Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 2 (2003), pp. 110–129

FORMAS DE DIRICHLET Y PROCESOS DE MARKOV

CARLOS FERNANDO MORA ESPINOSA (*)

Resumen. Lo que se pretende en este artículo es relacionar las formas de Dirichlet y los procesos de Markov de manera analítica y probabilística. Se encuentran Procesos de Markov fuertes y movimientos Brownianos en espacios de dimensión infinita a través de las formas de Dirichlet.

Abstract. What is sought in this article is to relate the Dirichlet forms and the Markov processes in an analytic and probabilistic way. Strong Markov processes and Brownian movements are found in infinite dimensional spaces by means of Dirichlet forms.

Palabras clave: Formas de Dirichlet, Procesos de Markov, Movimientos Brownianos.

Key Words: Dirichlet forms, Markov processes, Brownian movements.

Matematics Subject Classifications: 60J65, 58J65.

1. Introducción

Las formas de Dirichlet son una herramienta muy útil en el análisis estocástico, sobre todo cuando el espacio de estados es infinito dimensional. Una forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es un objeto analítico que puede servir para construir y estudiar ciertos procesos de Markov. La teoría de las formas de Dirichlet y los procesos de Markov está basada en la interacción de la teoría del análisis funcional y de la probabilidad.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno (u, v) con $u, v \in \mathcal{H}$ y norma

$$||u|| := (u, u)^{1/2}, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{H}$$

y sean $\mathcal{D}$ un subespacio lineal de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{E} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal.

(*) Carlos Fernando Mora Espinosa, Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
e-mail: cfmorae@unal.edu.co.

Definimos la parte simétrica de $\mathcal{E}$ por

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) := \frac{1}{2}\left[\mathcal{E}(u,v) + \mathcal{E}(v,u)\right], \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{D}.$$

Para $\alpha \geq 0$ definimos

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + \alpha(u,v), \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{D}.$$

Si $\mathcal{E}(u,u) \geq 0$ para todo $u \in D(\mathcal{E})$, entonces para $\alpha \geq 0$ definimos una norma sobre $\mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$$||u||_\alpha := \widetilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,u)^{1/2} = \mathcal{E}_\alpha(u,u)^{1/2}.$$

Definición 1.1. *Una forma bilineal $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{H}$ se dice que es simétrica cerrada si:*

(i) *$D(\mathcal{E})$ es denso en $\mathcal{H}$.*
(ii) *$\mathcal{E}$ es simétrica, es decir, $\mathcal{E} = \widetilde{\mathcal{E}}$.*
(iii) *$\mathcal{E}$ es cerrada, es decir, $D(\mathcal{E})$ es completo con la norma $|| \cdot ||_1$,*

Definición 1.2. *Una forma bilineal $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{H}$ se dice que es coerciva cerrada si:*

(i) *$D(\mathcal{E})$ es denso en $\mathcal{H}$.*
(ii) *$\widetilde{\mathcal{E}}$ es una forma simétrica cerrada.*
(iii) *$\mathcal{E}$ satisface la condición sector débil, es decir, existe una constante $k > 0$ tal que*

$$|\mathcal{E}_1(u,v)| \leqslant k||u||_1||v||_1 \quad \text{para todo } u, v \in D(\mathcal{E}).$$

Ejemplo 1.3. *Sea $d \geq 3$, $E := U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto $m = dx$ la medida de Lebesgue en U, $a_{ij} \in C_0^\infty(U)$ (el conjunto de todas la funciones infinitamente diferenciables sobre U con soporte compacto), $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = a_{ji}$. Definamos*

$$\mathcal{E}_A(u,v) := \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij}\, dx \quad u, v \in C_0^\infty(U),\ a_{ij} \in L^1.$$

Supongamos que se tienen las siguientes condiciones:

(i) *Existe $r \in (0, \infty)$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq r\|\zeta\|^2_{\mathbb{R}^d} \quad \text{para todo } \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^d$$

(ii) *Existe $M \in (0, +\infty)$ tal que*

$$|a_{ij}| \leqslant M \quad \text{para todo } 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

$(\mathcal{E}_A, D(\mathcal{E}_A))$ *es una forma coerciva cerrada, en efecto, obsérvese que*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_A(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij}\ dx \\
&= \int \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij}\ dx \\
&= \int \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ij}\ dx
\end{aligned}
$$

y por la desigualdad de Cauchy Schwartz y la condición (ii) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_j}\ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ij}\right| &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}a_{ij}\right)^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \left\{\sum_{j=1}^{d}\left[\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{d}(a_{ij})^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \left\{\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{d}(a_{ij})^2\right)\right\}^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij})^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant dM \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

por otro lado, la condición (i) implica que

$$
\mathcal{E}_A(u,u) = \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ij}\ dx \geq r \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \qquad \textit{para todo } u \in C_0^\infty(U),
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{E}_A(u,v)| &\leqslant dM \int \left(\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2} dx \\
&\leqslant dM \left(\int \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
&= dM \left(\sum_{j=1}^{d} \int \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{d} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \\
&\leqslant \frac{dM}{r} \mathcal{E}_A(u,u)^{1/2} \mathcal{E}_A(v,v)^{1/2},
\end{aligned}
$$

de esta manera $(\mathcal{E}_A, D(\mathcal{E}_A))$ *es coerciva cerrada.*

2. Formas de Dirichlet

Consideremos un espacio topológico de Hausdorff E, $\mathfrak{B}(E)$ la σ-álgebra de Borel sobre E, m una medida σ-finita sobre el espacio medible $(E, \mathfrak{B}(E))$ y supongamos que $\mathcal{H} := L^2(E, \mathfrak{B}(E), m)$, es decir, $\mathcal{H}$ es el conjunto de las funciones $\mathfrak{B}(E)$-medibles de cuadrado integrable respecto de la medida m.

