Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IX No. 1 (2002), pp. 1–10

TOPOLOGÍA DE SCOTT PARA RELACIONES DE PREORDEN

LORENZO ACOSTA - MARCELA RUBIO(*)

Abstract. We extend the definition of Scott topology to the context of preorder relations, for which we generalize the concepts of minimal element and least upper bound. Moreover we study the behavior of this topology with regard to compactness.

Resumen. Se extiende la definición de topología de Scott al contexto de las relaciones de preorden, para lo cual se generalizan los conceptos de minimal y extremo superior. Además se estudia el comportamiento de esta topología con respecto a la compacidad.

Key words and phrases: Directed set, minimal element, preorder relation, Scott topology, Alexandrov topology, weak topology, compactness.

1. Introducción

Dada una relación de orden sobre un conjunto X, la topología de Scott σ asociada se define de la siguiente manera:

$$\sigma = \{A \subseteq X \mid A \text{ es final y } A \text{ es inaccesible por dirigidos}\}.$$

Un conjunto A es final si satisface

$$x \in A \quad \wedge \quad x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in A;$$

(*) Lorenzo Acosta, Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Marcela Rubio, Instructora Asociada del Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Becaria Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.
e-mail: lacosta@matematicas.unal.edu.co y mrubio@matematicas.unal.edu.co.

y es inaccesible por dirigidos si para todo subconjunto dirigido[1] D de X se tiene

$$\sup D \in A \Longrightarrow D \cap A \neq \emptyset.$$

La topología de Scott es importante en el estudio de los conjuntos ordenados continuos y los retículos continuos (ver [3], [4]) y en la literatura se define generalmente en el contexto de los conjuntos ordenados superiormente completos, donde todo subconjunto dirigido tiene un extremo superior. Sin embargo, su definición permite trabajarla en conjuntos ordenados arbitrarios como se hace en [2] y [6].

En este artículo presentamos la noción de topología de Scott en el contexto, más general, de las relaciones de preorden. Para poder hacerlo, debemos generalizar adecuadamente las nociones de extremo superior y de minimal de un subconjunto de un conjunto preordenado.

Una vez establecida la noción de topología de Scott para conjuntos preordenados, procedemos a extender un resultado de [2] y [6], mostrando que las topologías comprendidas entre la topología de Scott y la topología de Alexandrov asociadas a un preorden son solidarias con respecto a la compacidad (todas son compactas o ninguna es compacta).

2. Nociones previas y definiciones

Recordamos aquí las nociones de topología de Alexandrov y topología débil asociadas a una relación de preorden. Definimos también las nociones de minimal y extremo superior de un subconjunto, lo cual nos permitirá definir la topología de Scott asociada al preorden y demostrar que tiene las mismas propiedades que en el caso de las relaciones de orden.

En lo que sigue X será un conjunto no vacío y R una relación de preorden sobre X. Designaremos por $\downarrow x$ al conjunto $\{y \in X \mid y \; R \; x\}$ y por $\uparrow x$ al conjunto $\{y \in X \mid x \; R \; y\}$. Siguiendo la notación de [6], diremos que una topología τ sobre X es R-concordante, si se satisface

$$x \; R \; y \Longleftrightarrow x \in adh_\tau \{y\}$$

donde $adh_\tau A$ es la adherencia de A con respecto a la topología τ.

El conjunto de topologías sobre X que son R-concordantes tiene un máximo $\gamma(R)$ y un mínimo $\upsilon(R)$, donde $\gamma(R)$ es la topología generada por los conjuntos de la forma $\uparrow x$ y $\upsilon(R)$ es la topología generada por los conjuntos de la forma

[1] Un subconjunto no vacío D de X se llama dirigido si dados $d_1, d_2 \in D$, existe $d \in D$ tal que $d_1 \leq d$ y $d_2 \leq d$. (Puede consultarse [1], [3], [4] para ampliar esta información.)

$X \setminus \downarrow x$. $\gamma(R)$ se llama topología de Alexandrov asociada a R y $\upsilon(R)$ se conoce como la topología débil asociada a R. Así, τ es R-concordante si y solamente si $\upsilon(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$.

