Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 2 (2004), pp. 95–108

LA TENSIÓN ENTRE TEORÍA DE MODELOS Y ANÁLISIS MATEMÁTICO: ESTABILIDAD Y LA EXPONENCIAL COMPLEJA

ANDRÉS VILLAVECES (*)

0. Introducción.

La ausencia de Jairo Charris se ha hecho sentir de manera muy fuerte en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional, no solo por su personalidad (que lo llevaba a decir de manera directa y aguda lo que pensaba) sino por su *centralidad.* En efecto, Jairo era un matemático preocupado por la *unidad* esencial en la matemática. Tomar un curso con él, o aún más, conversar con él en la cafetería, siempre era un ejercicio de formación intenso para un estudiante o para un colega: muchas veces quedé con la impresión de haber vislumbrado conexiones con otras ramas de la matemática, distantes de la mía, cuando tuve la oportunidad de hablar con Jairo.

Recuerdo muy claramente la anécdota contada por Jairo más de una vez: en la lista de especialidades de cada profesor del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, aparecían temas específicos para todos *salvo para Weil.* En efecto, al lado del nombre de Weil, la única mención era *matemático.* Jairo claramente admiraba esa unidad, tan poco usual en nuestros días, que permitía que alguien se pudiera describir a sí mismo, ante el Instituto, como “matemático”.

En cierto sentido, creo que el ideal de Jairo apuntaba en esa dirección. A pesar de su conocimiento de especialista en polinomios ortogonales, Jairo tenía en la mente áreas amplias de la matemática, que cubrían desde la Teoría Espectral hasta la Geometría Algebraica. En mi caso, a pesar de haber comenzado a ir hacia la Lógica, la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Modelos desde bastante pronto, siempre conté el privilegio de poder hablar de matemática con Jairo.

En los últimos años ha tenido lugar un acercamiento muy sugestivo y sorprendente entre la Teoría de Modelos y el Análisis Complejo, a través del

(*) Andrés Villaveces. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
E-mail: avillavecesn@unal.edu.co.

trabajo de varios autores, pero principalmente de Boris Zilber en los trabajos más recientes.

Espero que estas notas, que cuentan ciertos acercamientos recientes entre la Teoría de Modelos y el Análisis Complejo, hagan honor a la memoria de Jairo Charris, y a la importancia que él siempre subrayó de la unidad de la matemática.

1. ¿Teoría de modelos del análisis?

1.1. La teoría de modelos es más cercana al "álgebra". Se puede afirmar sin temor a exagerar que la interacción más activa entre la teoría de modelos y el resto de la matemática hasta la fecha ha tenido lugar en ámbitos que podríamos calificar de "algebraicos"(entendiendo esta palabra, claro está, de manera flexible).

En su prehistoria, la teoría de modelos estuvo dividida entre una versión más centrada en un estudio directo de estructuras algebraicas[1] como campos, campos con diferenciación, campos valuados, etc., y otra versión más "abstracta", que buscaba desarrollar herramientas intrínsecas a la teoría de modelos[2] (inmersiones de modelos, saturación, estudio de espacios de tipos, etc.) y propiedades estructurales *globales* no solo de un modelo sino de la clase de modelos con la misma teoría. Hacia 1965, con el nacimiento de la teoría de modelos moderna (con el teorema de Morley (ver [15])), las herramientas "abstractas" obtuvieron por un lado un auge enorme, pero por otro lado generaron maneras de entender (descomponer, sumergir) modelos y partes definibles de estos *de manera similar* (aunque más complicada) a las nociones análogas en espacios vectoriales, campos algebraicamente cerrados y otras estructuras algebraicas en términos de *dimensión* y *bases*.

El teorema clásico de Steinitz dice que si K es un campo algebraicamente cerrado no enumerable, entonces basta conocer dos números para determinar quién es K módulo isomorfismo: la cardinalidad de K, y su característica. En el caso contable, lo anterior falla, pues el grado de trascendencia provee diferencias adicionales: hay una cantidad contable de campos enumerables no isomorfos, de la misma característica p: uno por cada grado finito de trascendencia, y uno de grado de trascendencia ω.

Esa teoría clásica explora propiedades de la estructura

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle,$$

que podemos llamar[3] la "estructura superestrella", por su papel central en la prehistoria de la teoría de modelos.

[1]Esta versión fue llamada en los años 60 "Eastern Model Theory" dado que su desarrollo tuvo lugar en la escuela de Abraham Robinson, que trabajó en Yale.

[2]Esta versión, desarrollada principalmente en torno a Tarski en Berkeley, era llamada "Western Model Theory".

[3]Siguiendo una simpática terminología de Alf Onshuus.