Denotaremos por

$$u \vee v := \sup(u,v), \quad u \wedge v := \inf(u,v), \quad u^+ := u \vee 0, \quad u^- := -(u \wedge 0).$$

Definición 2.1. *Una forma coerciva cerrada* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *sobre* $L^2(\mathcal{E}, m)$ *se dice que es una forma de Dirichlet si para todo* $u \in D(\mathcal{E})$ *se tiene que:*

(i) $u^+ \wedge 1 \in D(\mathcal{E})$,
(ii) $\mathcal{E}(u + u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1) \geq 0$,
(iii) $\mathcal{E}(u - u^+ \wedge 1, u + u^+ \wedge 1) \geq 0$.

Definición 2.2. *Se dice que una función* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una contracción normal si* $T(0) = 0$ *y* $|T(s) - T(t)| \leqslant |s - t|$ *para todo* $s, t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3. *Sea* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *una forma simétrica cerrada sobre* $L^2(E, m)$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *es una forma de Dirichlet.*

(ii) *Para cada* $u \in D(\mathcal{E})$ *y para cada* $\epsilon > 0$ *existe una aplicación* $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow [-\epsilon, 1+\epsilon]$ *tal que* $\varphi_\epsilon(t) = t$ *para todo* $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \varphi_\epsilon(t_2) - \varphi_\epsilon(t_1) \leqslant t_2 - t_1$ *siempre que* $t_1 \leqslant t_2$, $\varphi_\epsilon \circ u \in D(\mathcal{E})$ *y* $\liminf_{\epsilon \to 0} \mathcal{E}(u \pm \varphi_\epsilon \circ u, u \mp \varphi_\epsilon \circ u) \geq 0$.

(iii) *Para cada contracción normal* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *se tiene que* $T(u) \in D(\mathcal{E})$ *y*

$$\mathcal{E}(T(u), T(u)) \leqslant \mathcal{E}(u,u) \quad \textit{para todo } u \in D(\mathcal{E}).$$

(iv) *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *y* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$|T(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad y \quad |T(x) - T(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

para todo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces para todo* $u_1, \cdots, u_n \in D(\mathcal{E})$ *se tiene que* $T(u_1, \cdots, u_n) \in D(\mathcal{E})$ *y*

$$\mathcal{E}(T(u_1, \cdots, u_n), T(u_1, \cdots, u_n))^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}(u_k, u_k)^{1/2}.$$

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 80. □

Definición 2.4. *Para una medida positiva de Radon* μ, *se define el soporte de* μ *como el conjunto cerrado más pequeño* F *para el cual* $|\mu|(F^c) = 0$, *donde* $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. *Denotaremos el soporte de* μ *por* $Supp(\mu)$.

Ejemplo 2.5. *Sea* $I = (a,b)$ *con* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Sean* m *y* k *medidas positivas de Radon sobre* I *con* $Supp(m) = I$. *Sean*

$$D(u,v) := \int_a^b \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \, dx,$$

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}} := \{u \in L^2(I;m) \cap L^2(I;k) : u \text{ es absolutamente continua} \quad y \; D(u,u) < \infty\}.$$

Si definimos

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{1}{2} D(u,v) + \int_a^b u(x)v(x) \, k(dx)$$

con $D(\mathcal{E}) = \mathcal{F}^{\mathbb{R}}$, *entonces* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *es una forma de Dirichlet sobre* $L^2(I;m)$.

En efecto, si definimos $\varphi_\epsilon(t) := ((-\epsilon) \vee t) \wedge (1+\epsilon)$ *para todo* $\epsilon > 0$ *y para todo* $t \in \mathbb{R}$, *entonces* $\varphi_\epsilon(t)$ *es una contracción normal, la afirmación* (iii) *del teorema anterior implica que* $\mathcal{E}(u,v)$ *es una forma de Dirichlet.*

Para $U \subseteq E$ abierto, denotamos por U^c el complemento de U y definimos

$$D(\mathcal{E})_{U^c} = \{u \in D(\mathcal{E}) : u = 0 \text{ c.s en } U\}.$$

Definición 2.6. *Una sucesión creciente $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de E se dice que es $\mathcal{E}$-anidada si $\bigcup_{k\geq 1} D(\mathcal{E})_{F_k}$ es denso en $D(\mathcal{E})$ respecto de $||\cdot||_1$.*

Definición 2.7. *Un subconjunto $N \subseteq E$ se dice que es $\mathcal{E}$-excepcional si $N \subseteq \bigcap_{k\geq 1} F_k^c$ para alguna sucesión $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}$-anidada.*

Dada una sucesión $\mathcal{E}$-anidada $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definimos

$$C(\{F_k\}) := \left\{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid \bigcup_{k\geq 1} F_k \subseteq A \subseteq E,\ f|_{F_k} \text{ es continua para cada } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Definición 2.8. *Una función f sobre E se dice $\mathcal{E}$-quasicontinua si existe una sucesión de conjuntos $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}$-anidada tal que $f \in C(\{F_k\})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.9. *Si consideramos la forma bilineal coerciva cerrada dada en el ejemplo 1.3, entonces para el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^d$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F tal que $m(U\backslash F) < \epsilon$, en particular, existe una sucesión creciente de conjuntos compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $K_n = \{u \in U : \|x\| \leqslant n,\ d(x, U^c) \geq 1/n\}$, el interior del conjunto K_n denotado por K_n° satisface que $K_{n-1} \subseteq K_n^\circ$ y $\bigcup_{k\geq 1} K_n = U$. Por lo tanto $\bigcup_{n\geq 1} D(\mathcal{E})_{K_n}$ es denso en $D(\mathcal{E}) = C_0^\infty(U)$ ya que*

$$D(\mathcal{E})_{K_n} = \{u \in D(\mathcal{E}) : u = 0 \ c.s \ en \ K_n^c\}$$

y si $u \in D(\mathcal{E})$ podemos definir una sucesión de funciones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\bigcup_{n\geq 1} D(\mathcal{E})_{K_n}$ así:

$$u_n(x) := \begin{cases} u(x) & si\ x \in K_{n-1} \\ 0 & si\ x \in K_n^c. \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_1 &= \mathcal{E}_A(u - u_n, u - u_n) + (u - u_n, u - u_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial(u - u_n)}{\partial x_i} \frac{\partial(u - u_n)}{\partial x_j} a_{ij}\ dx + (u - u_n, u - u_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\{\|x\|>n\}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij}\ dx + (u - u_n, u - u_n), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\|u - u_n\|_1$ tiende a 0 cuando n tiene a infinito. De esta manera la sucesión de conjuntos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{E}$-anidada.