En la siguiente definición se amplía la noción de extremo superior de un subconjunto a conjuntos preordenados:

Definición 2.1. *Sea $D \subseteq X$. Un subconjunto Z de X se llama extremo superior de D y se nota $Z = Zup\, D$ si está constituído por los elementos $a \in X$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) *$d\ R\ a$ para todo $d \in D$.*
ii) *Si $d\ R\ b$ para todo $d \in D$ entonces $a\ R\ b$.*

Nota: Obsérvese que si la relación R es antisimétrica, el conjunto $Zup\, D$ tiene a lo sumo un elemento que es el extremo superior de D $(supD)$.

Definición 2.2. *Un elemento $m \in X$ se llama minimal de (X, R) si, para todo $y \in X$, $y\ R\ m$ implica $m\ R\ y$.*

Nota: En el caso de una relación de orden esta definición coincide con la noción tradicional de minimal.

Es bien sabido que a todo conjunto preordenado podemos asociarle un conjunto ordenado de la siguiente manera:

i) Se define sobre X la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff x\ R\ y \ \wedge \ y\ R\ x.$$

ii) Se considera el conjunto $\widetilde{X}$ de las clases de equivalencia correspondientes y se ordena por la relación

$$\overline{x}\ \widetilde{R}\ \overline{y} \iff x\ R\ y,$$

donde $\overline{x}$ es la clase de x con respecto a la relación $\sim$. Así, $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ es un conjunto ordenado.

3. La topología de Scott

En esta sección extendemos la noción de topología de Scott al contexto de los conjuntos preordenados y mostramos que ésta es una topología R-concordante.

Proposición 3.1. *El conjunto*

$$\sigma(R) = \{A \in \gamma(R) \mid (\forall D \in \mathcal{D}(X, R))(Zup\, D \cap A \neq \emptyset \Rightarrow D \cap A \neq \emptyset)\},$$

donde $\mathcal{D}(X,R)$ es la colección de los subconjuntos dirigidos de (X,R), es una topología sobre X.

Demostración:

i) $\emptyset \in \sigma(R)$, puesto que $Zup\, D \cap \emptyset = \emptyset$, para todo $D \in \mathcal{D}(X,R)$.

ii) $X \in \sigma(R)$, puesto que $D \cap X \neq \emptyset$, para todo $D \in \mathcal{D}(X,R)$.

iii) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de elementos de $\sigma(R)$ y sea $D \in \mathcal{D}(X,R)$.

$$
\begin{aligned}
Zup\, D \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \neq \emptyset &\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(Zup\, D \cap A_i) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow (\exists\ i \in I)(Zup\, D \cap A_i \neq \emptyset) \\
&\Rightarrow (\exists\ i \in I)(D \cap A_i \neq \emptyset) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(D \cap A_i) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow D \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente $\bigcup_{i\in I} A_i \in \sigma(R)$.

iv) Sean $A_1, A_2 \in \sigma(R)$ y $D \in \mathcal{D}(X,R)$.

$$
\begin{aligned}
Zup\, D \cap (A_1 \cap A_2) \neq \emptyset &\Rightarrow (Zup\, D) \cap A_1 \neq \emptyset \ \wedge\ (Zup\, D) \cap A_2 \neq \emptyset \\
&\Rightarrow D \cap A_1 \neq \emptyset \ \wedge\ D \cap A_2 \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Tomemos ahora $d_1 \in D \cap A_1$ y $d_2 \in D \cap A_2$, como D es dirigido, existe $d \in D$ tal que $d_1 R\, d$ y $d_2 R\, d$. Como A_1 y A_2 son R-finales tenemos que $d \in A_1 \cap A_2$. Por lo tanto $D \cap (A_1 \cap A_2) \neq \emptyset$ y así $A_1 \cap A_2 \in \sigma(R)$.

Definición 3.1. *Llamaremos topología de Scott asociada al preorden R a la topología $\sigma(R)$.*

Proposición 3.2. $\upsilon(R) \subseteq \sigma(R)$.

Demostración: Basta ver que un conjunto de la forma $X \backslash \downarrow x$ está en $\sigma(R)$. Como $\upsilon(R) \subseteq \gamma(R)$, tenemos que $X \backslash \downarrow x \in \gamma(R)$. Sea ahora $D \subseteq X$ dirigido tal que $Zup\, D \cap (X \backslash \downarrow x) \neq \emptyset$.
Supongamos que $D \cap (X \backslash \downarrow x) = \emptyset$, entonces $D \subseteq \downarrow x$, es decir, $d\ R\ x$, para todo $d \in D$.
Sea $m \in Zup\, D$, entonces $m\ R\ x$, es decir, $m \in \downarrow x$; de modo que $Zup\, D \subseteq \downarrow x$ pero esto no es posible.
Luego, $X \backslash \downarrow x \in \sigma(R)$.

