ChAVES A. 2009. La Fórmula Fundamental de la Geometría Euclidiana. Revista Sigma, 9 (2). Pág. 1-11 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX2/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX N° 2 (2009), páginas 1-11

La Fórmula Fundamental de la Geometría no Euclidiana

Andrés Chaves Beltrán [1]

Abstract. One appears two different forms to obtain the formula of non-euclidian geometry. First assuming the idea of Taurinus, over the formulas hyperbolic geometry are obtained soon from the trigonometry of a sphere with imaginary radio and finally whit rigor of Lobachevsky in their book [5]

Keywords. Non-euclideans geometry, hyperbolic geometry, spheric trigonometry, angle of parallelism.

Resumen. El presente artículo presenta dos formas distintas de obtener la llamada fórmula de la geometría no euclidiana. La primera asume la idea de Taurinus en cuanto que las fórmulas de la geometría hiperbólica se obtienen de la trigonometría de una esfera con radio imaginario, por último, desde el rigor de Lobachevsky en su obra [5].

Palabras Clave. Geometrías no euclidianas, geometría hiperbólica, trigonometría esférica, ángulo de paralelismo.

Introducción

La historia del problema del postulado de las paralelas inicia en el siglo III A.C con Euclides, pero en este artículo se abordará desde el trabajo de Gerolamo Saccheri, [4] en 1733.
Saccheri fué el primer autor que intentó probar la validez del quinto postulado de Euclides por contradicción, es decir, probando que su negación contradice uno de los primeros 4 postulados.
Los estudios de Saccheri se basaron en un cuadrilátero isósceles birrectángulo, que en la posteridad se ha conocido como cuadrilátero de Saccheri y que se ilustra en la figura 1.

[1] Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

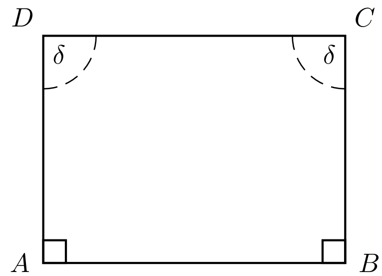

Fig.1

El quinto postulado de Euclides es equivalente a la proposición denominada Hipótesis del Ángulo Recto: "En un cuadrilátero de Saccheri, $ABCD$, cuyos ángulos de la base A y B son rectos, y los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son iguales, el ángulo en C es recto, y por lo tanto el ángulo en D también lo es." Puede probarse, usando los 4 primeros postulados de Euclides, que los ángulos en C y en D son iguales, en consecuencia la negación de la Hipótesis del Ángulo Recto es:
"dado un cuadrilátero de Saccheri, $ABCD$, de ángulos en la base rectos ($\overline{AB}$ es la base), de lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son iguales, entonces los ángulos en C y D son i) Obtusos ó ii) Agudos."
A la opción i) se le llama Hipótesis del Ángulo Obtuso -HAO- y a ii) Hipótesis del Ángulo Agudo -HAA-.
Efectivamente, Saccheri encuentra que HAO contradice el segundo postulado de Euclides, que afirma, en esencia, que la recta es infinita en longitud.
La prueba de Saccheri no demuestra la inexistencia de una geometría no euclidiana donde las rectas son finitas y sea válida HAO. En efecto, tal reconocimiento se le hizo localmente a la geometría de la esfera y globalmente a la geometría del plano proyectivo.
La contradicción que Saccheri encuentra en HAA, en esencia no llega a contradecir ninguno de los primeros 4 postulados. Presenta un argumento forzado, en el que "extiende propiedades al infinito válidas únicamente para figuras situadas a distancia finita " [2]
Del libro de Bonola [6] se puede conjeturar que la obra de Saccheri fué conocida por J.H. Lambert, al punto que su negación del postulado quinto la llama HAO ó HAA.
Las contribuciones de Lambert, entorno al surgimiento de las geometrías no euclidianas, son las siguientes:

I. Asumiendo la veracidad de HAA, el área de un triángulo es proporcional a su defecto. El defecto de un triángulo es dos ángulos rectos menos la suma de sus ángulos internos.