Ahora sea A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $U \subseteq A$ y sea $h > 0$ fijo y supongamos que $U = \mathbb{R}^2 \backslash B_h(0,0)$. Obsérvese que si definimos la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x, y \in U,$$

entonces f es continua en U y además $f \in C(\{K_n\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir f es $\mathcal{E}$-quasicontinua.

Definición 2.10. *Una sucesión $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}$-anidada se dice regular si para todo $k \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq E$, U abierto, $m(U \cap F_k) = 0$ implica que $U \subseteq F_k^c$.*

Definición 2.11. *Una forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ sobre $L^2(E; m)$ se dice que es quasi-regular si:*

(i) *Existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}$-anidada de conjuntos compactos.*
(ii) *Existe un subconjunto denso W de $D(\mathcal{E})$ respecto de $||\cdot||_1$ tal que para cada $w \in W$, w tiene una m-versión $\widetilde{w}$ que es $\mathcal{E}$-quasi continua.*
(iii) *Existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(\mathcal{E})$ que tiene una m-versión $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto $\mathcal{E}$-excepcional $N \subseteq E$ tal que $\{\tilde{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ separa puntos de $E \backslash N$.*

Denotaremos por $B(E)$ al espacio vectorial de todas las funciones de valor real que son $\mathfrak{B}(E)$-medibles y acotadas sobre E con la norma $||f|| = \sup_{x\in E} |f(x)|$.

Definición 2.12. *Una probabilidad de transición es una función $P(s, x, t, B)$ con $s, t \geq 0$, $x \in E$ y $B \in \mathfrak{B}(E)$ que satisface lo siguiente:*

(i) *Para todo $s \leqslant t$, fijando $x \in E$, $P(s, x, t, \cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{B}(E)$.*
(ii) *Para todo $s \leqslant t$, fijando $B \in \mathfrak{B}(E)$, $P(s, \cdot, t, B)$ es una función $\mathfrak{B}(E)$-medible sobre E.*
(iii) *Para cada $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t$, $x \in E$, $B \in \mathfrak{B}(E)$,*

$P(s, x, t, B) = \int_E P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy)$. *(Ecuación de Chapman-Kolmogorov)*

Un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ es homogéneo con respecto al tiempo si la probabilidad de transición es estacionaria, es decir, para todo $s \leqslant t$

$$P(s, x, t, B) = P(0, x, t - s, B).$$

En este caso se denota por $P(t, x, B)$ y se interpreta como la probabilidad de que $X_t \in B$ dado que $X_0 = x$ en el tiempo t, esto es,

$$P(X_t \in B/X_0 = x) := P(t, x, B)$$

para $t \geq 0$ y $B \in \mathfrak{B}(E)$.

Definición 2.13. *En un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0})$*, una variable aleatoria* $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{\infty\}$ *se le llama* $\mathfrak{F}_t$*-tiempo de paro si*

$$\{w \in \Omega : \tau(w) \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$$

para cada $t \in T$*.*

Definición 2.14. *Se dice que un* $\mathfrak{F}_t$*-proceso de Markov* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es un* $\mathfrak{F}_t$*-proceso de Markov fuerte si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Para cada* $t \geq 0$*,* X_t *es* $\mathfrak{F}_t$*-progresivamente medible, es decir, si la aplicación* $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *restrigida a* $[0, t] \times \Omega$ *y definida por* $X_s(w)$ *es medible respecto de la* σ*-álgebra* $\mathfrak{B}([0, \infty)) \otimes \mathfrak{F}_t$*-*$\mathfrak{B}$*, donde* $\mathfrak{B}$ *es la* σ*-álgebra de Lebesgue.*

(ii) *Si para cada* $\mathfrak{F}_t$*-tiempo de paro* τ *y para cada* $t \geq 0$*, la probabilidad de que* $X_{\tau+t} \in B$ *dada la* σ*-álgebra* $\mathfrak{F}_t$ *coincide con la probabilidad de transición asociada al proceso* $P(t, X_\tau, B)$*, es decir, la probabilidad de que* $X_\tau \in B$ *dado que* $X_0 = x$ *en el tiempo* t*, esto es,*

$$P[X_{\tau+t} \in B \mid \mathfrak{F}_\tau] = P(t, X_\tau, B), \quad B \in \mathfrak{B}(E).$$

Si la aplicación $t \to X_t(w)$ *es continua por la derecha sobre* $[0, \infty)$*, se dice que el proceso es continuo por la derecha.*

3. Resolventes y Semigrupos

Sea B un espacio de Banach.

Definición 3.1. *Se dice que una familia* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ *de operadores lineales en* B *con* $D(G_\alpha) = B$ *para todo* $\alpha > 0$ *es un resolvente de contracciones fuertemente continuo en* B *si:*

(i) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u = u$*, para todo* $u \in B$*.*

(ii) αG_α *es una contracción en* B*, para todo* $\alpha > 0$*.*

(iii) $G_\alpha - G_\beta = (\beta - \alpha) G_\alpha G_\beta$, *para todo* $\alpha, \beta > 0$.

Definición 3.2. *Sea* $T : D(T) \longrightarrow B$ *un operador lineal con* $D(T) \subseteq B$. *Se dice que* T *es densamente definido si la adherencia del dominio de* T *es* B, *es decir,* $\overline{D(T)} = B$. *El resolvente de* T *es el conjunto definido por*

$$\rho(T) := \{\alpha \in \mathbb{C} : (\alpha - T)^{-1} \text{ existe, es densamente definido, y acotado}\}.$$

Definición 3.3. *Se dice que una familia* $(T_t)_{t>0}$ *de operadores lineales en* B *con* $D(T_t) = B$ *para todo* $t > 0$ *es un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en* B *si:*

(i) $\lim_{t\to 0} T_t u = u$, *para todo* $u \in B$ *(continuidad fuerte).*

(ii) T_t *es una contracción en* B, *para todo* $t > 0$.