Según el antiguo ideal de categoricidad absoluta, las teorías de la lógica hubieran debido proveer descripciones totales de las estructuras que aparecen en matemática. Sin embargo, esto solo sucede (en Lógica de Primer Orden) en el caso de estructuras finitas; una consecuencia del teorema de compacidad es que si una teoría en lenguaje contable tiene un modelo infinito, entonces tiene modelos de todas las cardinalidades infinitas. Esto rompe definitivamente la primera versión de ese "ideal antiguo", al menos para estructuras infinitas. No hay teorías absolutamente categóricas, salvo las teorías de un modelo finito, que interesan poco en teoría de modelos.

Sin embargo, si nos conformamos con "categoricidad por pisos" (es decir, una teoría T es *λ-categórica* ssi T tiene un solo modelo de tamaño λ), el teorema de Steinitz muestra cómo existe un solo campo algebraicamente cerrado de característica p, por cada cardinalidad no contable μ (módulo isomorfismo).

El teorema de Morley, y el posterior análisis dimensional de Baldwin-Lachlan (ver [1]), generalizan lo anterior de manera dramática: el "fenómeno de Steinitz" en campos algebraicamente cerrados de característica fija p (primo o 0), específicamente la transferencia de categoricidad de un cardinal a otro, en realidad es caso particular de un teorema general.

Teorema 1. *(Morley) Sea T una teoría contable de primer orden, categórica en $\lambda > \aleph_0$. Entonces T es μ-categórica, para* todo *$\mu > \aleph_0$.*

Las técnicas que desarrolló Morley (y años después, Shelah, al extender el resultado anterior a teorías no contables) permitieron extender el análisis dimensional natural en estructuras como $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ a muchos otros contextos.

Sin embargo, la hipótesis de categoricidad en $\lambda > \aleph_0$ es fuerte: *no* es cierto que todas las teorías de primer orden permitan el análisis dimensional que se logra en el caso de las incontablemente categóricas. El desarrollo de la monumental *teoría de la estabilidad* debido principalmente a Shelah en su volumen *Classification Theory* (ver [19]) puede ser leído (¡de manera muy reduccionista!) como un intento de descubrir cuáles teorías de primer orden admiten el tipo de análisis que funciona tan bien para campos algebraicamente cerrados... y también cuáles no admiten tal clasificación, y por qué. Adicionalmente, provee teoremas que muestran cómo llevar a cabo análisis "de dimensión" dentro de las estructuras que lo admiten. Lo anterior es la base que posibilita la geometrización de la teoría de modelos, en trabajos posteriores de Hrushovski, Zilber y otros - ¡y con aplicaciones recientes (ver [8]) a situaciones tan específicas como el teorema de Mordell-Lang!

1.2. El caso de estructuras analíticas. Algo muy diferente de lo anterior sucede si queremos armar una teoría de modelos que dé buena cuenta de situaciones analíticas: estas dependen desde el principio de nociones como *convergencia*, *continuidad*, *completitud*, cuyas adaptaciones a lógica de primer orden, cuando se intentan, en casi todos los casos pierden cantidad enorme de información. Naturalmente, aunque uno puede armar sentencias que expresen varios de esos conceptos,el uso de existencia de límites, la formalización de sumas infinitas e integrales, etc. son menos directas que en el caso de (muchas) propiedades algebraicas. Históricamente, esto ha resultado en un desarrollo bastante más tardío de la teoría de modelos adecuada al Análisis, y en una necesidad de readaptación de la lógica a contextos analíticos.

Un caso más reciente, muy promisorio, es una línea que recientemente ha aparecido, enfocada hacia el estudio modelo teórico del rol de la función exponencial en los números complejos. La estructura prototípica en este contexto es

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle,$$

los complejos, expandidos con la función exponencial. Si el estudio de la "estructura superestrella clásica"

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

sirvió de hilo conductor y de motivación al desarrollo de la teoría de la estabilidad (tanto teoría de la clasificación como estabilidad geométrica), es apenas natural esperar que lograr resultados, definiciones e ideas interesantes del estudio de

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$$

redunde en un inicio de entendimiento de otras estructuras analíticas.

En las secciones siguientes, contaré brevemente algunos de los hitos clásicos del camino hacia la interacción entre la teoría de modelos y el análisis, algunos caminos específicos, y muy rápidamente me concentraré en el caso novedoso (los resultados son de 2001 al presente) del estudio de la estructura de los complejos con la exponencial (y variantes).

2. Puntos de ramificación

2.1. Algunos hitos clásicos. En etapas del desarrollo inicial de la teoría de modelos, hay dos direcciones que vale la pena mencionar, en la medida en que inspiraron muchos trabajos posteriores.

