitado y el rechazo de su aceptación fuerte puede ser fortalecido.

$$[\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{f}}]\rightarrow[\sim+\sim+\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A})].$$

Prueba:

1. $\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{f}}$	Premisa 1
2. A^{d}	Simplificación en 1
3. $(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{f}}$	Simplificación en 1
4. $\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\rightarrow(\sim\mathrm{A}\rightarrow\sim+\mathrm{A})$	Teorema 1 AdFA+
5. $\sim\mathrm{A}\rightarrow\sim+\mathrm{A}$	Modus Ponens en 2 y 4
6. $(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{f}}\rightarrow(\sim+\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim\sim+\mathrm{A})$	Teorema 2 AfF+
7. $\sim+\sim+\mathrm{A}\rightarrow\sim\sim+\mathrm{A}$	Modus Ponens en 3 y 6
8. $\sim\sim+\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}$	Transposición en 5
9. $\sim+\sim+\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}$	Silogismo hipotético en 7 y 8
10. $[\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\wedge(\sim+\mathrm{A})^{\mathrm{f}}]\rightarrow[\sim+\sim+\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}]$	MDC en 1 y 9.

Teorema 35.
Implicación disyunción.

Cuando se tiene un condicional con antecedente que puede ser debilitado entonces se rechaza la aceptación fuerte del antecedente o se acepta el consecuente.

$$A^d \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim +A \vee B)].$$

Prueba:

1. A^d	Premisa 1
2. $A \rightarrow B$	Premisa 2
3. $A^d \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim +A)$	Teorema 1 AdFA+
4. $\sim A \rightarrow \sim +A$	Modus Ponens en 1 y 3
5. $+A \rightarrow A$	Transposición en 4
6. $+A \rightarrow B$	Silogismo hipotético en 5 y 2
7. $\sim +A \vee B$	Implicación disyunción en 6
8. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim +A \vee B)$	MDC en 2 y 7
9. $A^d \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim +A \vee B)]$	MDC en 1 y 8.

Teorema 36.
Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo.
Si se rechaza la aceptación fuerte de un componente de una disyunción y éste puede ser fortalecido entonces se acepta el otro componente de la disyunción.

$$A^f \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\sim +A \rightarrow B)].$$

Prueba:

1. A^f	Premisa 1
2. $A \vee B$	Premisa 2
3. $\sim A \rightarrow B$	Implicación disyunción en 2
4. $A^f \rightarrow (\sim +A \rightarrow \sim A)$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim +A \rightarrow \sim A$	Modus Ponens en 1 y 4
6. $\sim +A \rightarrow B$	Silogismo hipotético en 5 y 3
7. $(A \vee B) \rightarrow (\sim +A \rightarrow B)$	MDC en 2 y 6
8. $A^f \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\sim +A \rightarrow B)]$	MDC en 1 y 7.

De manera similar se prueba que si se acepta el componente que puede ser fortalecido y del cual se rechaza su aceptación fuerte en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción.

$$A^f \rightarrow [(\sim +A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)].$$

Teorema 37.
Cuestionamiento del condicional.
Si se rechaza la aceptación fuerte de un condicional que puede ser fortalecido y cuyo consecuente puede ser debilitado entonces se acepta el antecedente y se rechaza la aceptación fuerte del consecuente.

$$B^{d}\wedge(A\rightarrow B)^{f}\rightarrow[\sim+(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim+B)].$$

Prueba:

1. $B^{d}\wedge(A\rightarrow B)^{f}$	Premisa 1
2. $\sim+(A\rightarrow B)$	Premisa 2
3. $(A\rightarrow B)^{f}$	Simplificación en 1
4. $(A\rightarrow B)^{f}\rightarrow[\sim+(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim+(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$	Modus Ponens en 3 y 4
6. $\sim(A\rightarrow B)$	Modus Ponens en 2 y 5
7. $A\wedge\sim B$	Negación del condicional en 6
8. A	Simplificación en 7
9. $\sim B$	Simplificación en 7
10. B^{d}	Simplificación en 1
11. $B^{d}\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim+B)$	Teorema 1 AdFA+
12. $(\sim B\rightarrow\sim+B)$	Modus Ponens en 10 y 11
13. $\sim+B$	Modus Ponens en 9 y 12
14. $A\wedge\sim+B$	Conjunción en 8 y 13
15. $\sim+(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim+B)$	MDC en 2 y 14
16. $[B^{d}\wedge(A\rightarrow B)^{f}]\rightarrow[\sim+(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim+B)]$	MDC en 1 y 15.

Del anterior resultado se tiene que la aceptación fuerte de un condicional se sigue de que éste pueda ser fortalecido, su consecuente debilitado y que su antecedente implique la aceptación fuerte de su consecuente.

$$B^{d}\wedge(A\rightarrow B)^{f}\rightarrow[(A\rightarrow+B)\rightarrow+(A\rightarrow B)].$$

Teorema 38.

Aceptar el antecedente y rechazar la aceptación fuerte del consecuente.

