De los Rios J., David S., Mosquera S. 2009. Estabilidad en un Sistema de Control. Revista Sigma, 9 (2). Pág. 25-32
http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX2/4.pdf

**REVISTA SIGMA**
Departamento de Matemáticas
*Universidad de Nariño*

*Volumen IX N° 2 (2009), páginas 25-32*

# Estabilidad en un Sistema de Control

Jairo De los Rios
Sandra David
Saulo Mosquera López [1]

Abstract. In 1985, P.J. Holmes stated the non linear system

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + g(x) &= -z \\ \dot{z} + \alpha z &= \alpha\gamma x \end{aligned}$$

with the purpose of analysing certain kind of control system of feedback. Taking $g(x) = x(x^2 - 1)$ and $\dot{x} = y$ a non linear systems is obtained which present a non hyperbolic point in its origin whose stability id being studied.

*Keywords.* Bifurcation, Non Hyperbolic point, stability.

Resumen. P.J. Holmes en 1985 planteó el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + g(x) &= -z \\ \dot{z} + \alpha z &= \alpha\gamma x \end{aligned}$$

con el propósito de analizar cierta clase de sistemas de control retro-alimentados. Tomando $g(x) = x(x^2 - 1)$ y $\dot{x} = y$ se obtiene un sistema no lineal de primer orden el cual presenta un punto de equilibrio no hiperbólico en el origen, para el que se estudia su estabilidad.

*Palabras Clave.* Bifurcación, Punto de Equilibrio no Hiperbólico, Estabilidad.

## Introducción

En 1985 P.J. Holmes propuso el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + g(x) &= -z \\ \dot{z} + \alpha z &= \alpha\gamma x \end{aligned}$$

para estudiar cierta clase de sistemas de control retroalimentados en los cuales $x$ representa el desplazamiento del sistema oscilatorio con rigidez no lineal $g(x)$, coeficiente de amortiguamiento $\delta$ y retroalimentación negativa $z$. El sistema posee una dinámica de primer

[1] Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño

orden con constante de tiempo $\frac{1}{\alpha}$, ganancia $\gamma$ y corresponde al modelo más simple para un sistema elástico no lineal cuya posición es controlada por un servomecanismo con inercia despreciable. En esta ocasión se desea tratar el problema propuesto por S. Wiggins en el cual $g(x) = x(x^2 - 1)$, en particular se analizará la estabilidad del punto de equilibrio no hiperbólico en el origen que ocurre en el plano $(\delta, \gamma)$ al fijar $\alpha > 0$, con $\delta$ y $\gamma$ positivos.

# 1. Preliminares

Dado un campo vectorial que depende de un parámetro

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; \lambda \in \mathbb{R}^k \tag{1}$$

donde $f$ es $C^r$ en algún abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ y $(x_0, \lambda_0)$ es un punto fijo de $f$, dos preguntas básicas son las siguientes:

1. El punto fijo $(x_0, \lambda_0)$ es estable o inestable?
2. Cómo cambia la estabilidad, la inestabilidad del punto fijo al pasar $\lambda$ a través de $\lambda_0$?

Al linealizar (1) alrededor del punto fijo se tiene el sistema

$$\dot{y} = J_x(x_0, \lambda_0)y, \;\; y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

y bajo ciertas condiciones la respuesta a los dos interrogantes está determinada por el sistema lineal (2).

- Si $(x_0, \lambda_0)$ es un punto fijo hiperbólico (valores propios con parte real no nula) entonces para los sistemas (1) y (2) el punto de equilibrio $(x_0, \lambda_0)$ tiene el mismo tipo de estabilidad y puesto que puntos fijos hiperbólicos son estruturalmente estables entonces al variar $\lambda$ ligeramente la naturaleza de la estabilidad del punto fijo se conserva.
- Si $(x_0, \lambda_0)$ es no hiperbólico la linealización alrededor del punto fijo no proporciona información sobre la estabilidad del punto fijo y debe usarse la teoría sobre la variedad central. Este será nuestro referente teórico básico.