1. La *eliminación de cuantificadores* para campos real-cerrados, debida a Tarski, al igual que su estudio de la definibilidad en distintos campos. Tarski planteó la pregunta, resuelta por Wilkie en 1997 (ver [20]), de si los reales con exponenciación $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$ satisfacen eliminación de cuantificadores. Estos trabajos de Tarski marcan el inicio de una línea muy natural en teoría de modelos: ¿cómo es la estructura de conjuntos *definibles*[4] en una estructura? ¿Cuándo es posible determinar

[4] En teoría de modelos, un conjunto D es *definible* en una estructura $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $D = \varphi(\mathfrak{A}) = \{a \in A | \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$. Es decir, D es el "conjunto solución" de una fórmula φ, en $\mathfrak{A}$. Una definición similar nos da definibles en dimensiones finitas arbitrarias. Ejemplos clásicos de definibles en un campo incluyen a las variedades afines: por ejemplo, la

una clase de “conjuntos básicos” que capture la información esencial de toda una clase de conjuntos definibles?

2. Los trabajos iniciales de *Robinson* y su escuela abrieron varios desarrollos de interacción entre teoría de modelos y análisis. Menciono sólo tres de éstos:
   a) *El Análisis No Estándar*, inicialmente una aplicación fuerte de consecuencias del teorema de compacidad debida a Abraham Robinson (ver [16]), por un lado permitió capturar por primera vez de manera coherente en matemática los infinitesimales de Leibniz, y por otro lado abrió un área de encuentro entre análisis, probabilidad y lógica. Keisler y Fajardo han desarrollado (ver [4]) esta línea hasta el estudio de procesos estocásticos.
   b) Robinson también sentó las bases para un manejo conceptual de campos real cerrados y el XVII problema de Hilbert.
   c) Lenore Blum en su tesis de doctorado [2] sentó las bases para el estudio de los *campos diferencialmente cerrados* (campos con un operador derivada d, con axiomas de clausura naturales desde el punto de vista modelo-teórico).

2.2. Trabajos recientes. Los trabajos mencionados antes no hacían énfasis en las herramientas más profundas que la teoría de modelos develó después de Morley y sobre todo después de Shelah: la teoría de la estabilidad. Otros trabajos posteriores, sin embargo, han intentado precisamente acercar las herramientas de la teoría de estabilidad a Análisis Funcional (Teoría de Espacios de Banach).

La línea fue abierta inicialmente por Krivine y Rosenthal - más tarde, Henson y luego Iovino (ver [11], [12]) han encontrado conexiones bastante profundas entre problemáticas en Teoría de Espacios de Banach y conceptos centrales de estabilidad (tipos promedio, propiedad del orden, etc.). La traducción, bastante natural *una vez Henson y Iovino arman la lógica apropiada* para capturar definiciones centrales en Teoría de Espacios de Banach, es un ejemplo fuerte e interesante, en el cual teoremas no triviales de análisis son mostrados como hechos bastante naturales por la teoría de modelos.

3. El caso de la exponencial

En el caso de nuestra estructura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$ la historia ha sido distinta, e interesante por otras razones. Aquí el problema no ha sido, como en los

---

curva elíptica C dada por

$$y^2 = x^3 + ax + bc + c$$

puede verse como el definible D_C sobre $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, a, b, c \rangle$,

$$D_C = \varphi_C(\mathbb{C}, a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \varphi_C(x, y, a, b, c)\},$$

donde $\varphi_C(x, y, a, b, c)$ es la fórmula $y^2 = x^3 + ax + bc + c$.

trabajos de la línea de Keisler o de la línea de Henson y Iovino, el encontrar lógicas distintas apropiadas directamente a un tipo de problemática (capturar aproximación, o probabilidad, mediante fórmulas), sino mirar una estructura "clásica" y estudiar sus conjuntos definibles, tipos, categoricidad, etc.

El problema es que, por razones que provienen de la misma teoría de la estabilidad, la teoría *de primer orden*[5]

$$Th(\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle) := \{\sigma | \langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle \models \sigma\}$$

es una teoría con comportamiento complicado desde el punto de vista de la teoría de estabilidad:

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$ y la aritmética:: Usando $+$ y $\cdot$, se puede reconstruir toda la aritmética en

$$\ker \exp = \{z | exp(z) = 1\} = \{2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\},$$

y por lo tanto desde un punto de vista modelo-teórico $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$ es por lo menos tan complicada como la teoría de números. Por Gödel, la estructura de conjuntos definibles en esta última está totalmente fuera de nuestro alcance.