II. Si se cumple HAA, a cada segmento se le puede hacer corresponder el ángulo del triángulo equilátero formado por él; en consecuencia la medida de longitudes se reduce a la medida de ángulos, que es una medida absoluta, la cual no es posible tener en geometría euclidiana.

III. En el caso de una esfera de radio imaginario, se obtiene una geometría en la cual HAA es válida.

La última observación se basa en el siguiente hecho: dado un triángulo esférico de ángulos A, B, C, su área es $r^2(A+B+C-\pi)$, donde r es el radio de la esfera. Al reemplazar el radio r por ir (donde i es la unidad imaginaria), se obtiene que el área será $(ir)^2(A+B+C-\pi)$ $= -r^2(A+B+C-\pi) = r^2(\pi-(A+B+C))$. Puesto que las áreas son positivas, se tiene que $A+B+C<\pi$, que es una equivalencia de HAA.

[2] [2], (apartado 3.1.2), en el que se puede ampliar esta afirmación.

De la trigonometría esférica se tienen las fórmulas fundamentales, en efecto, dado un triángulo esférico de lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C respectivamente, entonces

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \tag{1}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \tag{2}$$

$$\cos A = \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C \tag{3}$$

Fórmulas que se pueden seguir de cualquier libro de trigonometría esférica, las cuales permiten encontrar tres elementos desconocidos de un triángulo esférico, conociendo los otros tres.
A diferencia de la geometría euclidiana, en la esférica si se conocen los tres ángulos, se puede obtener los tres lados del triángulo, lo que se puede verificar, despejando a de la ecuación (3), y por permutación de letras, se puede hallar b y c; mientras que en geometría euclidiana, existen triángulos semejantes no congruentes.
La geometría de una esfera imaginaria fué sugerida por Lambert para trabajar la HAA, y desarrollada por Taurinus en su obra Elementa [1826].

1. La esfera imaginaria de Taurinus

Taurinus se interesó en este tema por la influencia de su tío, el abogado Schweikart, quien nunca publicó su trabajo, en el que desarrolló una geometría independiente del postulado de las paralelas, y donde menciona los trabajos de Lambert y Saccheri al respecto.
Taurinus empieza con las fórmulas de trigonometría esférica y reemplaza los lados reales de un triángulo, por lados imaginarios, de lo que obtiene:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} ib = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} ia \tag{4}$$

$$\cos ia = \cos ib \cos ic + \operatorname{sen} ib \operatorname{sen} ic \cos A \tag{5}$$

$$\cos A = \cos ia \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C \tag{6}$$

Pero ¿Qué sentido tienen $\operatorname{sen} i\theta$ y $\cos i\theta$ en estas ecuaciones de variables reales?
De Euler se conocía que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{x^n}{n!})$, cambiando la variable x por ix, $e^{ix} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$, que es un número complejo, donde su parte real es la sumatoria de los n pares y su parte imaginaria es la de los n impares, así que

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

La primera sumatoria de la derecha de la igualdad es $\cos x$ y la segunda sumatoria es $\operatorname{sen} x$, así que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

ahora, cambiando la variable x por ix, se tiene:

$$e^{-x} = \cos ix + i \operatorname{sen} ix \tag{7}$$

cambiando ahora la variable $-x$ por x, se llega a $e^x = \cos(-ix) + i\operatorname{sen}(-ix)$, ahora, como cos es una función par y sen es impar se tiene:

$$e^{x} = \cos ix - i \operatorname{sen} ix \tag{8}$$

Con el fin de saber a que es igual $\cos ix$ se suman (7) y (8), de donde $e^{-x} + e^{x} = 2\cos ix$; ahora para despejar $\operatorname{sen} ix$, a (7) se resta (8), obteniendo $e^{-x} - e^{x} = 2i \operatorname{sen} ix$ y por lo tanto,

$$\frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cos ix$$

y

$$\frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = \operatorname{sen} ix$$

La expresión $i \operatorname{sen} ix$ Lambert la llamó *seno hiperbólico de* x y $\cos ix$ la llamó *coseno hiperbólico de* x, debido a que se pueden obtener de la parametrización de la hipérbola, y las cuales son reales.