(iii) $T_t T_s = T_{t+s}$, *para todo* $t, s > 0$ *(propiedad de semigrupo).*

Definición 3.4. *Sea* $(T_t)_{t>0}$ *un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en* B *y sea* T *el operador definido por*

$$T(u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(T_t u - u \right), \quad u \in D(T), \text{ donde}$$

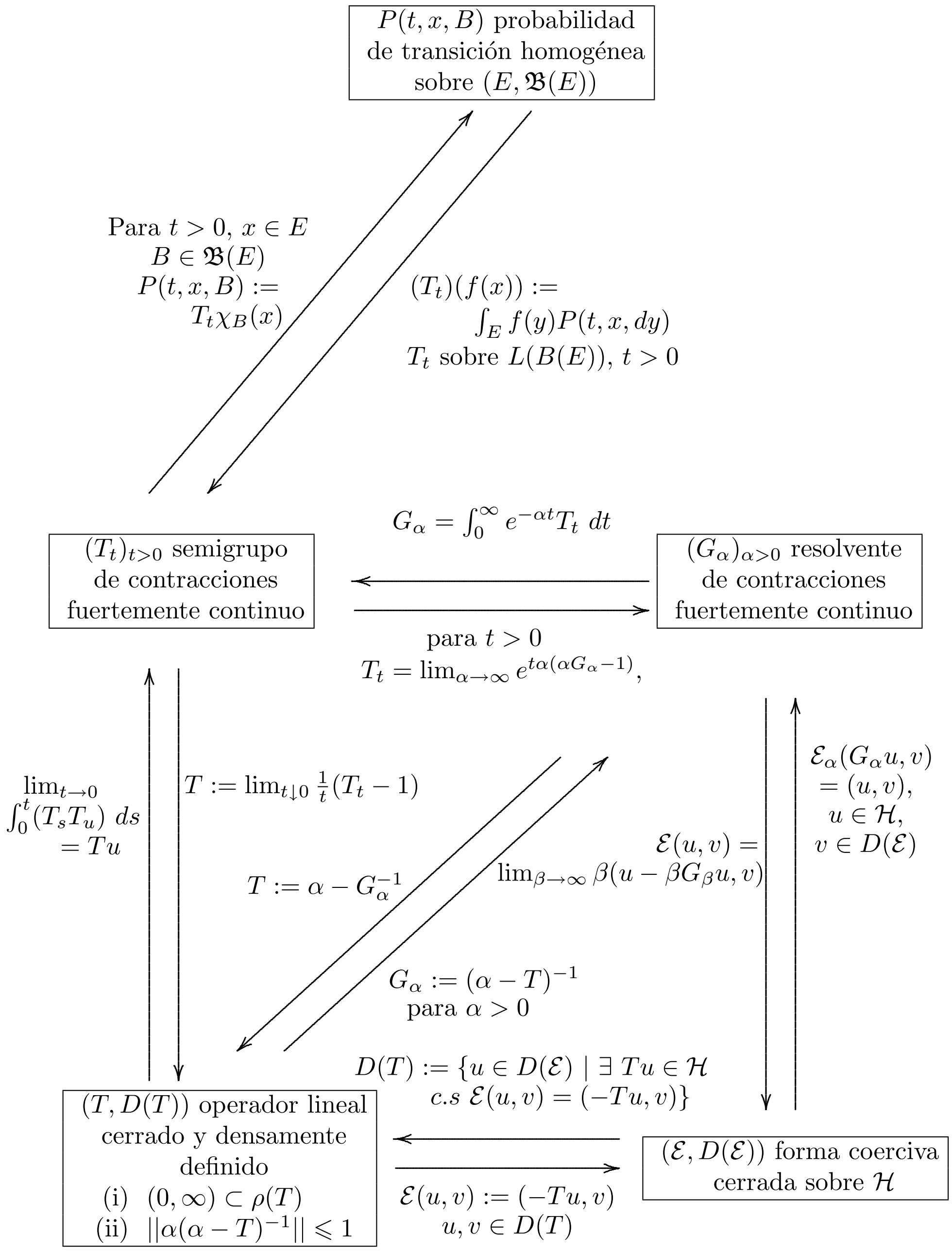
$$D(T) = \left\{ u \in B \ : \ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(T_t u - u \right) \text{ existe} \right\}.$$

El operador T así definido se le llama el generador infinitesimal del semigrupo de contracciones fuertemente continuo $(T_t)_{t>0}$.

Definimos el conjunto

$$L(B(E)) := \{T : B(E) \longrightarrow B(E) \mid T \text{ es lineal y continuo}\}.$$

El siguiente diagrama relaciona, las formas coercivas cerradas, las probabilidades de transición y las familias de operadores lineales de contracciones fuertemente continuos (resolventes y semigrupos). Véase [8] páginas 14 y 27 y [10] teoremas 3.24 página 41.


$P(t,x,B)$ probabilidad de transición homogénea sobre $(E,\mathfrak{B}(E))$
Para $t>0$, $x\in E$ $B\in\mathfrak{B}(E)$ $P(t,x,B):= T_t\chi_B(x)$
$(T_t)(f(x)) := \int_E f(y)P(t,x,dy)$ T_t sobre $L(B(E))$, $t>0$
$G_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t\ dt$
$(T_t)_{t>0}$ semigrupo de contracciones fuertemente continuo
$(G_\alpha)_{\alpha>0}$ resolvente de contracciones fuertemente continuo
para $t>0$ $T_t = \lim_{\alpha\to\infty} e^{t\alpha(\alpha G_\alpha - 1)}$,
$\lim_{t\to 0} \int_0^t (T_sT_u)\ ds = Tu$
$T := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t - 1)$
$\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha u, v) = (u,v)$, $u\in\mathcal{H}$, $v\in D(\mathcal{E})$
$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_\beta u, v)$
$T := \alpha - G_\alpha^{-1}$
$G_\alpha := (\alpha - T)^{-1}$ para $\alpha>0$
$D(T) := \{u\in D(\mathcal{E}) \mid \exists\ Tu\in\mathcal{H}$ c.s $\mathcal{E}(u,v) = (-Tu,v)\}$
$(T,D(T))$ operador lineal cerrado y densamente definido
(i) $(0,\infty)\subset\rho(T)$
(ii) $||\alpha(\alpha-T)^{-1}||\leqslant 1$
$\mathcal{E}(u,v) := (-Tu,v)$ $u,v\in D(T)$
$(\mathcal{E},D(\mathcal{E}))$ forma coerciva cerrada sobre $\mathcal{H}$