Corolario 3.1. *$\sigma(R)$ es una topología R-concordante.*

Esto es evidente pues $\upsilon(R) \subseteq \sigma(R) \subseteq \gamma(R)$.

4. Minimales de (X, R) y minimales de $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$

Estudiamos aquí la relación existente entre los minimales del conjunto preordenado (X, R) y los minimales del conjunto ordenado cociente $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Esto nos permitirá en la siguiente sección establecer resultados sobre la compacidad de $(X, \sigma(R))$.

Proposición 4.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) *x es minimal de (X, R).*
ii) *$\overline{x}$ es minimal de $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$.*

Demostración:
a. i) $\Rightarrow$ ii): Supongamos que $\overline{x}$ no es minimal de $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Existe $\overline{y} \in \widetilde{X}$ tal que $\overline{y} \neq \overline{x}$ y $\overline{y}\ \widetilde{R}\ \overline{x}$.
Esto implica que $y\ R\ x$ pero no se tiene $x\ R\ y$. Por lo tanto x no es minimal de (X, R).
b. ii) $\Rightarrow$ i): Supongamos que x no es minimal de (X, R). Existe $y \in X$ tal que $y\ R\ x$ y no se tiene $x\ R\ y$.
Entonces $\overline{y}\ \widetilde{R}\ \overline{x}$ y $\overline{x} \neq \overline{y}$. Por consiguiente $\overline{x}$ no es minimal de $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$.

Notación: El conjunto de los minimales de (X, R) lo notaremos $Min(X, R)$ ó simplemente $MinX$ si no hay lugar a confusión.

Usando esta notación, la proposición anterior nos dice que

$$Min(\widetilde{X}, \widetilde{R}) = \{\overline{x} \mid x \in Min(X, R)\}.$$

Definición 4.1. *Decimos que (X, R) tiene suficientes minimales si para todo $x \in X$ existe $y \in Min(X, R)$ tal que $y\ R\ x$.*

Corolario 4.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) *(X, R) tiene suficientes minimales.*
ii) *$(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ tiene suficientes minimales.*

5. Compacidad y topología de Scott

En esta sección se extienden los resultados de [2] y [6], válidos para relaciones de orden y espacios topológicos T_0, al contexto de las relaciones de preorden y espacios topológicos arbitrarios.

Proposición 5.1. *Sea τ una topología sobre X tal que $\upsilon(R) \subseteq \tau$.*
Si (X, R) no tiene suficientes minimales entonces (X, τ) no es compacto.

Demostración: Como (X,R) no tiene suficientes minimales, por el Corolario 4.1, $(\widetilde{X},\widetilde{R})$ tampoco los tiene. El Lema de Zorn nos permite afirmar que existe una cadena $\{\overline{x_i}\}_{i\in I}$ en $(\widetilde{X},\widetilde{R})$ que no tiene cotas inferiores. El conjunto $\{\downarrow x_i\}_{i\in I}$ es una colección de cerrados de τ (pues $\upsilon(R)\subseteq\tau$) que tiene la propiedad de intersección finita. Sin embargo,

$$\begin{aligned} y\in \bigcap_{i\in I}\downarrow x_i &\Leftrightarrow\ y\,R\,x_i \text{ para todo } i\in I\\ &\Rightarrow\ \overline{y}\,\widetilde{R}\,\overline{x_i} \text{ para todo } i\in I\\ &\Rightarrow\ \overline{y} \text{ es cota inferior de } \{\overline{x_i}\}_{i\in I}. \end{aligned}$$

Concluímos que $\bigcap\limits_{i\in I}\downarrow x_i=\emptyset$ y así (X,τ) no es compacto.

Proposición 5.2. *Sea τ una topología sobre X tal que $\tau\subseteq\gamma(R)$. Si existen $x_1,x_2,...,x_n\in Min(X,R)$ tales que $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\uparrow x_i$ entonces (X,τ) es compacto.*

Demostración: Sea $\{U_j\}_{j\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces $x_i\in U_{ji}$ para cada $i\in\{1,2,...,n\}$, donde $U_{ji}\in\tau\subseteq\gamma(R)$. Como $\uparrow x_i\subseteq U_{ji}$ para cada $i\in\{1,2,...,n\}$ se obtiene

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}\uparrow x_i\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}U_{ji}\subseteq X,$$

luego (X,τ) es compacto.