Si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza la aceptación fuerte del consecuente entonces se rechaza la aceptación fuerte del condicional siempre que éste pueda ser debilitado y el consecuente pueda ser fortalecido.

$$B^{f}\wedge(A\rightarrow B)^{d}\rightarrow[(A\wedge\sim+B)\rightarrow\sim+(A\rightarrow B)].$$

Prueba:

1. $B^f \wedge (A \to B)^d$	Premisa 1
2. $A \wedge \sim +B$	Premisa 2
3. B^f	Simplificación en 1
4. $B^f \to (\sim +B \to \sim B)$	Teorema 2 AfF+
5. $\sim +B \to \sim B$	Modus Ponens en 3 y 4
6. $\sim +B$	Simplificación en 2
7. $\sim B$	Modus Ponens en 6 y 5
8. A	Simplificación en 2
9. $A \wedge \sim B$	Conjunción en 8 y 7
10. $\sim (A \to B)$	Negación del condicional en 9
11. $(A \to B)^d$	Simplificación en 1
12. $(A \to B)^d \to [\sim (A \to B) \to \sim +(A \to B)]$	Teorema 1 AdFA+
13. $\sim (A \to B) \to \sim +(A \to B)$	Modus Ponens en 11 y 12
14. $\sim +(A \to B)$	Modus Ponens en 10 y 13
15. $(A \wedge \sim +B) \to \sim +(A \to B)$	MDC en 2 y 14
16. $[B^f \wedge (A \to B)^d] \to [(A \wedge \sim +B) \to \sim +(A \to B)]$	MDC en 1 y 15.

Del anterior resultado se tiene que de la aceptación fuerte de un condicional se sigue que su antecedente implique la aceptación fuerte de su consecuente si el condicional puede ser debilitado y su consecuente puede ser fortalecido.

$$B^f \wedge (A \to B)^d \to [+(A \to B) \to (A \to +B)].$$

Observando la prueba, también se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza la aceptación fuerte del consecuente entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente pueda ser fortalecido.

$$B^f \to [(A \wedge \sim +B) \to \sim (A \to B)].$$

y también se observa que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se rechaza la aceptación fuerte del condicional siempre que éste pueda ser debilitado.

$$(A \to B)^d \to [(A \wedge \sim B) \to \sim +(A \to B)].$$

4. Semántica

Semántica de valuaciones

Una valuación fuerte v, es una función que interpreta las fórmulas atómicas y las aceptaciones fuertes de fórmulas arbitrarias como elementos del conjunto 1, 0[34], y además satisface:

V1. v(A→B)=0 ⇔ v(A)=1 y v(B)=0
V2. v(A∧B)=1 ⇔ v(A)=1 y v(B)=1
V3. v(A∨B)=0 ⇔ v(A)=0 y v(B)=0
V4. v(∼A)=1 ⇔ v(A)=0
V5. v(A^f)=0 ⇔ v(A)=1 y v(+A)=0
V6. v(A^d)=0 ⇔ v(A)=0 y v(+A)=1

Un enunciado A es válido (⊨ A) si y solamente si para toda valuación fuerte v, v(A)=1.

Se sabe que V1, ..., V4 caracterizan la Lógica Clásica, por lo que los axiomas para el condicional, para la conjunción, para la disyunción y para la negación clásica son válidos, utilizando V5 y V6 se tiene la validez de los axiomas para la aceptación fuerte, además se sabe que la regla de inferencia Modus Ponens preserva validez, se puede entonces concluir que, los teoremas de la Lógica Básica con Aceptación Fuerte son válidos. También se tiene el recíproco, por lo que, la Lógica Básica con Aceptación Fuerte esta caracterizada por la semántica de las valuaciones fuertes:

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A.$$

Este resultado permite mostrar que la aceptación y la aceptación fuerte son diferentes, probando por ejemplo que no es un teorema A→+A, para lograrlo basta verificar que no es válido, lo cual se logra con una valuación fuerte v tal que, v(A)=1 y v(+A)=0.

Tampoco son teoremas los siguientes enunciados:
∼+(A∧B)→∼+A∨∼+B, ∼+A∨∼+B→∼+(A∧B), ∼+(A∨B)→∼+A∧∼+B, ∼+A∧∼+B→∼+(A∨B), ∼+(A→B)→A∧∼+B, A∧∼+B→∼+(A→B), A→∼+∼+A, ∼+∼+A→A.

5. Retículo de consecuencias

En el diagrama 1 se resume, desde el punto de vista deductivo, la relación de implicación entre los operadores afirmación fuerte, afirmación débil, poder ser fortalecido y poder ser debilitado.

[34] v(A)=1 puede leerse como "A es verdadero", "A es aceptado". v(A)=0 puede leerse como "A es falso", "A es rechazado".

Diagrama 1

6. Conclusiones

El sistema Lógica Básica con Afirmación Fuerte, desde el punto de vista de la aceptación clásica captura todos los teoremas de la Lógica Clásica. Por otro lado, la afirmación fuerte puede verse como una generalización de la aceptación clásica, con la característica de detectar los requerimientos mínimos de debilitamiento y fortalecimiento, para las subfórmulas de un enunciado que, desde el punto de vista de la Lógica Clásica sería válido, se tiene así que el análisis de las inferencias que involucran el operador afirmación fuerte es mas fino.

References

[1] D. Batens, *A survey of inconsistency adaptive logics*, en: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J. P. van Bendegem, editors, Frontiers in Paraconsistent Logic. Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998.

[2] W. Carnielli y J. Marcos, *A Taxonomy of C-Systems*, en Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **228** (2002), 01-94. (Eds. Carnielli, W. y Coniglio, M y D'Ottaviano, I. New York, Marcel Dekker)

[3] G. Priest, Routley and J. Norman (editors). Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent. Munich: Philosophia Verlag, 1989.

[4] M. Sierra, *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica*. Revista Universidad EAFIT, no. 126 (2002).