Ejemplo 3.5. *Consideremos el proceso* $(W_t)_{t\geq 0}$ *del movimiento Browniano, que es un* $\mathfrak{F}_t$*-proceso de Markov fuerte en el espacio* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$*. Las probabilidades de transición están definidas como*

$$P(t,x,B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_B exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy.$$

Véase [10] *página 37 y* [5] *páginas 48 y 49.*
Definimos el semigrupo de contracciones fuertemente continuo $(T_t)_{t>0}$ *por*

$$(T_t f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) P(t,x,dy),$$

y a partir de él definimos el operador infinitesimal

$$Tf = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t f - f), \quad f \in D(T),$$

donde $D(T)$ *es el conjunto de funciones acotadas de* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *para los cuales existe el límite.*

Tf *se interpreta como el promedio de la tasa de cambio infinitesimal de* $f(X_s)$ *dado que* $X_s = x$*.* T *es en general un operador lineal cerrado no acotado. Si las probabilidades de transición son estocásticamente continuas, entonces* $P(t,x,B)$ *se puede definir por medio de* T *en forma única. En particular un proceso de Markov con trayectorias continuas tiene probabilidades de transición estocásticamente continuas.*

Véase lo anterior en [10] *páginas 44,41,37, y 5 y en* [5]*-Vol I página 54.*
De acuerdo al diagrama anterior tenemos que el resolvente de contracciones fuertemente continuo asociado al semigrupo de contracciones fuertemente continuo $(T_t)_{t\geq 0}$ *está definido por*

$$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_t f \; ds, \quad f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \quad \alpha > 0.$$

Como $T = \alpha - G_\alpha^{-1}$*, se obtiene que* $\alpha G_\alpha u - T G_\alpha u = u$*. Véase* [10] *página 6 y* [8] *página 10.*

Con base a lo anterior, se puede hallar el operador infinitesimal del movimiento Browniano. Para esto consideremos B_0 *el subconjunto de* B *en donde el semigrupo de contracciones es fuertemente continuo, donde*

$$B_0 = \{f \in B(E) : \lim_{t\to 0} T_f = f\}.$$

Debido a que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/(2t)}\ dt = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty e^{-(\alpha s^2 + x^2/(2s^2))}\ ds = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|x|},$$

con las sustituciones $t = s^2$ *en la primera igualdad y* $c = |x|/\sqrt{2\alpha}$, $\beta = |x|/\sqrt{\alpha/2}$ *y* $u = s/\sqrt{c}$ *en la segunda. Por lo tanto,*

$$\begin{aligned}(G_\alpha h)(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}(T_t h(x))\ dt, \alpha > 0\\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\ dt\ (2\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)h(y)\ du\\ &= \int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha t}(2\pi t)^{-1/2}exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)h(y)\ dt\ du\\ &= (2\alpha)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty exp(|y-x|\sqrt{2\alpha})\ h(y)\ dy.\end{aligned}$$

Si definimos $f(x) := (G_\alpha h)(x)$, *se puede ver que* $f''(x) = 2\alpha f(x) - 2h(x)$, *y si* h *es una función continua, entonces* f'' *es una función acotada y continua, por lo tanto,* f' *es uniformemente continua. Anteriormente se tenía que* $\alpha f(x) - (Tf)(x) = h(x)$, *de esto se obtiene que*

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}f''(x),$$

es decir, T *es un operador diferencial de segundo orden. Si el movimiento Browniano tuviera como espacio de estados a* $\mathbb{R}^n$, *el operador infinitesimal sería de la forma*

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\triangle f,$$

donde $\triangle$ *es el operador de Laplace.*
La forma de Dirichlet correspondiente al proceso de Markov $(W_t)_{t\geq 0}$ *es*

$$\mathcal{E}(f,g) = (Tf,g) = \frac{1}{2}\int f''gdm = -\frac{1}{2}\int f'g'dm,$$

véase teoremas 4.22 y 4.15 de [10].

De lo anterior se puede caracterizar un proceso de Markov por su operador infinitesimal, en forma única casi siempre. Bajo algunas condiciones se puede demostrar que el operador infinitesimal es un operador diferencial, por lo tanto si se tiene un operador infinitesimal T, *se puede definir las probabilidades de* *transición como las soluciones de la ecuación diferencial*

$$\frac{\partial P(x,t,B)}{\partial t} = T(P(\cdot,t,B))(x)$$

y de allí se puede definir el proceso, ya que las probabilidades junto con la distribución inicial determinan el proceso.

En el caso del movimiento Browniano se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial P(x,t,B)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t,B)}{\partial x^2},$$

que se conoce con el nombre de la ecuación de Kolmogorov invertida.

De la teoría general de la ecuación del calor, se tiene que la solución de la ecuación anterior es

$$P(x,t,B) = (2\pi t)^{-1/2}\int_B \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} dy.$$

4. Núcleos y Resolventes

Definición 4.1. *Sea $(E,\mathfrak{B})$ un espacio medible arbitrario. Se dice que una función $k : E\times\mathfrak{B} \to [0,\infty)$ es un núcleo si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $k(x,\cdot)$ *es una medida positiva sobre $\mathfrak{B}$ para todo $x \in E$.*

(ii) $k(\cdot,B)$ *es una función $\mathfrak{B}$-medible para todo $B \in \mathfrak{B}$.*

Definición 4.2. *Se dice que un núcleo k sobre $(E,\mathfrak{B})$ es submarkoviano si $k(x,E) \leqslant 1$ para todo $x \in E$, y se dice que es markoviano si $k(x,E) = 1$ para todo $x \in E$.*

Definición 4.3. *Una familia de núcleos submarkovianos $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ se dice que es un resolvente submarkoviano de núcleos sobre $(E,\mathfrak{B})$, si cada αR_α es un núcleo submarkoviano sobre $(E,\mathfrak{B})$ y para todo $\alpha,\beta > 0$ se tiene que*

$$R_\alpha - R_\beta = (\beta-\alpha)R_\alpha R_\beta.$$

Al resolvente $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ se le llama markoviano si para todo $\alpha > 0$ se cumple que $\alpha R_\alpha 1 = 1$.

Definición 4.4. *Una familia de núcleos submarkovianos $(p_t)_{t>0}$ se dice que es un semigrupo si para toda función f medible, positiva, acotada, $z \in E$, $s,t > 0$, se tiene que*

$$p_t(p_s f)(z) = p_{t+s}(f(z)).$$

Denotaremos por $C(E)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre E y por $B^+(E)$ al conjunto de las funciones positivas de $B(E)$.

Proposición 4.5. *Si $\sigma(C(E))$ es la σ-álgebra generada por todas las funciones continuas sobre E, entonces para cada $t > 0$,*

$$p_t f(z) := p_t(z, f) := E_z[f(X_t)]$$

es medible y por lo tanto, para cada $\alpha > 0$, $z \in E$ y $f \in B^+(E)$,

$$R_\alpha f(z) := R_\alpha(z, f) := E_z\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\ dt\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t f(z)\ dt$$

es un resolvente submarkoviano de núcleos sobre $(E, \sigma(C(E)))$.

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 117. □

Definición 4.6. *Una función $f \in B(E)$ se dice α-supermediana para un resolvente de núcleos $(R_\beta)_{\beta>0}$ si $f > 0$ y $\beta R_{\alpha+\beta} f \leqslant f$ para todo $\beta > 0$.*

Definición 4.7. *Se dice que un resolvente de núcleos $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ sobre $(E, \mathfrak{B}(E))$ es un rayo-resolvente si:*

(i) *$R_\alpha(C(E)) \subset C(E)$ para todo $\alpha > 0$.*

(ii) *$\bigcup_{\alpha>0} C(E) \cap S^\alpha$ separa los puntos de E,*

donde S^α denota el conjunto de todas las funciones f que son α-supermedianas.

Teorema 4.8. *Sea $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ un rayo-resolvente. Entonces existe un único semigrupo $(p_t)_{t\geq 0}$ de núcleos submarkovianos sobre $(E, \mathfrak{B}(E))$ que tiene las siguientes propiedades:*

(i) *$R_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t f\ dt$ para todo $\alpha > 0$, $f \in C(E)$.*

(ii) *La aplicación $t \mapsto p_t f(z)$ es continua por la derecha sobre $[0, \infty)$ para todo $z \in E$, $f \in C(E)$.*

(iii) *Si se define el conjunto*

$$D := \{z \in E : \lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f(z) = f(z) \text{ para todo } f \in C(E)\},$$

entonces $D \in \mathfrak{B}(E)$, $p_0(z, \cdot) = e_z$ si y sólo si $z \in D$ y $p_t(z, E\backslash D) = 0$ para todo $t \geq 0$, $z \in E$.

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 119. □

Al conjunto D se le llama “conjunto de puntos no-ramificados”.

Definición 4.9. *Sea $\alpha > 0$ y $u \in L^2(E, \mathfrak{B}(E), m)$. Se dice que u es α-excesivo si $e^{-\alpha t} T_t u \leqslant u$ para todo $t > 0$, en donde $(T_t)_{t>0}$ es el semigrupo de contracciones fuertemente continuo asociado a una forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ fija sobre $L^2(E, \mathfrak{B}(E), m)$.*

Consideremos la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la quasiregularidad de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ y para el operador generador T de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ y el resolvente de contracciones fuertemente continuo $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ asociado a T (véase el diagrama anterior), definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{((1-T)\alpha G_\alpha u_n)^+, ((1-T)\alpha G_\alpha u_n)^- : n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{Q}_+\} \\ D_2^+ &:= G_1(D_1). \end{aligned}$$

Proposición 4.10. *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma de Dirichlet quasi-regular.*

(i) *Si D_1 es un subconjunto denso de $D(\mathcal{E})$, entonces existe un conjunto $\mathcal{E}$-excepcional $N \subset E$ y m-versiones $\widetilde{u}$ de $u \in D_1$ que son $\mathcal{E}$-quasi continuas, tales que $\{\widetilde{u} : u \in D_1\}$ separa los puntos de $E\backslash N$.*

(ii) *Existe un subconjunto D_0^+ de $D(\mathcal{E})$ que consiste de funciones 1-excesivas acotadas tal que $D_0^+ - D_0^+$ es denso en $D(\mathcal{E})$, y existen un conjunto $\mathcal{E}$-excepcional $N \subset E$ y m-versiones $\widetilde{u}$ de $u \in D_0^+$ que son $\mathcal{E}$-quasicontinuas tal que $\{\widetilde{u} : u \in D_0^+\}$ separa puntos de $E\backslash N$.*

El conjunto D_0^+ está definido por

$$D_0^+ := \{u \wedge n : u \in D_2^+, n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 137. □

Consideremos la sucesión $\mathcal{E}$-anidada $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos dada por la quasiregularidad de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ con cada E_k metrizable y D_0^+ y N los conjuntos dados por la proposición 4.10. De ahora en adelante supondremos que $N \subset E\backslash Y$, donde

$$Y := \bigcup_{k\geq 1} E_k.$$

Proposición 4.11. *Sea $\alpha > 0$. Entonces existe un núcleo $\widetilde{R}_\alpha$ de $(E, \mathfrak{B}(E))$ en $(Y, \mathfrak{B}(Y))$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *$\widetilde{R}_\alpha f$ es una m-versión $\mathcal{E}$-quasi continua de $G_\alpha f$ para cada $f \in L^2(Y; m)$.*

(ii) *$\alpha \widetilde{R}_\alpha(z, Y) \leqslant 1$ para todo $z \in E$.*

El núcleo es $\mathcal{E}$-q.e y único en el sentido que si K es un núcleo que satisface (i), entonces $K(z,\cdot) = \widetilde{R}_\alpha(z,\cdot)$ para todo $z \in E$ $\mathcal{E}$-quasi en toda parte, es decir, fuera de algún conjunto $\mathcal{E}$-excepcional.