De (5) $\cos ia = \cos ib \cos ic + \operatorname{sen} ib \operatorname{sen} ic \cos A$, se tiene que

$$\cosh a = \cosh b \cosh c + \operatorname{sen} ib \operatorname{sen} ic \cos A$$

pero $\operatorname{sen} ix = \frac{\operatorname{senh} x}{-i}$, así que

$$\cosh a = \cosh b \cosh c + \frac{\operatorname{sen} ib}{-i} \frac{\operatorname{sen} ic}{-i} \cos A$$

por lo tanto $\cosh a = \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos A$

De forma similar al abordar (4) y (6), se obtienen las fórmulas fundamentales de la trigonometría hiperbólica:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{senh} b = \operatorname{sen} B \operatorname{senh} a \tag{9}$$

$$\cosh a = \cosh b \cos hc - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos A \tag{10}$$

$$\cos A = \cosh a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C \tag{11}$$

Supóngase un triángulo hiperbólico equilátero, haciendo uso de (10):

$$\cosh a = [\cosh a]^2 - [\operatorname{senh} a]^2 \cos A$$

despejando $\cos A$,

$$\cos A = \frac{[\cosh a]^2 - \cos ha}{[\operatorname{senh} a]^2} = \frac{\cosh a(\cos ha - 1)}{[\cosh a]^2 - 1} = \frac{\cosh a}{1 + [\cosh a]}$$

Como $a > 0$, $\cosh a > 1$, así que $\cos A > \frac{1}{2}$ entonces $A < \frac{\pi}{3}$. Por lo tanto la suma de los tres ángulos es menor que π, lo que corresponde a estar ubicado en HAA.

Suponiendo ahora con un triángulo hiperbólico rectángulo en el ángulo opuesto a c en el cual se hace tender b a infinito, como se ilustra en la figura 2.

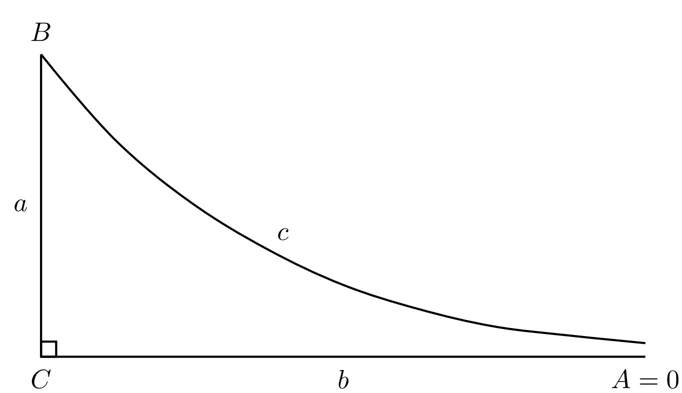

Fig.2

Reemplazando en (11) $\cos A = \cosh a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C$ donde se conocen los valores de los ángulos en $C = \frac{\pi}{2}, A = 0$ y el valor de a es fijo. Entonces $1 = \cosh a \operatorname{sen} B$, por lo tanto $\frac{1}{\cosh a} = \operatorname{sen} B$. De $[\cos B]^2 + [\operatorname{sen} B]^2 = 1$ se obtiene que $\cos B = \tanh a$.

Usando la identidad trigonométrica $\tan \frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen} B}{1+\cos B}$ y reemplazando se tiene

$$\tan \frac{1}{2}B = \frac{1}{\cosh a(1 + \frac{\operatorname{senh} a}{\cosh a})} = \frac{1}{\cosh a + \operatorname{senh} a}$$

haciendo uso ahora de $\frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$ y $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$ así que

$$\tan \frac{1}{2}B = \frac{1}{\frac{e^{-a}+e^{a}}{2} + \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}} = \frac{2}{2e^{a}}$$

Por lo tanto

$$\tan \frac{1}{2}B = e^{-a}$$

que es la fórmula fundamental de la geometría no euclidiana, donde B es el llamado ángulo de paralelismo en a.