Modelos no estándar:: Otra dificultad (relacionada con la anterior) es que al tomar extensiones arbitrarias de $(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$ puede perfectamente suceder que crezca $\ker \exp$. Así obtenemos 'modelos no estándar' de los naturales en la clase de extensiones elementales de nuestra estructura. Los modelos no estándar de la aritmética son particularmente esquivos a la clasificación que provee la teoría de estabilidad... en primer orden.

Inestabilidad:: la (teoría de la) estructura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$ es *inestable*, tampoco es *simple*[6]... está por fuera de todo el dominio conocido en el cual hay teoría de modelos de primer orden razonable.

Lo anterior parecería indicar que $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$ no se puede estudiar mediante un análisis modelo-teórico adecuado. Y durante décadas el tipo de estructuras para las cuales hubo desarrollos de análisis modelo-teórico fueron campos algebraicamente cerrados, campos diferencialmente cerrados, campos real-cerrados, varios tipos de módulos y grupos (por ejemplo, de rango de Morley finito), etc. Pero no una estructura como $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$... hasta trabajos recientes.

---

[5] "Primer orden" se refiere a cálculo de predicados con cuantificación sobre elementos, no sobre conjuntos o funciones. También se refiere a la posibilidad de tomar conjunciones o disyunciones *finitas*, y cuantificar sobre cadenas finitas de variables.

[6] En general, las teorías *inestables* y sobre todo las no *simples* están "del lado malo" en términos de la clasificación y la estructura interna: hay demasiados definibles. En nuestro caso, la inestabilidad es consecuencia de la definibilidad del orden del núcleo de la exponencial, y la no simplicidad [que de hecho implica la inestabilidad] se puede demostrar mediante la asimetría de la división.

Desde un punto de vista estrictamente de primer orden, parecerían incontornables los obstáculos planteados por la no simplicidad, y sobre todo por la interpretabilidad de la aritmética de primer orden en $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$.

Sin embargo, la convergencia de trabajos con orígenes diversos en los últimos años terminó un ambiente natural (¡distinto de la lógica de primer orden!) para hacer teoría de modelos de los complejos con exponencial, al nivel de poder desarrollar teoría de la estabilidad para una clase natural que incluye $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$.

En las dos secciones siguientes describo algunos desarrollos diferentes, que indirectamente desembocaron en la construcción de la clase de Zilber.

4. Hrushovski y Zilber. Estructuras muy canónicas.

Una "nueva etapa" hacia la teoría de modelos del análisis se abre con los trabajos de Hrushovski y luego Zilber, bien distinta de las mencionadas antes. A principios de la década del 90, Hrushovski lleva a cabo construcciones que llevarían por un lado a refutar la conjetura de Zilber y por otro lado a reforzar ciertos paralelos naturales entre geometría algebraica y teoría de modelos.

Chang y Keisler en 1970 definían en su famoso texto "Model Theory[7]" la teoría de modelos mediante la ecuación

$$\text{teoría de modelos} = \text{lógica} + \text{álgebra universal}$$

En 1993, la ecuación había cambiado. El texto "Model Theory" de W. Hodges, muy distinto del de Chang y Keisler, y bastante influyente a su manera, definía hace una década la teoría de modelos mediante la ecuación siguiente.

$$\text{teoría de modelos} = \text{geometría algebraica} - \text{campos}$$

Naturalmente, no hay consenso sobre cuál sería la versión adecuada de esta "ecuación" en 2004 (probablemente alguna variante de la de Hodges). Sin embargo, lo más importante es observar en la descripción de Hodges la entrada central de la geometría algebraica.

4.1. La conjetura de Zilber. Entre las teorías matemáticas, las "fuertemente minimales" han jugado un papel particularmente interesante. Una teoría es fuertemente minimal si todos sus modelos M tienen la propiedad siguiente: todo conjunto definible en M es finito o cofinito. Los finitos y cofinitos siempre son definibles - en el caso fuertemente minimal, éstos son los únicos definibles. La razón por la cual reciben atención radica en que sobre los fuertemente minimales es posible definir "pregeometrías" combinatorias (D, cl), donde cl es una operación de clausura que soporta una noción de dimensión cuyo comportamiento es análogo al del grado de transcendencia en campos algebraicamente cerrados.

[7]El texto de Chang y Keisler marcó generaciones enteras de estudiantes de teoría de modelos. Hasta finales de los años 80 era el texto principal en teoría de modelos.

Ejemplos de teorías fuertemente minimales incluyen la teoría del conjunto infinito (aquí, la dimensión coincide con la cardinalidad), la teoría de espacios vectoriales, y la teoría de campos algebraicamente cerrados de característica fija p.