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 139. □

Para $\Lambda \notin E$, definimos $E_\Lambda := E \cup \{\Lambda\}$ y denotaremos por $\mathcal{P}(E_\Lambda)$ a la familia de todas las medidas de probabilidad sobre $(E_\Lambda, \mathfrak{B}(E_\Lambda))$.

Proposición 4.12. *Sea $\mathbf{M} := (\Omega, \mathfrak{A}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Lambda})$ un proceso continuo por la derecha con espacio de estados E, semigrupo de transición $(p_t)_{t>0}$ y resolvente $(R_\alpha)_{\alpha>0}$. Sea $(T_t)_{t>0}$ el semigrupo de contracciones fuertemente continuo sobre $L^2(E;m)$ con resolvente asociado $(G_\alpha)_{\alpha>0}$. Entonces $p_t f$ es una m-versión de $T_t f$ para todo $t>0$, $f \in L^2(E;m)$, si y sólo si $R_\alpha f$ es una m-versión de $G_\alpha f$ para todo $\alpha > 0$, $f \in L^2(E;m)$.*

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 132. □

Proposición 4.13. *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma de Dirichlet sobre $L^2(E;m)$ y $\mathbf{M}$ un proceso continuo por la derecha con espacio de estados E y correspondientes resolventes $(G_\alpha)_{\alpha>0}$, $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{M}$ *es propiamente asociado con $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, es decir, $p_t f$ es una versión de $T_t f$ para todo $t > 0$, y para todo $f \in B(E) \cap L^2(E;m)$.*

(ii) *$R_\alpha f$ es una m-versión $\mathcal{E}$-quasicontinua de $G_\alpha f$ para todo $\alpha > 0$ y para todo $f \in B(E) \cap L^2(E;m)$.*

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 133. □

Proposición 4.14. *Sea h una función sobre E. Definamos para $U \subseteq E$, U abierto,*

$$L_{h,U} := \{w \in D(\mathcal{E}) \mid w \geq h \text{ c.s sobre } U\}.$$

Si $L_{h,U} \neq \emptyset$, entonces existen únicos h_U, $\widetilde{h}_U \in L_{h,U}$ tales que para todo $w \in L_{h,U}$,

$$\mathcal{E}_1(h_U, w) \geq \mathcal{E}_1(h_U, h_U) \text{ y } \mathcal{E}_1(w, \widetilde{h}_U) \geq \mathcal{E}_1(\widetilde{h}_U, \widetilde{h}_U).$$

h_U es la función más pequeña u sobre E tal que $u \wedge h_U$ es una función 1-excesiva en $D(\mathcal{E})$ y $u \geq h$ casi siempre sobre U.

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 98. □

Sea $\mathbb{Q}_+^*$ el conjunto de los números racionales estrictamente positivos. Sea U_0 una familia contable de subconjuntos abiertos de E tal que

$$E_k^c \in U_0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Los conjuntos de la forma $\{U \cap E_k \mid U \in U_0\}$ forman una base para la topología de E_k para todo $k \in \mathbb{N}$. Definamos el conjunto

$$\mathcal{U} := \left\{ U \subset E \ : \ U = \bigcup_{k=1}^{n} U_k \text{ para algún } \ U_k \in U_0 \right\} \cup \{E\}.$$

Sea J_0 la familia más pequeña de funciones que son acotadas, $\mathcal{E}$-quasicontinuas y 1-excesivas en $D(\mathcal{E})$, que tiene las siguientes propiedades:

(i) $J_0 \supset D_0^+ \cup \{h_U \mid U \in \mathcal{U}\}$.
(ii) $\widetilde{R}_\alpha u,\ u_U \in J_0$, si $u \in J_0$, $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, $U \in \mathcal{U}$.
(iii) $u \wedge 1$, $u \wedge v$, $(u+1) \wedge v \in J_0$, si $u, v \in J_0$.
(iv) $c_1 u + c_2 v \in J_0$, si $u, v \in J_0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_+^*$.

El siguiente lema garantiza la existencia de un conjunto $Y_1 \subset E$ sobre el cual J_0 y $\widetilde{R}_\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tienen algunas de las propiedades que son útiles para relacionar las formas de Dirichlet con los procesos de Markov fuerte.

Lema 4.15. *Existe una sucesión de conjuntos $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}$-anidada regular que consiste de conjuntos metrizables con $F_k \subset E_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y con las siguientes propiedades:*

(i) $J_0 \subset C(\{F_k\})$.
(ii) *Si $Y_1 := \bigcup_{k\geq 1} F_k$, entonces para todo $x \in Y_1$ y todo $u \in J_0$ se cumple que:*
  - $\widetilde{R}_\alpha u(x) - \widetilde{R}_\beta u(x) = (\beta - \alpha)\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta u(x)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+^*$.
  - $\lim\limits_{\substack{\alpha\to\infty \\ \alpha\in\mathbb{Q}_+^*}} \alpha \widetilde{R}_\alpha u(x) = u(x)$.

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 142. □

De las proposiciones 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 y el lema 4.15 se puede concluir que $(\widetilde{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ tiene la propiedad de ser un resolvente de núcleos sobre $(E, \mathfrak{B}(E))$ y $(\widetilde{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ es un rayo-resolvente.