2. Presentación de Lobachevski

Con base en la figura anterior, y tomando CA como una recta y B un punto exterior a ésta, se definirá el concepto de rectas paralelas y ángulo de paralelismo, los cuales son base del desarrollo de la teoría de las paralelas de Lobachevski.

Todas las rectas que pasan por B coplanares con CA se clasificarán entre *las que cortan a* CA y *las que no cortan a* CA.

A las *líneas frontera* de una y otra clase se les conoce como paralelas a CA por el punto B.

Se denominan *líneas frontera* porque generalmente son dos, una a cada lado de la perpendicular BC. El caso en el cual existe una única recta paralela (la cual será paralela a ambos lados de C) es el de la geometría euclidiana.

Se puede afirmar que una línea recta BM es paralela a otra CA en el lado que se extiende $\vec{CA}$, si:

(i) $\vec{BM}$ no corta a CA

(ii)Toda recta que pase por B que forme con la perpendicular CB un ángulo menor que el ángulo MBC corta a $\vec{CA}$.

Sea BM la paralela a CA por el punto B en la dirección de $\vec{CA}$ -rayo prolongado desde A-. Se define el ángulo MBC entre la paralela BM y la perpendicular BC como *ángulo de paralelismo* el cual se denotará por $\Pi(a)$ para $BC = a$.

$\Pi(a)$ se puede caracterizar por las siguientes dos condiciones:

i)Todo $\vec{BN}$ donde $NBC < \Pi(a)$ corta al rayo $\vec{CA}$

ii) Ningún $\vec{BD}$ donde $DBC \geq \Pi(a)$ corta a $\vec{CA}$

Lo anterior se representa en la figura 3.

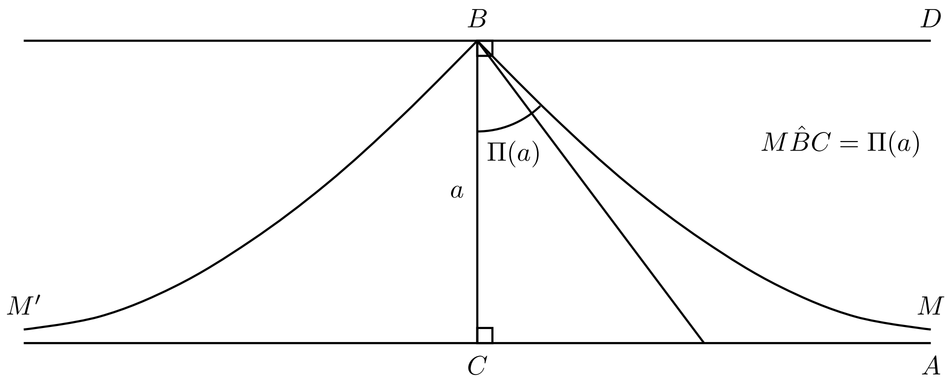

Fig.3

Fácilmente se observa que en geometría euclidiana el *ángulo de paralelismo* es una función costante igual a $\frac{\pi}{2}$.
Lobachevski enuncia la proposición *dos rectas perpendiculares a una tercera no se intersecan, por más que puedan ser prolongadas*, de donde inmediatamente se descarta que $\Pi(x) > \frac{\pi}{2}$ para algún $x > 0$; pues ya existiría una recta no cortante entre las dos supuestas paralelas.
Para obtener la fórmula fundamental de la geometría no euclidiana, se asumirá lo siguiente:

I. $\lim\limits_{p\to\infty} \Pi(p) = 0$ y $\lim\limits_{p\to 0} \Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, también $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$, como una forma de extender el dominio de Π a los reales negativos.(Proposición 23 de Lobachevski).