Proposición 5.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $(X,\gamma(R))$ *es compacto.*

ii) *Existen* $x_1,x_2,...,x_n\in Min(X,R)$ *tales que* $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\uparrow x_i$.

Demostración:

a. i) $\Rightarrow$ ii): Como $(X,\gamma(R))$ es compacto entonces, por la Proposición 5.1, (X,R) tiene suficientes minimales. Por consiguiente $X=\bigcup\limits_{i\in I}\uparrow x_i$ donde $Min(X,R)=\{x_i\mid i\in I\}$.
Puesto que $\uparrow x_i\in\gamma(R)$, se tiene que $\{\uparrow x_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\gamma(R)$, así existen $x_1,x_2,...,x_n\in Min(X,R)$ tales que $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\uparrow x_i$.

b. ii) $\Rightarrow$ i): Se obtiene de la Proposición 5.2.

Nota: François Lorrain caracteriza la compacidad de las topologías de Alexandrov por la existencia de un subconjunto finito y denso en X con respecto a la topología de cerrados (puede consultarse [5]). En [6] se muestra que si este espacio de Alexandrov es T_0 un tal subconjunto es el conjunto de puntos cerrados, es decir, el conjunto de minimales de X con respecto al orden de especialización. La Proposición 5.3 nos muestra cómo puede tomarse el conjunto del que habla Lorrain en el caso de una topología de Alexandrov arbitraria.

Proposición 5.4. *Sea D un subconjunto dirigido de X . Si $D \subseteq Min(X,R)$, entonces:*

i) $d_1, d_2 \in D \Rightarrow \downarrow d_1 = \downarrow d_2$.
ii) $D \subseteq Zup\, D$.
iii) $Zup\, D = \downarrow d$ *para cada* $d \in D$.

Demostración:

i) $d_1, d_2 \in D \Rightarrow (\exists\, d \in D)(d_1 R\, d \;\wedge\; d_2 R\, d) \Rightarrow\; d\; R\; d_1 \;\wedge\; d\; R\; d_2$ (porque $d \in D \subseteq Min(X,R)) \Rightarrow d_1\; R\; d_2 \;\wedge\; d_2\; R\; d_1$.
Así,

$$\begin{aligned} x \in \downarrow d_1 &\Leftrightarrow xRd_1 \\ &\Leftrightarrow xRd_2 \\ &\Leftrightarrow x \in \downarrow d_2. \end{aligned}$$

ii) Sea $d \in D$, por la parte i) se tiene que $e\; R\; d$ para todo $e \in D$. Si $m \in X$ es tal que $e\; R\; m$ para todo $e \in D$, en particular $d\; R\; m$. Luego $d \in Zup\, D$.

iii) Sean $x \in Zup\, D$ y $d \in D$. Entonces $e\; R\; x$, para todo $e \in D$ y en particular $d\; R\; x$. Como $e\; R\; d$ para todo $e \in D$, se tiene que $x\; R\; d$ (pues $x \in Zup\, D$). Así $x \in \downarrow d$.
Por otro lado, sean $d \in D$ y $x \in \downarrow d$. Por la parte i) se tiene $x\; R\; d\; R\; e$ para todo $e \in D$, de modo que $e\; R\; x$ para todo $e \in D$ (pues $D \subseteq Min(X,R)$).
Si $m \in X$ es tal que $e\; R\; m$ para todo $e \in D$, se tiene $x\; R\; m$ y por lo tanto, $x \in Zup\, D$.

Lema 5.1. $x \in Min(X,R) \;\Rightarrow\; \downarrow x \subseteq Min(X,R)$.

Demostración: Sean $y \in \downarrow x$ y $m \in X$.

$$\begin{aligned} m\,R\,y \Rightarrow\;& m\,R\,x \\ \Rightarrow\;& x\,R\,m \text{ (ya que } x \in Min(X,R)) \\ \Rightarrow\;& y\,R\,m. \end{aligned}$$

Luego $y \in Min(X,R)$.