Lema 4.16. *Existe un conjunto $Y_2 \in \mathfrak{B}(E)$ con $Y_2 \subset Y_1$ tal que $E\backslash Y_2$ es $\mathcal{E}$-excepcional y además $\widetilde{R}_\alpha(x, Y\backslash Y_2) = 0$ para todo $x \in Y_2,\ \alpha \in \mathbb{Q}_+^*$.*

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 142. □

Sea $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $\mathfrak{B}(Y)$ tal que $E\backslash Z_{n+1}$ es $\mathcal{E}$-excepcional y $\widetilde{R}_\alpha(x, Y\backslash Z_n) = 0$ para todo $x \in Z_{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ y $n \in \mathbb{N}$. El conjunto Y_2 del lema 4.16 está definido por $Y_2 := \bigcap_{n\geq 1} Z_n$.
Definamos el conjunto

$$J := \{u + cI_{Y_2\cup\{\Lambda\}} \mid u \in J_0,\ c \in \mathbb{Q}_+\}.$$

J es contable, hereda las propiedades de J_0 y separa los puntos de $Y_2 \cup \{\Lambda\}$.
Sea $H := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y sea $g_n := \frac{2}{\pi} \arctan u_n,\ n \in \mathbb{N}$. Si definimos

$$\rho(x, y) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} |g_n(x) - g_n(y)|; \quad x, y \in Y_2 \cup \{\Lambda\},$$

entonces $\rho(x, y)$ resulta ser una métrica sobre $Y_2 \cup \{\Lambda\}$ debido a que J separa los puntos de $Y_2 \cup \{\Lambda\}$.
Denotaremos por K al completado de $Y_\Lambda := Y_2 \cup \{\Lambda\}$ respecto de $\rho(x, y)$.

Teorema 4.17. *Sea $(p_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo de núcleos submarkovianos y D el conjunto de puntos no-ramificados asociado por el teorema 4.8 . Entonces existe un $\mathfrak{F}_t$-proceso de Markov fuerte con espacio de estados D y semigrupo de transición $(p_t)_{t\geq 0}$ tal que para todo $w \in \Omega$, la aplicación $t \mapsto X_t(w)$ tiene límites por la izquierda en E para todo $t \in (0, \infty)$.*

Demostración. Se puede encontrar en [10] página 126. □

5. Teorema Principal

Teorema 5.1. *Si $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet quasi-regular sobre $L^2(E; m)$, entonces existe un proceso de Markov definido en Ω con valores en E_Λ denotado por*

$$\mathbf{M} := (\Omega, \mathfrak{A}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Lambda})$$

que tiene la propiedad de Markov fuerte, es decir,

(i) $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ *es continua por la derecha, es decir,* $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s\geq t} \mathfrak{F}_s$.

(ii) *Para cada $\mathfrak{F}_t$-tiempo de paro τ y cada $\mu \in \mathcal{P}(E_\Lambda)$,*

$$P_\mu[X_{\tau+t} \in B \mid \mathfrak{F}_\tau] = P_{X_\tau}[X_t \in B],$$

para todo $B \in \mathfrak{B}(E_\Lambda)$ y para todo $t \geq 0$.

Demostración. Debido a la complejidad de la demostración, sólo se dará una idea de ella. Para demostrar que a una forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ se le puede asociar un proceso de Markov $\mathbf{M} = (\Omega, \mathfrak{A}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Lambda})$ se hace lo siguiente:

(i) Construir un conjunto Y_2 tal que $E\backslash Y_2$ sea $\mathcal{E}$-excepcional (su existencia la garantiza el lema 4.16).

(ii) Construir un conjunto $J_0 \subset D(\mathcal{E})$ de funciones 1-excesivas que son $\mathcal{E}$-quasicontinuas en la compactificación K de $Y_2 \cup \{\Lambda\}$ (véase el lema 4.15).

(iii) Usando el hecho de que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\mathcal{E}$-anidada de conjuntos compactos se demuestra que la correspondencia del proceso de Markov

$$\mathbf{M} = (\Omega, \mathfrak{A}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Lambda})$$

sobre K se puede restringir a $Y_2 \cup \{\Lambda\}$ y que esta restricción de $\mathbf{M}$ es propiamente asociado con $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, es decir, si $p_t f$ es $\mathcal{E}$-quasicontinua para todo $t > 0$ y $f \in B(E) \cap L^2(E; m)$.

Para ver más detalles de la demostración, se puede consultar [10] página 137.

□

Agradecimientos

Agradezco a la profesora Myriam Muñoz de Özak del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá D.C., por su valiosa colaboración en la revisión de este trabajo .

Bibliografía

[1] Ash Robert B., *Analysis and Probability*, Academic Press, 1972.

[2] Bartle Robert G., *The Elements of Integration,* John Wiley & Sons, 1966.

[3] Billingsley Patrick, *Convergence of Probability Measures,* John Wiley & Sons, 1968.

[4] Brézis Haïm, *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones,* Alianza Editorial, Masson-París, 1983.

[5] Dynkin E. B., *Markov Processes*, Vol I y II, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[6] Fukushima Masatoshi, *Dirichlet Forms and Markov Pocesses*, Kodansha Scientific Books, 1980.

[7] Kurtz Thomas G. y Ethier Stewart N., *Markov Processes Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[8] Ma Zhi-Ming, Rockner Michael, *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] Malliavin Paul, *Integration and Probability*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] Mora Espinosa, Carlos Fernando, *Formas de Dirichlet y Procesos de Markov*, Tesis de Magister en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2002.

[11] Muñoz de Özak Myriam, Liliana Blanco Castañeda, *Introducción a la Teoría Avanzada de la Probabilidad*, Colección Textos Vol. 2, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2002.

[12] Muñoz de Özak Myriam, Liliana Blanco Castañeda, *Procesos Estocásticos*, Preprint-Notas de Clase, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2002.

[13] Muñoz de Özak Myriam, *Movimiento Browniano*, XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 1996.

[14] Simmons, G.F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill International Editions.

[15] Todorovic Peter, *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[16] Tudor Constantin, *Procesos Estocásticos*, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.