A mediados de los años ochenta, Zilber conjetura que toda teoría fuertemente minimal (dotada de una noción "natural" de clausura algebraica y de dimensión) es biinterpretable[8] con una de las siguientes tres situaciones:

1. Trivial: $\dim(X \cup Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.
2. (Localmente) modular: $\dim(X \cup Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$.
3. Geometría algebraica: campos algebraicamente cerrados (¡en ese caso fallan las dos igualdades anteriores!)

Zilber ya había demostrado lo anterior, bajo la hipótesis más fuerte de $\aleph_1$-categoricidad. Todos los ejemplos encontrados hasta la época de la conjetura de hecho se enmarcaban en una de esas tres clases, en el sentido de biinterpretabilidad. Es interesante observar que las tres clases corresponden a tres "tipos de estructuras" bien importantes a lo largo de la historia de la matemática:

: Estructuras "desmembradas" o puramente combinatorias,
: Estructuras esencialmente lineales, y
: Estructuras biinterpretables con $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, es decir estructuras soporte de la geometría algebraica.

Evidentemente, estoy hipersimplificando las cosas al describir las tres clases así. Sin embargo, parte de la motivación de Zilber era que en cierto sentido las estructuras que el ser humano ha encontrado en la historia de la matemática *no son accidentales.* Es decir, ¡no es por azar que (al menos dentro del ámbito importante, aunque no exhaustivo, de una buena clase de estructuras que sirven de soporte de manera natural a buenas nociones de dimensión), fueran esencialmente esas, *y solo esas,* las estructuras halladas en muchos siglos de historia de la matemática!

La anterior es una motivación "externa" a la matemática, que Zilber ha mencionado de una u otra manera, en sus escritos y en conferencias. Se puede ver como una especie de "platonismo a posteriori", como una confirmación de la inevitabilidad de ciertas estructuras en la matemática.

[8] Dadas M una L_1-estructura, N una L_2-estructura, N es *interpretable* en M ssi existen una L_1-fórmula $\delta(x_0, \cdots, x_{n-1})$, una función sobreyectiva f de $\delta(M)$ en N y una correspondencia que asigna a cada L_2-fórmula $\varphi(y_0, \cdots, y_m)$ una L_1-fórmula $\varphi_\Gamma(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{n-1})$, donde las $\bar{x}_i$ son n-tuplas disyuntas, de manera tal que para toda fórmula atómica φ en L_2 y para todo $\bar{a}_i \in \delta(M)$,

$$N \models \varphi(f\bar{a}_0, \cdots, f\bar{a}_m) \Leftrightarrow M \models \varphi_\Gamma(\bar{a}_0, \cdots, \bar{a}_m).$$

Lo anterior formaliza la noción de interpretabilidad: intuitivamente, M es capaz de "leer" a N en las n-tuplas de δ, mediante la traducción de fórmulas. Biinterpretabilidad corresponde a la existencia de la función f, la fórmula δ y la traducción de fórmulas, pero invirtiendo los roles de M y N.

4.2. El contraejemplo de Hrushovski. Hrushovski encontraría un contraejemplo a la conjetura en 1993 (ver [9]); la construcción del nuevo[9] conjunto fuertemente minimal por un lado tumbó la conjetura original de Zilber, y por otro lado empezó a abrir toda una nueva técnica de construcción de modelos. Una técnica en cierto sentido similar a ideas del forcing (se construye el módelo como un límite à la Fraïssé, se demuestra que ciertas cosas específicas son consistentes, y se produce una nueva dimensión) termina dando una estructura universal y homogénea[10].

La primera de estas estructuras nuevas fuertemente minimales tiene una noción de dimensión que no es ni trivial, ni modular, ni capaz de interpretar campos algebraicamente cerrados.

Un segundo contraejemplo de Hrushovski a la conjetura de Zilber es una estructura M capaz de interpretar a la vez un campo K_1 de característica p y otro campo K_2 de característica $q \neq p$. Claramente, ningún campo es capaz de interpretar esta estructura.

El "método de Hrushovski" ha sido objeto de estudio cuidadoso, pues es una manera novedosa (aunque basada en la antigua construcción de límites de Fraïssé) de construir estructuras en teoría de modelos[11].

Aunque esta familia de contraejemplos de Hrushovski formalmente tumba la conjetura de Zilber, es importante aclarar dos ramificaciones:

: Por un lado, el mismo Hrushovski, junto con Zilber, halló toda una familia de situaciones, las "geometrías de Zariski" (ver [10]), en las cuales de hecho, vale la conjetura original de Zilber. Las geometrías de Zariski imponen condiciones extra sobre las familias de definibles en todas las dimensiones finitas, suficientes para tener la conjetura[12].