II. La transitividad del paralelismo *si dos rectas son paralelas a una tercera, lo serán entre ellas.*(Proposición 25 de Lobachevski). La demostración de esta proposición es de gran dificultad comparándola con la demostración que se puede realizar en geometría euclidiana; en las pruebas hechas por Lobachevski, por Gauss y por Bolyai se ha recurrido al espacio.

III. Dado un triángulo rectilíneo rectángulo de lados a, b, c, y de ángulos opuestos $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ respectivamente; se tiene:

$$\operatorname{sen}\Pi(c) = \operatorname{sen}\Pi(a)\operatorname{sen}\Pi(b)$$

$$\operatorname{sen}\Pi(\beta) = \cos\Pi(\alpha)\operatorname{sen}\Pi(a)$$

$$\operatorname{sen}\Pi(\alpha) = \cos\Pi(\beta)\operatorname{sen}\Pi(b)$$

$$\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cos\Pi(\alpha)$$

$$\cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos\Pi(\beta).$$

(Proposición 35 de Lobachevski).

Prolónguese la hipotenusa c después del vértice B de tal forma que dicha prolongación sea igual a β, es decir $BD = \beta$, donde D es el extremo de la prolongación. La perpendicular levantada a β desde D (la cual se llamará DD') en el lado opuesto al triángulo, será paralela a a y a su prolongación después del vértice B. Trácese a través del vértice A, una línea paralela a esta misma prolongación de a. El ángulo que esta línea forma con c será $\Pi(c+\beta)$, y el ángulo con b será $\Pi(b)$, lo que se representa en la figura 4. Así, se tiene la ecuación

$$\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(\alpha) \tag{12}$$

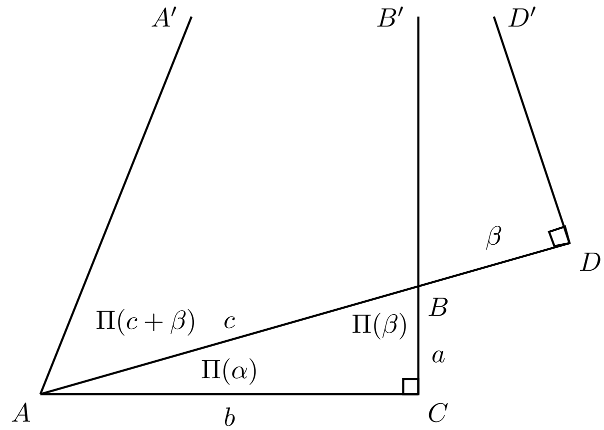

Fig.4

Si se toma sobre el mismo lado c la longitud β (asumiendo $\beta < c$) a partir del vértice B y levantando en su extremo D dentro del triángulo una perpendicular DD', esta perpendicular será paralela a a y a su prolongación a través del vértice C (la cual se llamará CC'). Ahora desde el punto A paralela a DD' se traza AA', que será también paralela a CC' (por la transitividad del paralelismo), así, se tiene el ángulo $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c - \beta)$, lo que se representa en la figura 5, por consiguiente

$$\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b)$$

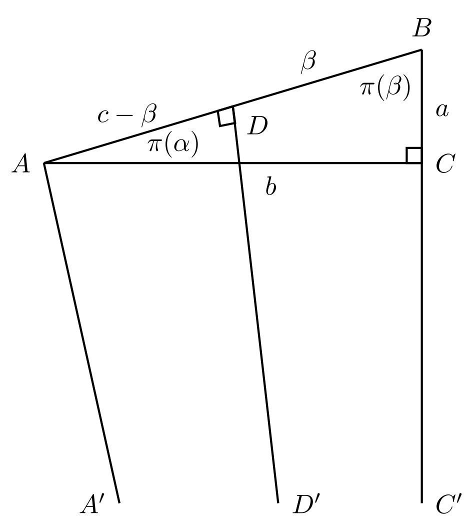

Fig.5

Esta última ecuación es también cierta aún cuando $c = \beta$, o $c < \beta$. En el caso de $c = \beta$, se tiene $\Pi(c - \beta) = \Pi(0) = \frac{\pi}{2}$; y por otra parte, la perpendicular a c trazada por el vértice A, será paralela a a, de lo cual se sigue que $\Pi(b) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$; lo cual cumple la ecuación enunciada y se representa en la figura 6.