Proposición 5.5. *Si $(X, \sigma(R))$ es compacto entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n \in Min(X,R)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow x_i$.*

Demostración: Como $(X, \sigma(R))$ es compacto entonces (X, R) tiene suficientes minimales y $Min(X, R) \neq \emptyset$.
Para cada $y \in Min(X, R)$ se define $A_y = (X \backslash Min(X, R)) \cup \downarrow y$.

Veamos que $A_y \in \sigma(R)$:

i) $A_y \in \gamma(R)$: Sean $m, n \in X$ tales que $m \in A_y \ \wedge \ m\ R\ n$.

a) $m \in \downarrow y \Rightarrow m\ R\ y$
$\Rightarrow y\ R\ m$ (ya que y es minimal)
$\Rightarrow y\ R\ n$.
Si n no es minimal entonces $n \in (X \backslash Min(X, R)) \subseteq A_y$.
Si n es minimal entonces $n\ R\ y$, de modo que $n \in \downarrow y \subseteq A_y$.

b) Si $m \in X \backslash Min(X, R)$ entonces m no es minimal y existe $p \in X$ tal que $p\ R\ m$ y no se tiene $m\ R\ p$.
Como $m\ R\ n$ entonces $p\ R\ n$.
Si $n\ R\ p$ entonces $m\ R\ p$, lo cual no es posible; entonces no se tiene $n\ R\ p$, así n no es minimal, de modo que $n \in (X \backslash Min(X, R)) \subseteq A_y$.
Luego $n \in A_y$.

ii) Sea D un subconjunto dirigido de X y supongamos que $D \cap A_y = \emptyset$, entonces $D \subseteq Min(X, R) \backslash \downarrow y$.

Veamos que $Zup\, D \cap A_y = \emptyset$: Sea $m \in Zup\, D \cap A_y$, como $Zup\, D \subseteq Min(X, R)$ (Prop. 5.4 y Lema 5.1) entonces $m \in \downarrow y \cap Zup\, D$. Como $d\ R\ m$ para todo $d \in D$, se tiene que $d\ R\ y$ para todo $d \in D$, de donde $D \subseteq \downarrow y \subseteq A_y$, lo cual es contradictorio.

Es claro que $X = \cup\{A_y \mid y \in Min(X, R)\}$, así $\{A_y \mid y \in Min(X, R)\}$ es un cubrimiento de X por abiertos de $\sigma(R)$. Luego existen $x_1, x_2, ..., x_n \in Min(X, R)$ tales que $X = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_{x_i}$.

Finalmente veamos que $X = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \uparrow x_i$:

Sea $x \in X$. Como X tiene suficientes minimales, existe $y \in Min(X, R)$ tal que $y\ R\ x$.

Además,

$$
\begin{aligned}
y \in A_{x_i} \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} &\Rightarrow y \in \downarrow x_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} \\
&\Rightarrow y\, R\, x_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} \\
&\Rightarrow x_i\, R\, y \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ (pues } \\
&\quad\ x_i \in Min(X, R)) \\
&\Rightarrow y \in \uparrow x_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} \\
&\Rightarrow x \in \uparrow x_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\} \\
&\Rightarrow x \in \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \uparrow x_i.
\end{aligned}
$$

Corolario 5.1. *Sea* τ *una topología sobre* X *tal que* $\sigma(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$. El espacio (X, τ) *es compacto si y sólo si existen* $x_1, x_2, ..., x_n \in Min(X, R)$ *tales que* $X = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow x_i$.

Demostración: Es consecuencia de las Proposiciones 5.2, 5.3 y 5.5.

Proposición 5.6. $(X, \gamma(R))$ *es compacto si y sólo si* $(\widetilde{X}, \gamma(\widetilde{R}))$ *es compacto.*