: Por otro lado, Zilber lanzó posteriormente una *nueva versión de su conjetura:* aunque están los contraejemplos de Hrushovski, Zilber modificó su conjetura a una versión en la cual las estructuras fuertemente minimales que no son biinterpretables con ninguna de las tres clases originales (desmembradas, modulares, campos algebraicamente cerrados) ¡resultan *en un sentido que aún hay que aclarar* biinterpretables

---

[9]Nuevo en un sentido fuerte: no es biinterpretable ni con un conjunto infinito, ni con un espacio vectorial infinito-dimensional, ni con un campo algebraicamente cerrado

[10]Dada una clase $\mathcal{K}$ de estructuras, con dimensiones d_1 y d_2, uno puede considerar una nueva función f en $\mathcal{K}$. En $(\mathcal{K}, f)$, obtiene uno una predimensión, por ejemplo mediante

$$\delta(X) = d_1(X \cup f(X)) - d_2(X).$$

Considere luego las estructuras M en $(\mathcal{K}, f)$ que satisfagan la desigualdad de Hrushovski $\delta(X) \geq 0$ para todo $X \subset M$ finito. Amalgame *todas* estas estructuras, para obtener el modelo universal homogéneo.

[11]Baldwin y Holland han llevado a cabo otro estudio sistemático (ver [7]) de estas construcciones - en Bogotá hemos estudiado sus conexiones con clases elementales abstractas

[12]Las geometrías de Zariski han sido explotadas con éxito por Hrushovski para aplicaciones de la teoría de modelos a teoría de números (ver [8], [3] y [14]).

con estructuras analíticas! Evidentemente, hay un camino largo por cumplir aún ahí. En lo que sigue, veremos de qué manera dota Zilber la estructura

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$$

de una pregeometría, a pesar de lo complicada que es esta teoría por las razones que mencionábamos arriba.

5. El enfoque de Zilber

Antes mencioné que el efecto de agregar la función exponencial a la estructura superestrella produce efectos inmediatos que resultan de la interpretabilidad de la aritmética en la estructura resultante $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$: la estructura de definibles en el núcleo de exp no es tratable en primer orden directamente con métodos que extiendan directamente a los que sirven para los complejos (es decir, estabilidad). Un modelo de la teoría de $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$ puede tener una versión "no estándar" del núcleo de la exponencial.

El núcleo de la exponencial se puede "amarrar" mediante la siguiente sentencia de lógica de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$:

$$\exists a \forall x (\exp(x) = 1 \rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} x = n \cdot a)$$

No hay problema conceptual al hacer esto, excepto que ¡décadas de teoría de modelos fueron desarrolladas para sentencias "de primer orden", es decir sin estas conjunciones o disyunciones infinitas!

En particular, el teorema de compacidad de la lógica de primer orden falla en $L_{\omega_1\omega}$.

Sin embargo, aproximadamente desde 1980, Shelah había iniciado un proyecto enorme, llamado "teoría de la clasificación para clases no elementales". Intenta desarrollar herramientas similares a las que hay en primer orden, pero para clases que no necesariamente sean axiomatizables en primer orden.

Aunque inicialmente Zilber desarrolló herramientas específicas para un análisis modelo-teórico de los complejos con exponencial, solo hasta febrero de 2001 tendía lugar un acercamiento más sólido al proyecto de clasificación en clases no elementales (vía las llamadas *clases excelentes* y en general las *clases elementales abstractas*).

5.1. La clase de Zilber.

Definición 2. *$\mathcal{K}_{exp}$ es la clase de estructuras $(M, +, \cdot, ex)$ tales que ψ_{ex}, donde ψ_{ex} es la sentencia (en $L_{\omega_1\omega}(Q)$) conjunción de las siguientes seis:*

1. $(M, +\cdot)$ es un campo algebraicamente cerrado de característica 0.
2. ex es una función de M en M tal que $ex(x + y) = ex(x) \cdot ex(y)$
3. (EC) $(M, +, \cdot, ex)$ es existencialmente cerrada,
4. (CC) $(M, +, \cdot, ex)$ es contablemente cerrada,

5. (SK) El núcleo de ex es estándar
6. (SC) $(M, +, \cdot, ex)$ satisface la conjetura de Schanuel.

La función ex es llamada una "pseudoexponencial" en este contexto.

Observe que 1 es la conjunción de los axiomas de campos con los axiomas de clausura algebraica (contables) con los de característica 0, claramente expresable en $L_{\omega_1\omega}$:

$$\bigwedge \mathrm{TC} \wedge \bigwedge_{n<\omega} \forall y_0 \cdots \forall y_n \exists z (y_n z^n + \cdots + y_1 z + y_0 = 0) \wedge \bigwedge_{1\leq n<\omega} \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0.$$

(SK) es

$$\exists a \forall x (\exp(x) = 1 \rightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} x = n \cdot a).$$

(SC), la conjetura de Schanuel, es una hipótesis fuerte que permite que la clase pueda tener una estructura de dimensión razonable: Dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes,

$$\mathrm{tr.deg.}_{/\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}) \geq n.$$

(CC) requiere el cuantificador Q. [La interpretación de $Qx\varphi(x)$ es "existe una cantidad no contable de x tales que $\varphi(x)$.]

La Conjetura de Schanuel es un problema abierto de la estructura de los complejos, muy difícil de acuerdo con los expertos en el área. De ser válida, muchas otras preguntas abiertas acerca de la estructura de los complejos quedarían resueltas también. Por ejemplo, e y π resultan mutuamente trascendentes si vale la Conjetura de Schanuel: como πi y 1 son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, por (SC) se tiene que de los cuatro complejos

$$\pi i, 1, -1 = e^{\pi i}, e = e1,$$

al menos dos deben ser mutuamente trascendentes. Claramente, 1 y -1 no pueden estar en ese par, luego πi y e deben ser mutuamente trascendentes.

5.2. El contexto amplio. La conclusión principal de la construcción anterior es que se puede llevar a cabo análisis modelo-teórico de $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$, pero *no mediante la axiomatización en primer orden,* sino mediante una axiomatización adecuada (en este caso en $L_{\omega_1\omega}(Q)$. El problema inicial es que la teoría de modelos había sido, hasta fecha relativamente reciente, desarrollada principalmente para lógica de primer orden, y no en el caso más general de axiomatizaciones distintas. La ausencia de un teorema de compacidad en la mayoría de los otros casos haría creer (inicialmente) que no es posible llevar a cabo un buen análisis modelo-teórico (clasificación, estudio de definibles, interpretación de grupos, dimensión y rangos, etc.) en estructuras que, como $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$, no soportan un buen análisis modelo-teórico en primer orden.

En el caso de nuestra estructura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$ aparece una convergencia de trabajos distintos sumamente interesante: por un lado, Zilber, motivado por tratar de entender qué son realmente[13] las estructuras-contraejemplo a su conjetura original, empieza a hacer *de manera directa* el análisis modelo-teórico de $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp\rangle$ – en la clase asociada de manera natural $\mathcal{K}_{exp}$ arma (¿descubre?) nociones de minimalidad, de dimensión, control local del comportamiento de tipos, construcciones adecuadas de modelos primos, etc. Y por otro lado, Shelah desde inicios de los años 80 había empezado la línea enorme de investigación que consiste en *extender la teoría de la clasificación a muchas clases no elementales*[14]. Shelah y algunos otros modelo-teoristas ya habían desarrollado algunas herramientas aplicables en principio a muchas clases no elementales. Los resultados más profundos de transferencia de categoricidad se tenían hasta entonces para clases "homogéneas" y "excelentes".

En febrero de 2001, Zilber presentó resultados y preguntas sobre clases de estructuras relacionadas con $\mathcal{K}_{exp}$, durante el MAMLS Meeting en la universidad de Rutgers. La presencia de varios de los que trabajamos en clasificación para clases no elementales[15] durante la presentación de Zilber tuvo el efecto de acercar los dos enfoques por primera vez. En particular, después de pocos meses, Zilber logró demostrar que la clase $\mathcal{K}_{exp}$, dotada de una relación binaria $\prec_{\mathcal{K}_{exp}}$ natural al contexto[16] (que dota la clase de una noción que podríamos llamar de "subestructura pseudoelemental") resulta ser una clase elemental abstracta "excelente".

Esto tiene muchas consecuencias profundas sobre la estructura de las "pseudoexponenciales" que aparecen en la clase $\prec_{\mathcal{K}_{exp}}$, de las cuales quiero resaltar en este momento dos que son cruciales:

Teorema 3. *(Zilber - 2002) $\prec_{\mathcal{K}_{exp}}$ es una clase excelente.*

Teorema 4. *(Zilber - 2002) $\prec_{\mathcal{K}_{exp}}$ es $\aleph_1$-categórica.*

Esta, combinada con el siguiente teorema de Shelah[17], tiene como consecuencia la categoricidad de la clase $\prec_{\mathcal{K}_{exp}}$ en $2^{\aleph_0}$.

Teorema 5. *(Shelah - 1987) Dada una clase excelente $\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ es categórica en algún cardinal no contable, entonces es categórica en todo cardinal no contable.*

El plan de Zilber se puede entonces ver como un intento de estudiar $(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$ en "dos etapas":

---

[13]En el sentido de biinterpretabilidad.

[14]Shelah dice en [18]: "Classifying non-elementary classes ... I see this as the major problem of model theory."

[15]Shelah, Grossberg, Lessmann, VanDieren, Kolesnikov y yo.

[16]$M \prec_{\mathcal{K}_{exp}} N$ ssi M es un subcampo de N y dado $X \subset M$, $[\text{tr.deg.}_{/\mathbb{Q}}(X)]^M = [\text{tr.deg.}_{/\mathbb{Q}}(X)]^N$.

[17]El primer teorema grande "à la Morley" para contextos distintos a primer orden.

1. Armar pseudoexponenciales con características 'deseables'. Usar una construcción de límite de estructuras con dimensiones razonables (y que satisfagan (SC)), para agregar (mediante aproximaciones) una función f que se comporte como una exponencial. Probar que $\psi_{ex}^{L_{\omega_1\omega}}$ es categórica (verificar excelencia para poder usar el teorema5).
2. Demostrar que $(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$ satisface ψ_{ex}.

En realidad, los dos resultados anteriores marcan el inicio de un tema potencialmente enorme: estudiar otras estructuras analíticas mediante las técnicas usadas para el caso de la exponencial. Zilber, y su estudiante Misha Gavrilovich en [5] han estudiado varias otras clases elementales abstractas, llamadas en general clases pseudo-analíticas, para las cuales la categoricidad en $\aleph_1$ no es difícil de establecer. Entre estas cabe mencionar varios cubrimientos (mediante grupos) de variedades que generalizan el caso del cubrimiento exponencial

$$\mathbb{C}^+ \xrightarrow{exp} \mathbb{C},$$

o incluso clases pseudo-analíticas que no provengan directamente de cubrimientos (el caso de la función ζ de Riemann trae dificultades adicionales al producir la clase de Zilber asociada, aún en proceso de ser aclaradas).

Para esas clases pseudo-analíticas, en general es un problema difícil establecer la categoricidad en cardinales a partir de $\aleph_2$. Sin embargo, trabajos recientes de Grossberg y VanDieren [6] , y de Lessmann [13] (basados en el artículo [17] que da origen a todos los resultados de categoricidad en clases con amalgamación - Grossberg y VanDieren, y luego Lessmann estudian con precisión el caso *dócil* (*tame*), que cubre varias clases de Zilber).

Referencias

[1] John T. Baldwin and A.H. Lachlan. On strongly minimal sets. *Journal of Symbolic Logic*, 36:79–96, 1971.

[2] Lenore Blum. *Generalized Algebraic Structures: A Model Theoretical Approach*. PhD thesis, MIT, 1968.

[3] Elisabeth Bouscaren, editor. *Model Theory and Algebraic Geometry*. Number 1696 in LNM. Springer Verlag, 1998.

[4] Sergio Fajardo and Jerome Keisler. *Model Theory of Stochastic Processes*. Number 14 in Lecture Notes in Logic. AK Peters, 2002.

[5] Misha Gavrilovich. Covers of algebraic varieties. Preprint, 2004.

[6] Rami Grossberg and Monica VanDieren. Upward Categoricity Transfer Theorem for Tame Abstract Elementary Classes. preprint, 2004.

[7] Kitty Holland. An introduction to fusion of strongly minimal sets - the geometry of fusions.

[8] Ehud Hrushovski. The Mordell-Lang Conjecture for Function Fields. *Journal of the AMS*, to appear.

[9] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Annals of Pure and Applied Logic*, 62:147–166, 1993.

[10] Ehud Hrushovski and Boris Zilber. Zariski geometries. *AMS Bulletin*, 28 no. 2:315–323, 1993.

[11] José Iovino. A quick introduction to Banach space model theory. preprint.
[12] José Iovino. The Morley Rank of a Banach space. *The Journal of Symbolic Logic*, 1997.
[13] Olivier Lessmann. Upward Categoricity from a Successor Cardinal for Tame Abstract Classes with Amalgamation. preprint.
[14] Javier Moreno. Teoría de modelos geométrica y aplicaciones. Tesis de pregrado - Universidad Nacional de Colombia, 2001.
[15] Michael Morley. Categoricity in Power. *Trans. A.M.S.*, 114:514–538, 1965.
[16] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis*. Princeton University Press, 1966.
[17] Saharon Shelah. Categoricity of abstract classes with amalgamation. *Annals of Pure and Applied Logic*, accepted.
[18] Saharon Shelah. On what I do not understand (and have something to say) II. *Preprint*.
[19] Saharon Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, xxxiv+705 pp, 1990.
[20] Alex Wilkie. *Algebraic Model Theory*. Kluwer, 1997.