# 2. Puntos de equilibrio y superficies de bifurcación para el sistema de control

El cambio de variable $y = \dot{x}$ produce el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y - z \\ \dot{z} &= \alpha\gamma x - \alpha z \end{aligned} \tag{3}$$

el cual tiene como puntos fijos

$$\begin{aligned} P_0 &: (x, y, z) = (0, 0, 0) \\ P_+ &: (x, y, z) = (\sqrt{1-\gamma}, 0, \gamma\sqrt{1-\gamma}) \\ P_- &: (x, y, z) = (-\sqrt{1-\gamma}, 0, -\gamma\sqrt{1-\gamma}) \end{aligned} \tag{4}$$

y estos dos últimos existen para $\gamma < 1$.

Puesto que la matriz jacobiana del sistema es

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-3x^2 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

entonces en los puntos de equilibrio se tiene que

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J(P_\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\gamma-2 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

cuyos polinomios característicos son respectivamente

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \lambda^3 + (\alpha+\delta)\lambda^2 + (\alpha\delta - 1)\lambda + (\gamma-1)\alpha \\ &\text{y} \\ p_\pm(\lambda) &= \lambda^3 + (\alpha+\delta)\lambda^2 + (\alpha\delta + 2 - 3\gamma)\lambda + 2\alpha(1-\gamma) \\ &= \lambda(\lambda^2 + (\alpha\delta + 2 - 3\gamma)) + (\alpha+\delta)(\lambda^2 + \frac{2\alpha(1-\gamma)}{\alpha+\delta}) \end{aligned}$$

los cuales determinan los valores propios de $J(P_0)$ y $J(P_\pm)$.
En el espacio $(\alpha, \delta, \gamma)$ se tiene:

1. si $\gamma = 1$ entonces
$$p_0(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + (\alpha+\delta)\lambda + (\alpha\delta - 1))$$
y por lo tanto los valores propios son:
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ &\text{y} \\ \lambda_{2,3} &= \frac{-(\alpha+\delta) \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$
con $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$ y $P_0$ es un punto fijo no hiperbólico.

2. Si $\gamma > 1$ entonces
$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \lambda^3 + (\alpha+\delta)\lambda^2 + (\alpha\delta - 1)\lambda + (\gamma-1)\alpha \\ &= \lambda(\lambda^2 + (\alpha\delta - 1)) + (\alpha+\delta)\left(\lambda^2 + \frac{(\gamma-1)\alpha}{(\alpha+\delta)}\right) \end{aligned}$$
y cuando $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}\left(\alpha^2 + \alpha\delta - 1\right)$ algunos cálculos algebraicos muestran que
$$\frac{(\gamma-1)\alpha}{\alpha+\delta} = (\alpha\delta - 1) > 0$$
así
$$p_0(\lambda) = (\lambda + (\alpha+\delta))(\lambda^2 + (\alpha\delta - 1))$$
y $p_0(\lambda)$ tiene una raíz real negativa y dos imaginarias puras y por tanto $P_0$ es un punto fijo no hiperbólico.

3. Si $\gamma < 1$ entonces existen $P_\pm$ y

$$p_\pm(\lambda) = \lambda\Big(\lambda^2 + (\alpha\delta + 2 - 3\gamma)\Big) + (\alpha+\delta)\Big(\lambda^2 + \frac{2\alpha(1-\gamma)}{\alpha+\delta}\Big)$$

nuevamente cálculos algebraicos muestran que:

$$\alpha\delta + 2 - 3\gamma = \frac{2\alpha(1-\gamma)}{\alpha+\delta} = \frac{2\alpha(1-\alpha\delta)}{\alpha+3\delta} > 0$$

cuando

$$\gamma = \frac{\delta\big(\alpha^2 + \alpha\delta + 2\big)}{(\alpha+3\delta)}$$

así

$$p_\pm(\lambda) = (\lambda + (\alpha+\delta))\Big(\lambda^2 + \frac{2\alpha(1-\alpha\delta)}{\alpha+3\delta}\Big)$$

y $p_\pm(\lambda)$ posee un valor propio real negativo y dos imaginarios puros, por lo que $P_\pm$ son puntos fijos no hiperbólicos.