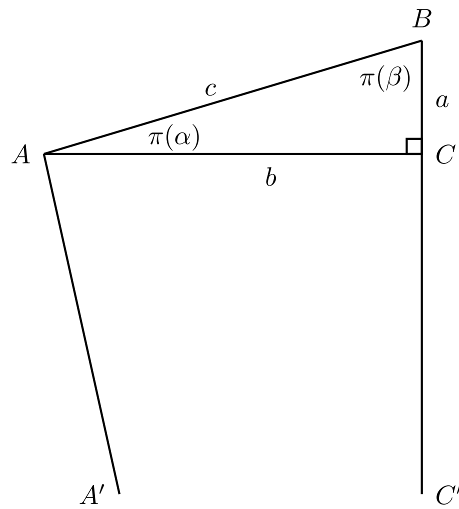

Fig.6

Si $c < \beta$, el extremo D de β estará más allá del vértice A, a una distancia igual a $\beta - c$, como se representa en la figura 7. Así, siguiendo el mismo proceso anterior, se tiene el ángulo $DAA' = \Pi(\beta - c)$, por consiguiente

$$\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta),$$

y por tanto

$$\Pi(a) + \Pi(b) = \Pi(c - \beta) \tag{13}$$

(Proposición 23 de Lobachevski), que es lo que se quería probar.

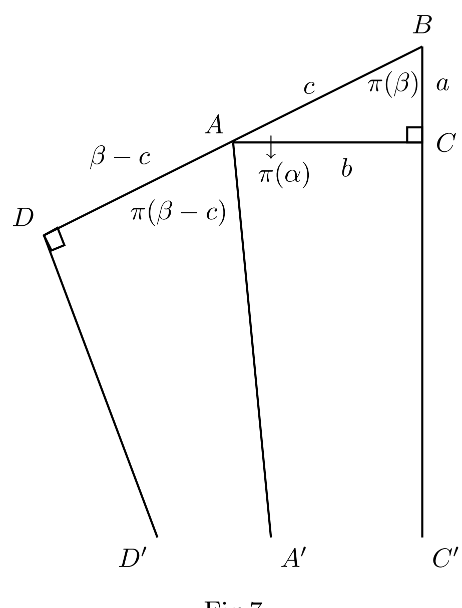

Fig.7

De la combinación de las dos ecuaciones encontradas ((12) y (13)) se tiene, que al sumarlas

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

y al restar la segunda de la primera

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

donde se sigue que

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \frac{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}{cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}$$

Uno de los resultados de la (Proposición 35) es $\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \cos\Pi(c)$. Ahora, usando la identidad $[\tan\frac{1}{2}\pi(c)]^2 = \frac{1-\cos\Pi(c)}{1+\cos\Pi(c)}$ se tiene

$$[\tan\frac{1}{2}\Pi(c)]^2 = \frac{1-\frac{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}{cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}}{1+\frac{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}{cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}}$$

y al operar se obtiene

$$[tan\frac{1}{2}\Pi(c)]^2 = tan\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)tan\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)$$

Obsérvese que $[\tan\frac{1}{2}\Pi(0)] = [\tan\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}] = 1$, y que $[\tan\frac{1}{2}\Pi(-c)] = [\tan\frac{1}{2}(\pi-\Pi(c))] = [\tan\frac{1}{2}\Pi(c)]^{-1}$.
Defínase ahora $f(c) = [\tan\frac{1}{2}\Pi(c)]$, y asúmase que f y su derivada f' son continuas. También se sabe que $f(0) = 1$ y $f(-c) = [f(c)]^{-1}$.
Se tiene ahora la ecuación funcional

$$(*) \quad [f(c)]^2 = f(c-\beta)f(c+\beta) \qquad \text{para todo } c \text{ y todo } \beta \in \mathbf{R}$$