Demostración: $\Rightarrow$) Como $(X, \gamma(R))$ es compacto entonces (X, R) tiene suficientes minimales y por tanto, $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ tiene suficientes minimales.
Además existen $x_1, x_2, ..., x_n \in Min(X, R)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow x_i$.
Sea $\overline{x} \in \widetilde{X}$, se tiene que $x \in X$ y existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in \uparrow x_i$, es decir, $x_i \; R \; x$, de modo que $\overline{x_i} \; \widetilde{R} \; \overline{x}$ y $\overline{x} \in \uparrow \overline{x_i}$.
Esto demuestra que $\widetilde{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow \overline{x_i}$, lo cual implica que $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ tiene finitos minimales. En conclusión, $(\widetilde{X}, \gamma(\widetilde{R}))$ es compacto[2].
$\Leftarrow$) Como $(\widetilde{X}, \gamma(\widetilde{R}))$ es compacto entonces $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ tiene finitos y suficientes minimales, llamémoslos $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$. Entonces $x_1, x_2, ..., x_n$ son minimales en (X, R).
Sea $x \in X$, de modo que $\overline{x} \in \widetilde{X}$ y por la observación anterior existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\overline{x_i} \; \widetilde{R} \; \overline{x}$; así $x_i \; R \; x$ y $x \in \uparrow x_i$. Luego, $X = \bigcup_{i=1}^{n} \uparrow x_i$ y $(X, \gamma(R))$ es compacto.

Corolario 5.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1) $(X, \sigma(R))$ *es compacto.*
2) $(X, \gamma(R))$ *es compacto.*
3) $(\widetilde{X}, \gamma(\widetilde{R}))$ *es compacto.*
4) $(\widetilde{X}, \sigma(\widetilde{R}))$ *es compacto.*

6. Ejemplos

En esta sección se presentan dos ejemplos sencillos que ilustran algunos de los conceptos mencionados en el presente artículo.

Ejemplo 1.

Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$ y R la menor relación de pre-orden generada por: $a \; R \; b$, $b \; R \; a$, $c \; R \; d$, $d \; R \; c$, $a \; R \; d \; R \; e$, $b \; R \; c \; R \; e$. Como X es finito, toda topología sobre X es compacta y se verifica que $X = \uparrow a$, donde $a \in Min(X, R) = \{a, b\}$; $\downarrow a = \{a, b\} = \downarrow b$.

[2] Puede consultar [6], allí se demostró que para una relación R de orden sobre X, si $\sigma(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$ entonces (X, τ) es compacto ssi (X, R) tiene finitos y suficientes minimales.

$D = \{a, b, d\}$ es un conjunto dirigido tal que $Zup\, D = \{d, c\}$.
$\widetilde{X} = \{\overline{a}, \overline{d}, \overline{e}\}$ donde $\overline{a} = \overline{b}$, y, $\overline{d} = \overline{c}$.
$Min(\widetilde{X}, \widetilde{R}) = \{\ \overline{a}\}$ donde $\downarrow \overline{a} = \{\ \overline{a}\}$.

Ejemplo 2.

Sean $X = \mathbb{N} \cup \{0, w\}$, donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales, y R la relación de pre-orden definida por:

i) $x\ R\ x$, para todo $x \in X$.
ii) $x\ R\ w$, para todo $x \in X$.
iii) $2n\ R\ (2n+1)\ R\ (2n+2)$, y, $(2n+2)\ R\ (2n+1)\ R\ 2n$ para n par, $n \geq 0$.

$Min(X, R) = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $D = \{4, 5\}$ es un conjunto dirigido en X, $D \subseteq Min(X, R)$, y $Zup\, D = \{4, 5, 6\} \supsetneqq D$.

$A = \{3, 4\} \subseteq Min(X, R)$, pero A no es un conjunto dirigido.

$\downarrow w = X$, $\downarrow 3 = \{3\}$, $\downarrow 4 = \{4, 5, 6\}$, para $x \in \mathbb{N}$, $\downarrow x$ contiene uno ó tres elementos, de modo que $\upsilon(R)$ está contenida en la topología de complementos finitos, luego es compacta. Por otra parte, $\gamma(R)$ no es compacta puesto que $\{\uparrow x \mid x \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento de X por abiertos de $\gamma(R)$ que no puede reducirse a uno finito, sin embargo (X, R) tiene suficientes minimales.

Bibliografía

[1] L. Acosta, *Topologías consistentes*, Boletín de Matemáticas **V** no. 1 (1998), 15–26.

[2] L. Acosta, E. Lozano, *Una caracterización de las topologías compactas* T_0, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, **VI** no. 2 (1999), 77–84.

[3] G. Gierz, et al., *A compendium of continuous lattices*, Spinger Verlag, New York, 1980.

[4] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[5] F. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimun neighborhoods*, Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 616–627.

[6] E. Lozano, *Sobre algunas topologías concordantes*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, 2000.