Por tanto en el espacio $(\alpha,\delta,\gamma)$ el sistema de control (3) tiene como superficies de bifurcación a $\gamma = 1$, $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$, $\gamma > 1$ y $\gamma = \frac{\delta(\alpha^2+\alpha\delta+2)}{(\alpha+3\delta)}$, $0 < \gamma < 1$.

Obsérvese que estas superficies se cortan sobre la curva $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ en cuyo caso

$$p_0(\lambda) = p_\pm(\lambda) = \lambda^2\Big(\lambda + \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\Big)$$

y por lo tanto $p_0(\lambda)$ posee como valor propio doble a $\lambda = 0$ y el tercer valor propio es negativo con $\lambda = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}$

## 3. Estabilidad del punto de equilibrio no hiperbólico $(0,0,0)$

En este caso la matriz jacobiana en $P_0 = (0,0,0)$

$$J_0(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & -1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

tiene como valor propio doble $\lambda = 0$ y como tercer valor propio $\lambda = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}$, así la teoría lineal y el teorema de Hartman-Grobman no pueden aplicarse. Los vectores propios correspondientes a los espacios propios generalizados son respectivamente $f_1 = (1,\alpha,0)$, $f_2 = (\alpha,0,\alpha)$ y $f_3 = (1, -\frac{\alpha^2+1}{\alpha}, -\alpha^2)$ y por tanto el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & -\frac{\alpha^2+1}{\alpha} \\ 0 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

permite transformar el sistema no lineal

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -\dfrac{1}{\alpha} & -1\\ \alpha & 0 & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -x^3\\ 0\end{pmatrix}$$

en el sistema

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\dfrac{\alpha(u+\alpha v+w)^3}{1+\alpha^2}\\ \dfrac{\alpha^2(u+\alpha v+w)^3}{(1+\alpha^2)^2}\\ \dfrac{\alpha(u+\alpha v+w)^3}{(1+\alpha^2)^2}\end{pmatrix}$$

donde $J = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\end{pmatrix}$ es la forma canónica real de Jordan de $J_0(P_0)$. Así el nuevo sistema no lineal es

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{-\alpha}{(1+\alpha^2)}(u+\alpha v+w)^3\\ \dot{v} &= u + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v+w)^3\\ \dot{w} &= -\frac{\alpha^2+1}{\alpha}w + \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v+w)^3\end{aligned}$$

y por el teorema 1 ([1], Capítulo 2, sección 2,3) este sistema posee una variedad central $W^c(0)$:

$$W^c(0) = \{(u,v,w) : h(u,v) = w, h(0,0) = 0, \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 0, \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 0\}$$

que localmente se puede representar como la gráfica de una función $h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(u,v) = w$ definida en una vecindad $U$ de $(0,0)$. Por el mismo teorema, el flujo del sistema de control restringido a $W^c(0)$ está determinado por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{-\alpha}{(1+\alpha^2)}(u+\alpha v+h(u,v))^3\\ \dot{v} &= u + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v+h(u,v))^3\end{aligned}. \tag{5}$$

sistema para el cual se debe calcular la función $h$.
Usando la expresión (2,1,10) de [3], sección 2,1$A$, esta función debe satisfacer la ecuación diferencial parcial:

$$\begin{aligned}&-\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}(u+\alpha v+h(u,v))^3\frac{\partial h}{\partial u} + u\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v+h(u,v))^3\frac{\partial h}{\partial v}\\ &+\frac{\alpha^2+1}{\alpha}h(u,v) - \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v+h(u,v))^3 = 0\end{aligned}$$

y las condiciones

$$h(0,0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 0$$

y puesto que por el teorema 3 ([1], Capítulo 2, sección 2,5) la variedad central puede ser aproximada arbitrariamente por polinomios, entonces podemos tomar

$$h(u,v) = a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2 + a_4u^3 + a_5u^2v + a_6uv^2 + a_7v^3 + \cdots$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y efectuando los cálculos necesarios se encuentra que:

$$h(u,v) = \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2+1)^6}u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4+1)}{(\alpha^2+1)^5}u^2v + \frac{\alpha^4(1-2\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^4}uv^2 + \cdots$$