Por otro lado defínase la función g de la forma siguiente $g(c) = f(\alpha c)$. Se verificará que $[g(c)]^2 = g(c-\beta)g(c+\beta)$.

$$[g(c)]^2 = [f(\alpha c)]^2 = f(\alpha c-\beta)f(\alpha c+\beta)$$

ahora, como β es cualquier número, tómese $\beta = \alpha t$ donde t$\in$ $\mathbf{R}$, así que $[g(c)]^2 = f(\alpha c-\alpha t)f(\alpha c+\alpha t) = f[\alpha(c-t)]f[\alpha(c+t)] = g(c-t)g(c+t)$.
Como $g(c) = f(\alpha c)$, se tiene $g'(c) = \alpha f'(\alpha c)$, así que $g'(0) = \alpha f'(0)$. Asumiendo $\alpha = -g'(0)$, así que $f'(0) = -1$.
Derivando ahora en (*) respecto a c

$$2f(c)f'(c) = f(c-\beta)f'(c+\beta) + f'(c-\beta)f(c+\beta)$$

si $c = 0$, nos queda

$$2f(0)f'(0) = f(-\beta)f'(\beta) + f'(-\beta)f(\beta)$$

$$(**) \quad -2 = f(-\beta)f'(\beta) + f'(-\beta)f(\beta) \qquad \text{pero como}$$

$f(-\beta) = [f(\beta)]^{-1}$, $f(-\beta)f(\beta) = 1$, así que

$$f(-\beta)f'(\beta) - f'(-\beta)f(\beta) = 0 \qquad \text{entonces}$$

$$f(-\beta)f'(\beta) = f'(-\beta)f(\beta) \qquad \text{y}$$

$$f'(-\beta) = \frac{f'(\beta)}{[f(\beta)]^2}$$

Reemplazando en (**) se tiene

$$-2 = f(-\beta)f'(\beta) + \frac{f'(\beta)}{[f(\beta)]^2}f(\beta) = \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} + \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = 2\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}$$

de lo que se sigue que

$$f(\beta) = -f'(\beta), \qquad \text{por lo tanto}$$

$$f(\beta) = e^{-\beta} \qquad \text{Así, se llega a}$$

$$tan\frac{1}{2}\Pi(c) = e^{-c}$$

la cual es conocida como la fórmula fundamental de la geometría no euclidiana.
De esta fórmula, despejando $\Pi(c)$, se tiene

$$\Pi(c) = 2arctane^{-c}$$

cuya gráfica se puede obtener por métodos de cálculo.

Agradecimientos. El autor agradece a Cristian Camilo Espitia por la elaboración de las gráficas.

Referencias

[1] CHAVES, A., (2001). *Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español*, Trabajo de grado. Universidad del Valle. Colombia. 2

[2] ESPITIA, C., *La obra saccheriana en el surgimiento de las geometrías no euclidianas*), Trabajo de grado. Universidad de Nariño. Pasto. 2

[3] EUCLIDES. *Elements* (traducción inglesa de T. L. Heath, 1956), Dover, Nueva York.

[4] SACCHERI, G., (1733). *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides liberado de toda imperfección). 1

[5] LOBACHEVSKI, N.,(1840). *Geometrical researches on the theory of parallels* (traducción de G. B. Halsted); véase Bonola (1912). 1

[6] BONOLA, R., (1912, reimpresión de 1955): *NON-EUCLIDEAN GEOMETRY* (traducción de H.S. Carslaw), Dover, Nueva York. 2

[7] GRAY, J.,(1992). *Ideas de espacio*, (traducción de F.Romero), Biblioteca Mondadori.

e-mail: `ancbel@yahoo.es`