Por último sustituyendo $h(u,v)$ en (5) se obtiene que el flujo reducido a la variedad central está determinado por:

$$\begin{aligned}\dot{u} = &-\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}\Bigg(u + \alpha v + \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2+1)^6}u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4+1)}{(\alpha^2+1)^5}u^2v \\ &+ \frac{\alpha^4(1-2\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^4}uv^2 + \cdots\Bigg)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{v} = u &+ \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\Bigg(u + \alpha v + \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2+1)^6}u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4+1)}{(\alpha^2+1)^5}u^2v \\ &+ \frac{\alpha^4(1-2\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^4}uv^2 + \cdots\Bigg)^3\end{aligned}$$

en el cual despreciando las potencias superiores a tres, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}(u+\alpha v)^3 + \cdots \\ \dot{v} &= u + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}(u+\alpha v)^3 + \cdots\end{aligned}$$

sistema para el cual el origen es asintóticamente estable y por tanto por el teorema 2 ([1], Capítulo 2, sección 2,4) también lo es para el sistema de control.

# 4. Simulaciones Numéricas del Sistema de Holmes

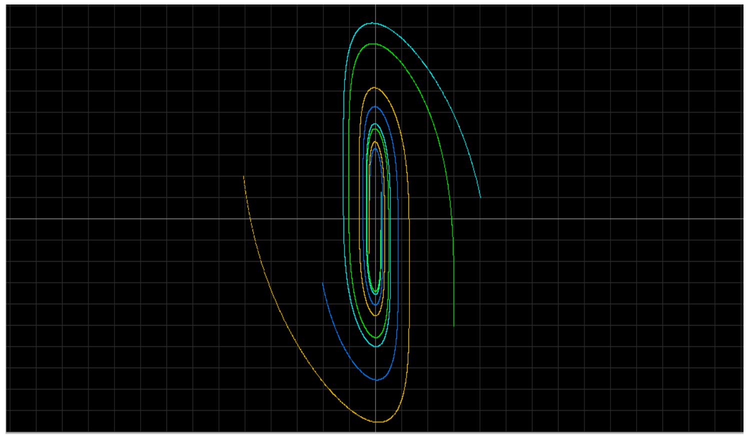

Figura 1: El flujo sobre la Variedad Central $\alpha = 0{,}5$

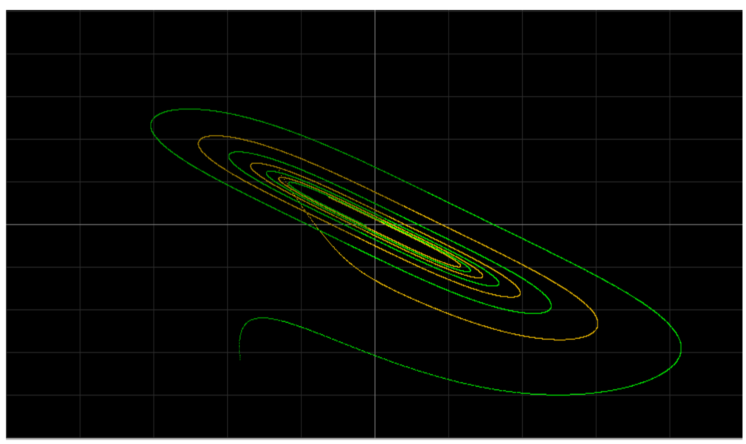

Figura 2: El flujo del Sistema Tres Dimensional $\alpha = 0{,}5$

## Referencias

[1] Carr,J. *Applications of centre manifold theory*, Springer−Verlag, New York, 1981.

[2] David, S. y De los Rios, J. *Estabilidad en un Oscilador no Lineal con un control de ciclo cerrado*, Universidad de Nariño, Tesis de Pregrado. Pasto, Nariño, Colombia. 2008.

[3] Holmes, P.J.*Dynamics of a Nonlinear oscillator with Feedback Control: Local Analysis.*, Department of Theorical and Applied Mechanics and Center for Applied Mathematics, Cornell University, Vol 107, june 1985, Ithaca, N.Y.

[4] Wiggins, S. *Introducction to applied non linear dynamical systems and chaos*, Springer−Verlag, New York, 1990.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño