Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 2 (2008), pp. 130–161

DE LEIBNIZ A D'ALEMBERT: DIEZ PROBLEMAS QUE MARCARON UN SIGLO

JUAN E. NÁPOLES VALDES (*)

RESUMEN. En este trabajo, presentamos una colección de problemas que incidieron directamente en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, resueltos a lo largo de un siglo y que permitieron consolidar a éstas, como una rama independiente del Calculus, a pesar de su origen común, y cómo este desarrollo puede ser ilustrado por el propio avance conceptual y metodológico de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

PALABRAS CLAVES. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 34-03 , 01A60

ABSTRACT. In this work, we present a collection of problems solved throughout a century, that impacted directly in the development of Ordinary Differential Equations, and that allowed to consolidate them, as an independent branch of Calculus, in spite of its common origin. This development can be illustrated by the own conceptual and methodological advance of ordinary differential equations.

KEY WORDS AND PHRASES. Ordinary differential equations.

(*) Juan E. Nápoles Valdes. FACENA-UNNE, Ave. Libertad 5450, (3400) Corrientes, Argentina. E-mail: napoles4369@gmail y FRRE-UTN, French 414, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina. E-mail: jnapoles@frre.utn.edu.ar.

Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el ignorabimus

D. Hilbert (En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, París, 1900[1])

1. Prólogo

No se debe ver la Historia de las Matemáticas como una marcha triunfal a lo largo de una avenida sin obstáculos. Al contrario, esta historia presenta numerosas interrupciones, y el camino seguido raramente se parece a una línea recta, encontrándose incluso a veces en un callejón sin salida....Ha habido avances bruscos debidos a nuevos conceptos que respondieron a problemas a veces muy alejados de las cuestiones iniciales que los habían generado.

Hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, la concepción que se tenía del Universo cambia, debido en gran medida, a los aportes de diversos matemáticos que, en su afán de resolver nuevos y complejos problemas, tanto matemáticos como metodológicos, crearon un *corpus* de conocimientos que hicieron avanzar la Ciencia como nunca antes. Se ve que la Naturaleza tiene una serie de regularidades que se pueden analizar y predecir; de hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era, por tanto, dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.

Uno de los principales logros de este siglo, fue establecer ecuaciones para modelar fenómenos físicos, aún cuando no hubo grandes éxitos al tratar de resolverlas.

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo período de desarrollo matemático, para el siglo XVII se habían formado las premisas esenciales: existencia del álgebra ya formada y de la técnica de cálculo, introducción en las matemáticas de la variable y el método de coordenadas; asimilación de las ideas infinitesimales de los antiguos, especialmente de Arquímedes; acumulación de métodos de resolución de problemas del cálculo de cuadraturas, curvaturas, determinación de centros de gravedad, búsqueda de tangentes, extremales, etc., en este proceso tomaron parte muchos matemáticos destacados: Galileo, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Wallis, Roberval, Fermat, Descartes y Barrow entre otros.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII, con gran asombro y entusiasmo, se convencían de la gran cantidad de problemas de geometría y mecánica, aparentemente difíciles, que conducían a las cuadraturas. Cada año, cada

nuevo resultado revelaba la generalidad de las operaciones, las cuales era necesario aplicar en la resolución de estos problemas. En esta dirección, son un ejemplo característico los trabajos de John Wallis (1616-1703), profesor de la Universidad de Oxford (desde 1649), uno de los fundadores de la Royal Society de Londres (en 1663), quien editó su **"Arithmetica Infinitorum"** en 1655 enviándole un ejemplar a Fermat.
Las ideas que incluyen elementos de integración definida se difundieron ampliamente entre los matemáticos de los países de Europa Occidental, estos abarcaban amplias clases de funciones algebraicas y trigonométricas. Era necesario sólo un impulso, la consideración de la totalidad de los métodos bajo un punto de vista único, para cambiar radicalmente toda la problemática de la integración y crear el cálculo integral.
En el transcurso del siglo XVII los problemas diferenciales aún se resolvían por los métodos más diversos. Ya en la escuela de Galileo para la búsqueda de tangentes y normales a las curvas se aplicaban sistemáticamente los métodos cinemáticos, recordemos la obtención de la ley de la caída libre de los cuerpos ($s=gt^2/2$). En ellos la tangente surgía como la diagonal del paralelogramo, cuyos lados eran la componente horizontal y vertical de la velocidad, este método cinemático dió comienzo a la consideración de diversos lanzamientos y movimientos complejos y a la determinación de la tangente en cualquier punto de su

trayectoria. La exposición sistemática del método y sus aplicaciones más importantes la dió en el año 1640 Roberval. A pesar de su importancia, el método cinemático era muy incómodo, ya que partía de particularidades individuales de las curvas, y por eso no era lo suficiente algorítmico. De aquí que, en aquella época, éste tenía mejores perspectivas para la determinación de tangentes y normales el método de las normales de Descartes, contenido en el segundo libro de su **"Geometría"**.
La acumulación de los diferentes métodos integrales y diferenciales, hace que el terreno para el salto de calidad definitivo en las Matemáticas, esté ya preparado. En nuestro trabajo, mostraremos algunos problemas que incidieron directamente en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, resueltos a lo largo de un siglo y que permitieron consolidar a éstas, como una rama independiente del Calculus, a pesar de su origen común y como este desarrollo puede ser ilustrado por el propio avance conceptual y metodológico de las ecuaciones diferenciales ordinarias[2].

2. Los primeros 45 años

Los intentos por resolver problemas físicos, llevaron gradualmente a considerar modelos matemáticos que contienen una ecuación, en la que una función y sus derivadas juegan un papel importante, estas son conocidas como Ecuaciones Diferenciales y si la función es de una sola variable independiente, son llamadas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Sin embargo, el desarrollo teórico de esta área de las Matemáticas, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, tiene sus orígenes en un pequeño número de problemas matemáticos. Estos problemas y

---

[2]De esta manera, intentamos, sin ánimo de ser exhaustivo, completar el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales, iniciado con diversos trabajos que han estado enfocados al desarrollo cualitativo de las mismas, entre estos recomendamos **"El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas"**, Boletín de Matemáticas, V(1998), 53-79 (http://www.matematicas.unal.edu.co/revistas/boletin/vol5n1/98050105.pdf); **"Del caos y esas cosas. Una introducción comentada a la matemática contemporánea"**, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, No.3, 2001, 65-74; **"Ley, orden y caos en el Universo"**, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, No.4, 2001, 67-76; **"La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto"**, Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática, Año 3, No.2, 2002, 33-57 (http://www.uaq.mx/matemáticas/redm/); **"El papel de la historia en la integración de los marcos geométrico, algebraico y numérico en las ecuaciones diferenciales ordinarias"**, Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, Vol.4, No.1, Mayo 2003 (http://www.itcr.ac.cr/carreras/matematica/revistamate/ContribucionesV4n12003/ PapeldeLaHist/pag1.htm); **"La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico"**, Revista de Educación y Pedagogía, XV, no.35, 2003, 163-182 y **"Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales"**, Revista Lecturas Matemáticas, Vol.25(2004), 59-111 (www.scm.org.co/Articulos/740.pdf).

sus soluciones, llevaron a una disciplina independiente en la cual, la solución de tales ecuaciones era un fin en sí mismo.
Es común identificar el inicio del estudio de las ecuaciones diferenciales con el del Calculus, por el núcleo común de herramientas y conceptos. Así, se usa la fecha del 11 de Noviembre de 1675[3], cuándo Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) escribió la ecuación $\int \mathbf{xdx=(1/2)x^2}$ como el inicio de la historia de las ecuaciones diferenciales. No obstante, un poco más concreto es el hecho que el Calculus apareció impreso, por primera vez, en una memoria de seis páginas de Leibniz en el **Acta Eruditorium** de 1684, que contenía una definición de diferencial y donde dió pequeñas reglas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces[4]. También incluyó pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos. Desdichadamente, este corto informe contuvo algunos errores, lo que contribuyó a que permaneciera enigmático a los matemáticos de la época.
La búsqueda de métodos generales para integrar las ecuaciones diferenciales empezaron cuándo Newton (1642-1727), clasificó las ecuaciones diferenciales de primer orden en tres clases[5], $dy/dx=f(x)$; $dy/dx=f(x,y)$ e $x\partial u/\partial x+y\partial u/\partial y=u$. Las primeras dos clases contienen sólo las derivadas ordinarias de una o más variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente (ordinarias). La tercera clase contiene derivadas parciales de una variable dependiente y se llaman hoy ecuaciones diferenciales parciales.
Ante todo, la simple inversión de los resultados de la búsqueda de fluxiones le dió a Newton una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operación de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas como $Mx'+Ny'=0$, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no se obtenía la función original. Newton advirtió esto, en el caso en que $M=M(x,y)$ y $N=N(x,y)$ fueran funciones racionales enteras.
Cuando la inversión inmediata del método directo no conducía al éxito, Newton acudía al desarrollo de las funciones en series de potencias como medio universal de la teoría de las fluxiones. La ecuación dada la resuelve, por ejemplo, respecto

[3]Ince, E.L.-**"Ordinary Differential Equations"**, 1st Edition, 1956, Dover Publications, Inc., New York. En realidad, Ince afirma *"...por lo tanto no resolvió una ecuación diferencial, la cual por si misma es un asunto trivial, sino que fue un acto de un gran momento, fraguando una herramienta poderosa, el signo de integral".*

[4]Una excelente traducción del trabajo de Leibniz de 1684 aparece en D. E. Smith-**"A Source Book in Mathematics"**, New York, 1929, pp.619-626 (reimpreso: New York Public Library, New York, 1951-1952. Reimpreso: Dover, New York, 1959. Reseñado: Isis 14(1930), 268-270). Sobre la trascendencia y repercusiones del surgimiento del Calculus en la Matemática y la Física, principalmente, trata L. Motz and J. Hane W.-**"Conquering Mathematics; From Arithmetic to Calculus"**, Plenum, New York and London, 1991 y **"Mathématiques et Mathématiciens"**, Magnard, París, 1959 de P. Dedron et J. Itard.

[5]Newton, I.-**"The Mathematical Works"**, ed. D.T. Whiteside, 2 Vols, Johnson Reprint Corp., 1964-67.

a y'/x' (ó poniendo x=1) respecto a y, y desarrolla la función del miembro derecho en series de potencias y a continuación esta serie la integra término a término[6]. Este método lo comunicó mediante un anagrama (históricamente, el segundo más importante en su correspondencia con Leibniz, vía Oldenburg) el cual dice lo siguiente *"El primer método consiste en la extracción de una cantidad fluente de la ecuación que contiene su fluxión, el segundo en cambio consiste en la mera sustitución de una serie en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de la cual pueden deducirse fácilmente las otras, y en comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante para obtener los términos de la serie supuesta"*[7].

Aunque Newton notó que la ecuación poseía un número infinito de soluciones particulares, no sería hasta mediado del siglo XVIII que el significado completo de este hecho, es decir, que la solución general de una ecuación de primer orden depende de una constante arbitraria, fue asimilado.

Sólo en casos especiales puede una ecuación diferencial particular ser integrable en una forma finita, es decir, su solución expresada finitamente en términos de funciones conocidas. En el caso general, dependemos de soluciones expresadas como series infinitas, en la que los coeficientes son determinados por fórmulas de recurrencia.

En 1682, Leibniz llegó a ser colaborador *habitué* de la nueva revista de Leipzig, **Acta Eruditorum**, en la que publicó los seis trabajos, sobre el cálculo diferencial en 1684[8], que hicieron época, seguidos dos años después (en 1686) por un artículo que contiene los rudimentos del cálculo integral[9].

Ante los creadores del Calculus, el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, en su inicio, se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Naturalmente la atención, al inicio, se concentró en las diferentes ecuaciones de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con ayuda de métodos más o menos exitosamente elegidos. Para reducir este problema a la operación de búsqueda de funciones primitivas, los creadores del análisis y sus discípulos, tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. Este método con el que actualmente comienzan los textos sistemáticos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero.

---

[6]Newton,I.-**"Opuscula mathematica, philosophica et philological"**, 3 vols, Lausannae and Genevae, 1744.

[7]Ver Leibniz-Newton-**"El Cálculo Infinitesimal origen-polémica"**, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1977, p. 29.

[8]Struik, D.J.-**"A Source Book in Mathematics, 1200-1800"**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1986 (ver Nota 2).

[9]Leibniz, G.-**"Mathematische Schriften"**, ed. by C.J. Gerhardt, Gesammelte Werke. Ed. by G.H. Pertz. Third Series, Mathematik. 7 vols., Halle, 1849-63.

En primer lugar, señalaremos que el término **aequatio differentialis**, fue primeramente usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676 para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y[10]; concepción que se conserva hasta los tiempos de Euler (en los años 1768-1770). Es importante recordar, como ya dijimos, que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias surgen prácticamente con la aparición del Calculus; en la célebre polémica Newton-Leibniz se tiene un gran momento cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:

6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x

el cual en latín quiere decir *"Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa"*, o bien: *"Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa"*. Este fue, como dice Arnold, el descubrimiento fundamental de Newton que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa *"Es útil resolver ecuaciones diferenciales"*.

A modo de completitud, es conveniente resaltar algunas de las características más importantes con que abandonamos el momento histórico de Newton-Leibniz:

1. En esta época los problemas todavía eran abordados con una visión geométrico-euclidiana. Tanto Leibniz como Newton, elaboran sus conceptualizaciones matemáticas en términos de entes geométricos en los que se representan las propiedades y conceptos. Esto era una consecuencia de lo *restringido que se encontraba el concepto de función* en el siglo XVII. La noción de función permanecía aún ligada a la idea de curva geométrica. En este sentido, obviamente el concepto de tangente era el euclidiano. En Leibniz hay un elemento diferente aunque ambiguo, de concebir la recta tangente como aquella que une dos puntos infinitamente próximos. De todas maneras la noción que se manejaba de recta tangente era netamente intuitiva.
2. El cálculo tanto de Newton como el de Leibniz trataba de cantidades variables. En Leibniz una sucesión de valores infinitamente próximos; en Newton cantidades que variaban con el tiempo. El primero concibe el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales. El segundo tiene una idea intuitiva de movimiento continuo cercana al concepto de límite. Newton prefería referirse a lo indefinidamente pequeño en términos de *últimas razones.*

[10]Ver Ince-**Ob. Cit.**, p. 3; no obstante, existen historiadores que afirman la imposibilidad de ser precisos, por ejemplo M. Kline-**"Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"**, Oxford University Press, 1972, llegando incluso a contraponerse ambos en sus afirmaciones, pues mientras Ince afirma que fue Leibniz quien primero habló explícitamente de ecuaciones diferenciales (ver antes), Kline por el contrario dice que fue Huygens en el **Acta Eruditorium** de 1693, e incluso con una fecha distinta a la dada por Kline.

En la última década del siglo XVII los hermanos Bernoulli (James y Johan) introducen términos como el de "integrarüna ecuación diferencial, así como el proceso de "separación de variables"(**separatio indeterminatarum**) de una ecuación diferencial, dando inicio a una época que estuvo signada por los aportes de esta familia.
James Bernoulli (1654-1705) escribió a Leibniz en 1687, pidiéndole una iniciación en los misterios del nuevo análisis. Como Leibniz viaja al exterior, la carta de Bernoulli quedó sin respuesta hasta 1690.
Mientras tanto, él y su hermano Johan Bernoulli (1667-1748) "desentrañaron" los misterios sin ayuda. Su éxito inició una correspondencia extensa con Leibniz. En estas cartas están contenidas muchas innovaciones y anticipaciones de los métodos más importantes[11]. En 1692 James hizo conocido el método de integrar la ecuación diferencial homogénea de primer orden, y no mucho después redujo a cuadraturas el problema de integrar una ecuación lineal de primer orden[12]. Los descubrimientos originales de, prácticamente todos los métodos elementales conocidos para resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden, se sucedieron (como ya dijimos) durante la dinastía de los Bernoulli.
Los Bernoulli fueron una familia suiza de eruditos cuyas contribuciones a las ecuaciones diferenciales atravesaron los siglos XVII y XVIII (durante tres generaciones, ocho representantes de los Bernoulli se distinguieron en el campo de las Matemáticas). Nikolaus Bernoulli I (1623-1708) fue el progenitor de esta familia célebre de matemáticos. James I, Johan I, y Daniel I son los miembros más conocidos de la familia de los Bernoulli por sus muchas contribuciones a este campo nuevo de las ecuaciones diferenciales[13].
Sirvan estos comentarios como preámbulo para la presentación de los problemas que hemos seleccionados como ilustrativos para la centuria 1675-1775.

3. Primer Problema

En mayo de 1690, James Bernoulli publicó en el **Acta Eruditorum** su solución al problema de la isócrona[14]. El problema de la isócrona (anticipado por Leibniz un año antes) contiene la curva isócrona, una curva por la que un cuerpo caerá con velocidad vertical uniforme. Este problema llevó a una ecuación que contiene la igualdad de dos diferenciales. De esto James Bernoulli concluyó que

---

[11] Watson, G.N.-**"A Treatise on the Theory of Bessel Functions"**, 2nd ed., pp.1-3, Cambridge, London, 1944.

[12] Gerhardt, C.-**"Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz"**, Halle, 1848, p. 25.

[13] Para amplios detalles sobre la vida y obra de los Bernoulli, recomendamos ttp://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/

[14] Eves, H.-**"An Introduction to the History of Mathematics"**, 4th Edition, 1976, Holt, Rinehold and Winston, New York y Leibniz, G.-**"Mathematische Schriften"**.

las integrales de los dos miembros de la ecuación eran iguales y utilizó la palabra integral por primera vez en su trabajo en el **Acta Eruditorum** de 1696[15]. En realidad este trabajo de James Bernoulli, es el que llamó la atención de los lectores a la *nueva matemática*. La solución encontrada fue la Lemniscata que en honor a los hermanos Bernoulli paso a denominarse Lemniscata de Bernoulli. Así, la segunda de las dos principales divisiones del cálculo, llamada el calculus summatorius en aquel tiempo, fue sustituido por el de calculus integralis, o, como nosotros lo conocemos hoy, el cálculo integral.

Del problema de la isócrona vino la idea de obtener la ecuación de una curva que tenga una definición dinámica o cinemática, expresada en términos de una ecuación diferencial, y entonces integrando esta ecuación bajo ciertas condiciones iniciales, se obtendría la curva buscada. La espiral logarítmica es un ejemplo de tal curva, cuya evoluta es ella misma. Jacob Bernoulli al estudiarla, quedó fascinado a tal punto que pidió que se grabara sobre su tumba la leyenda *"Eadem mutata resurgo"* (aunque cambio resurjo [la misma]) mostrando así el renacimiento de esta curva como un símbolo de resurrección.
En 1691 el problema del inverso de tangentes dirigió Leibniz al descubrimiento implícito del método de separación de variables[16]. Sin embargo, sería Johan Bernoulli, en una carta a Leibniz, fechada el 9 de mayo de 1694, quien dió el proceso explícito y el término, ***indeterminatarum de seperatio*** o separación de variables[17], como ya apuntamos.

[15] Bernoulli, James-**"Acta Eruditorum"**, 1695, Ostwald's Klassiker, No. 46, Engelmann, Leipzig, 1894.
[16] Gerhardt, C.-**"Entdeckung der Hoeheren Analyse"**, Halle, 1855, p. 125.
[17] Bernoulli, James-**"Acta Eruditorum"**, 1695, Ostwald's Klassiker, No. 46, Engelmann, Leipzig, 1894.

Pero en algunos casos, como xdy-ydx=0, el proceso fallaba, puesto que nos lleva a dy/y = dx/x, y dx/x no podía ser integrado.

4. Segundo Problema

En el mismo año, sin embargo, Leibniz resolvió el problema de la cuadratura de la hipérbola, un proceso de encontrar un cuadrado cuya área sea igual al área bajo la curva en un intervalo dado.
El trabajo de John Napier (también conocido como Neper, matemático escocés, 1550-1617) en logaritmos, publicado ochenta años antes, hizo posible la interpretación hecha de Leibniz de la integración del diferencial dx/x como log x[18].
Sin embargo, la etapa esencial de este problema se debe al jesuita Gregoire De Saint-Vincent, nacido en Brujas en 1584 y muerto en 1667. Había acabado la redacción de un **"Opus geometricorum...."** en 1630, en el cual pretendía haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola. Esta obra no fue publicada hasta 1647, y aunque fue un fracaso en cuanto a la cuadratura del círculo, puso en evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos.
El trabajo de este autor no se sitúa en una perspectiva ligada específicamente a los logaritmos, sino más bien en un intento de resolución de problemas generales de cuadraturas, muy de moda en esta época y en un estilo completamente tradicional; el aspecto innovador reside en la utilización de cierto paso al infinito para justificar la primera parte de su demostración.
Estamos sin embargo antes de la era de Leibniz y de Newton. Este último, por ejemplo, utilizando la fórmula del binomio para exponentes negativos, obtiene la Serie de Mercator y de ahí la cuadratura de la hipérbola.

5. Tercer Problema

En 1696, Johan Bernoulli, todavía un estudiante, pero ya rival de sus hermanos mayores, dió un importante ímpetu al estudio de las ecuaciones diferenciales al colocar su famoso problema de la braquistócrona, o sea, encontrar la ecuación del camino en el cual una partícula caerá de un punto a otro en el tiempo más corto[19]:
"Se invita a los matemáticos a resolver UN NUEVO PROBLEMA: Dados dos puntos A y B en el plano vertical y no colocados en la misma recta vertical, asignar a una partícula móvil M el sendero AMB a lo largo de la cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible.

[18]Gerhardt, C.-**"Entdeckung ..."**, p. 41.
[19]Bernoulli, Johan-**"Opera omnia"**, ed. G. Cramer, 4 vols., Lausanne, 1742.

Para estimular a los amantes de tales tareas el deseo de realizar la solución de este problema, puede señalarse que la cuestión propuesta no consiste, como pudiera parecer, en una mera especulación sin entidad alguna. Contra lo que uno pensaría a primera vista, tiene gran utilidad en otras ramas de esta ciencia, tales como la Mecánica. Mientras tanto, para prevenir, cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que aunque la línea AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B, no es, con todo, el sendero atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras"[20].

En realidad esto era un reto encubierto a Newton. Al cabo del año, el plazo original fue de seis meses pero a petición de Leibniz se amplió para que tuvieran tiempo los matemáticos franceses e italianos que se habían enterado tarde, aparecieron cinco soluciones: una de Leibniz, una del mismo Johan Bernoulli, otra de su hermano Jacob Bernoulli, una del Marquéz de L'Hospital y una anónima. Todas, excepto la de L'Hospital daban con la solución: la cicloide. ¿Quién era ese autor anónimo que escogió las **Philosophical Transactions** para publicar su genial solución que sólo contenía 67 palabras?

Un vistazo a la solución fue suficiente para que Johan Bernoulli exclamara *"tanquam ex ungue leonen"*, algo así como *"¡reconozco al león por sus garras!"*

[20]Esta es la redacción más aceptada del problema de la braquistócrona, y la curva en cuestión es la cicloide. Ver D. E. Smith-**"A source ..."**, p. 644.

pues claro está que era Newton. Años más tarde se aclaró toda la historia. Como ya dijimos, el reto estaba dirigido a los matemáticos ingleses en general, y a Newton en particular, justo en el momento en que comenzaba la polémica sobre la prioridad de éste y para ver si el cálculo de Newton era tan bueno y poderoso para resolver problemas. Además, en una carta de Leibniz a Johan Bernoulli éste conjetura que sólo quien conozca el cálculo podrá resolverlo, Newton entre ellos claro está.
Como no podía ser de otra forma el reto llegó a Newton aunque por aquel entonces ya no *hacía ciencia* sino que trabajaba en la Casa de la Moneda inglesa. Según cuenta la sobrina de Newton, este recibió el problema a las 4 de la tarde cuando regresó cansado de la Casa de la Moneda y tenía lista su solución 12 horas después, aunque lo que probablemente no sabía la sobrina era que Newton ya había pensado en ese problema unos años antes y que casi seguro lo había resuelto por lo que sólo tuvo que refrescar la memoria ese día. Nuevamente aparece la misma pregunta: Si Newton ya había resuelto el problema ¿por qué no lo publicó? Como respuesta final a esta pregunta tomaremos la que dió Augusto de Morgan *"Cada descubrimiento de Newton tenía dos aspectos. Newton tuvo que hacerlo y, luego, los demás teníamos que descubrir que él lo había hecho"*.
La ecuación $dy/dx+P(x)y=f(x)y^n$, hoy conocida como la Ecuación de Bernoulli, fue propuesta para la solución por James Bernoulli en diciembre de 1695[21]. Fue transformada mediante la sustitución $y^{1-n}=v$ (primero por Leibniz en 1693 y luego por Johan I en 1697) en una ecuación diferencial lineal de primer orden, aquí Johan anticipó el método de variación de las constantes introducido en 1775 por Lagrange. Finalmente, hacia el año 1700 Johan logró resolver la ecuación diferencial lineal de orden n, $\sum_{i=1}^{n} A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0$, introduciendo un factor integrante de la forma x^p y disminuyendo, sucesivamente, el orden de la ecuación (ver sección 3).
Al año siguiente Leibniz resolvió la ecuación haciendo sustituciones y reduciéndola a una ecuación lineal, semejante al método empleado hoy[22].

6. Cuarto Problema

En 1698, Johan Bernoulli resolvió el problema de determinar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas uniparamétricas, encontrando una curva que corta todas las curvas de una familia en ángulo recto. Con esta solución, el problema de las trayectorias oblicuas también fue resuelto.
Diversos campos de la física plantean el problema de encontrar la ecuación de un haz de curvas que corta las curvas de otro haz dado formando, en todo

[21] Bernoulli, James-**"Acta Eruditorum"**, 1695, Ostwald's Klassiker, No. 46, Engelmann, Leipzig, 1894.
[22] D.J. Struik-**"A Source . . . "**.

punto, ángulos rectos. Si se considera el caso de un haz monoparamétrico de curvas de la forma f(x,y,c) = 0 donde c es un parámetro arbitrario, la solución fue establecida por Johan. Así, él consideró que la ecuación f(x,y,c)=0 representa la solución general de una ecuación diferencial. Esta puede obtenerse eliminando el parámetro c del sistema formado por f(x,y,c)=0 y la derivada de f(x,y,c)=0 respecto de las variables independientes (en este caso x). Considerando f{x,y(x),c[x,y(x)]}=0, se tendrá $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial c}(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dx}) = 0$. Luego debemos considerar el siguiente sistema $\begin{cases} f(x,y,c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$. Eliminando el parámetro c en éste, se obtiene la ecuación diferencial $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Dado que para que dos curvas formen un ángulo recto, las pendientes en el punto de intersección deben ser recíprocas y de signo contrario y, considerando que la pendiente de una curva en un punto determinado está dada por la derivada de la expresión analítica que representa la curva en ese punto; la ecuación diferencial del haz ortogonal de curvas buscado es $f\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$. Virtualmente todos los métodos elementales conocidos hoy para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden habían sido encontradas a fines del siglo XVII. En los primeros años del siglo XVIII varios problemas llevaron a ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden.

7. Quinto Problema

En 1701 James Bernoulli publicó la solución al problema isoperimétrico, un problema en el que se requiere hacer máximo o mínimo una integral, mientras se mantiene constante la integral de una segunda función dada y tiene como resultado una ecuación diferencial de tercer orden[23]. En una carta escrita a Leibniz, el 20 de mayo de 1716, Johan Bernoulli discutió la ecuación $d^2y/dx^2=2y/x^2$, donde la solución general fue escrita en la forma $y=x^2/a+b^2/3x$, en la que se considera tres casos, cuando b tiende a cero las curvas son parábolas; cuando a tiende a infinito, ellas son hipérbolas; en el resto, ellas son de tercer orden[24]. El trabajo en que Jacob resuelve el problema de la braquistócrona lleva el original título **"Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro"**, y efectivamente propone dos nuevos problemas. El primero de ellos se refería a encontrar la curva de trayecto más rápido entre una familia particular de cicloides y fue resuelto por Johann de forma expedita. La segunda cuestión propuesta por Jacob en su trabajo es notable, entre otras cosas, por revivir un enigma antiguo: el problema isoperimétrico. Jacob complicó grandemente el problema, logrando que incluso su enunciado resultara difícil de comprender. Además ofreció una recompensa de 50 ducados a su hermano Johan si aceptaba el reto en un plazo de 3 meses y daba la solución antes de un año. Johann, con su fanfarronería habitual respondió que en lugar de 3 meses no necesitaba más de 3 horas para alcanzar la solución, e incluso para ir más allá y resolver un problema aún más general. Pero en realidad Johann solo resolvió una parte del problema y no precisamente la más importante. Precisamente esta idea incorrecta de Johann que él considera como metodología universal, es lo que provoca un largo y ofensivo intercambio entre los hermanos.

En la **"Eneida"** de Virgilio encontramos una referencia a una interesante propiedad optimal de la circunferencia. La historia, eliminando su belleza poética, es la siguiente *En el siglo IX antes de Cristo, huyendo la princesa fenicia Dido de su hermano Pigmalión, que había asesinado a su marido, llega a las tierras del Norte de África (Túnez) donde alcanza un acuerdo con sus habitantes. Al querer la princesa Dido comprar tierra para establecerse con su pueblo, el rey de aquellas gentes solamente le consiente comprar la parcela de tierra que pueda ser cubierta por la piel de un toro. Dido cortó la piel en finas tiras formando una larga cuerda (de unos 1000 ó 2000 metros) y la dispuso de manera que cubriese la mayor parte de terreno posible...*

Dido resolvió el siguiente problema "Encontrar, entre todas las curvas cerradas de longitud fijada, aquella que delimita la superficie más grande". Su solución

[23]Bernoulli, James-**"Opera omnia"**, ed., G. Cramer, 4 vols, Lausanne, 1742 y D.J. Struik-**"A Source..."**.

[24]Bernoulli, Johan-**"Opera omnia"**, ed. G. Cramer, 4 vols., Lausanne, 1742.

es obvia, la *circunferencia*, pero la demostración completa de esta propiedad necesitó siglos de esfuerzo matemático.
Este problema, en su formulación más general, le permitió a Lagrange, a los diecinueve años de edad, obtener fama al resolverlo, pues había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. Comunicó su demostración en una carta a Euler, el cual se interesó enormemente por la solución, de modo especial en cuanto concordaba con un resultado que él mismo había hallado. Euler con admirable tacto y amabilidad respondió a Lagrange, ocultando deliberadamente su propia obra, de manera que todo el honor recayera sobre su joven amigo.
Sin embargo, a pesar de éstos y otros problemas resueltos, los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales, a comienzos del siglo XVIII, estaba lejos de ser completada.

8. La Ecuación de Riccati (Un problema "amplio", pero el sexto).

En la fría Noche Vieja de 1720, el Conde Jacopo Francesco Riccati[25], un hidalgo de la República de Venecia, escribió una carta a su amigo Giovanni Rizzetti, donde propuso dos nuevas ecuaciones diferenciales. En símbolos modernos, estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:
$x'=\alpha x^2 + \beta t^m$ (1)
$x'=\alpha x^2 + \beta t+\gamma t^2$ (2)
Donde m es una constante y t es la variable independiente. Este es, probablemente, el primer documento que presenta la Ecuación de Riccati, una ecuación que es de suma importancia en nuestros días (en la terminología actual, la primera sería $x^m + dq = du + uudx/q$, con $q=x^n$).
Una manera apropiada de apreciar la contribución de Riccati al cálculo diferencial es consultar su **"Opere"**, un trabajo en 4 volúmenes redactado por su hijo Giordano y publicado en Lucca por G. Rocchi en 1765, después de la muerte de Riccati. Sin embargo, si se está dispuesto a seguir la verdadera sucesión de descubrimientos de Riccati, se debe complementar la lectura de sus publicaciones con la correspondencia que escribió y recibió. El interés principal de Riccati en el área de las ecuaciones diferenciales enfocadas estaba en los métodos de la separación de variables. Probablemente, tal interés se originó en la lectura del

[25]Reportes detallados sobre la vida y obra de Riccati son Di Rovero C.-**"Vita del Conte Jacopo Riccati"**, in *Opere del Conte Jacopo Riccati Nobile Trevigiano*, C. Rocchi, Lucca (Italia), 1765; Michieli A. A.-**"Una famiglia di matematici e di poligrafi trivigiani: i Riccati"**, in *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, tomo 102, Part. II, 1942-43 y Piaia G. y M.L. Soppelsa (eds.)-**"I Riccati e la Cultura della Marca nel Settecento Europeo"**, L.S. Olschki editor, Florencia, 1992.

libro de Gabriele Manfredi **"De constructione aequationum differentialium primi gradusi"** impreso en Bolonia en 1707 (Manfredi ocupó la Cátedra de Matemáticas en la Universidad de Bolonia durante muchos años).
Originalmente, la atención de Riccati se enfocó en el siguiente problema de tipo geométrico: supone que un punto de coordenadas (a,b) describe una trayectoria en el plano según una ecuación diferencial lineal de primer orden, es decir:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

La pregunta es ¿cuál es la ecuación que describe la pendiente $x=\beta/\alpha$? Se ve fácilmente que la ecuación es $x'=ax^2+bx+c$ donde $a=-w_{12}$, $b=-w_{12}-w_{11}$, $c=w_{21}$.
Esta ecuación, caracterizada por una expresión cuadrática en el miembro derecho, es exactamente la ecuación alrededor de la cuál se centró el interés de Riccati. El trató ecuaciones con constantes y parámetros temporales variables, con especial atención a las ecuaciones (1), (2) y

$x'=\alpha t^p x^2 + \beta t^m$ (3)

$x'=\alpha t^p x^q + \beta t^n$. (4)

El Conde Riccati desarrolló varios métodos para la determinación de la solución de estas ecuaciones, tal como el método de ***dimezzata separazione*** (sobre 1715), y el ***coefficienti ed esponenti indeterminati*** (cerca de 1717).
Un compendio de métodos de Riccati se puede encontrar en las notas de la conferencia que él preparó para sus clases privadas a Giuseppe Suzzi y Ludovico Riva, que estudiaron Matemáticas con él durante 1722 y 1723. Subsiguientemente, Suzzi y da Riva llegaron a ser profesores de, respectivamente, Física y Astronomía en la Universidad de Padua. Las notas de las conferencias, que se pueden encontrar en la **"Opere"**, se titulan **"Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo e di secondo grado, e della riduzione delle equazioni del secondo grado e d'altri gradi superiori"** (o sea, De la separación de variables en ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, y en la reducción de ecuaciones diferenciales de segundo orden y órdenes más altas). Las notas (154 páginas) están divididas en tres partes y dos apéndices. En la primera parte (**"Dei metodi inventati dall'autore per separare le indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado"**), los métodos de solución debidos a Riccati se discuten con referencia a ecuaciones diferentes a las que nosotros hoy llamamos "Ecuaciones de Riccati"[26].

[26]El trabajo original de Riccati (en latin) **"Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus"** publicado en **Acta Euroditorum Lipsiae** en 1724 es reproducido en Bittanti S. (ed), **"Count Riccati and the Early Days of the Riccati Equation"**, Pitagora Editrice, Bolonia (Italia), 1989. En el mismo volumen, se pueden encontrar los trabajos de Euler **"De Resolutione Aequationis dy+ayydx=bx^{m}dx"**, publicado en 1764 en **Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae** y de J. Liouville

La discusión de Riccati de casos especiales de curvas cuyos radios de curvatura eran dependientes únicamente de las ordenadas correspondientes, tuvo como resultado que su nombre se asociara (a propuesta de D'Alembert en 1769) con la ecuación clásica
$y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$. (5)
El trabajo de Riccati no ofreció sus propias soluciones, eran de Daniel Bernoulli quien trató exitosamente esta ecuación[27]. En general, esta ecuación no puede ser resuelta por métodos elementales. Sin embargo, si se conoce una solución $y_1(x)$, entonces la solución general tiene la forma $y(x)=y_1(x)+z(x)$, donde $z(x)$ es la solución general de la Ecuación de Bernoulli $z' - (q+2ry_1)z = rz^2$.
La investigación de esta ecuación fue ocupación de muchos matemáticos: Leibniz, Ch. Goldbach (1690-1764), Johan I, Nicolas I (1687-1759) y Daniel Bernoulli entre otros. Daniel estableció que (3) se integra mediante funciones elementales si $m= -2$ ó $m= 4k/(2k-1)$, k entero[28]. La figura de Jacopo Riccati y de sus hijos Vincenzo (1707-1775) y Giordano (1709-1790) son colocados en uno de los períodos más estimulantes de la Historia de la Matemática en general, y de las ecuaciones diferenciales en particular: el intenso ambiente científico europeo y el entusiasmo por la introducción de las necesarias precisiones en los conceptos del Cálculo Infinitesimal[29].
Históricamente, se enfatiza la importancia de la Ecuación de Riccati por el método de solución propuesto por Jacopo en la obra antes señalada, gracias a un cambio de variable, Riccati pudo reducir la ecuación propuesta de segundo grado a una ecuación de primer grado. En tal dirección apuntó Kline[30] *"La obra de Riccati es significativa no solo porque consideró una ecuación diferencial de segundo orden, sino porque tuvo la idea de reducir la ecuación de segundo orden a una ecuación de primer orden. Esta idea de reducción del orden de*

"Remarques Nouvelles sur l'Equation de Riccati", publicado en 1841 en **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**. Un reporte puede ser encontrado en el volumen de P. Dorato y S. Dorato **Italian Culture** (por publicar).

[27]Bernoulli, Daniel-**"Miscellanea Taurinensia"**, Ostwald's Klassiker, Leipzig, 1924. Incluso la ecuación reducida ($R\equiv1$, $Q\equiv0$) es tratada primeramente por Daniel en 1724.

[28]Ver N.M. Matveev-**"Métodos de integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias"**, Escuela Superior, 1963 (en ruso).

[29]Para información adicional sobre la Ecuación de Riccati y la obra de J. Riccati, consultar N.M. Matveev-**Ob. Cit.**; G.T. Bagni-**"Jacopo Ricati matematico"**, La matematica e la sua didattica, 2(1988), 45-51; G.T. Bagni-**"Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati e la matemática del Settecento"**, Teorema, Treviso, 1993; L. Grugnetti-**"L'equazione di Riccati: un acerteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli"**, Boll. Storia Scienze Mat. 6(1986), 45-82; L. Grugnetti-**"Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati"**, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 55(1985), 7-24; J.A. Repilado, J.E. Nápoles y E.A. Pérez-**"Sobre la importancia de la Ecuación de Riccati"**, Bol. Órbita Científica, Nos.1 y 2, 5(1988), 27-31 y J.E. Nápoles-**"Acerca de la importancia de la Ecuación de Riccati"**, Prevista PFE, 1(3), 1995, 36-39.

[30]M. Kline-**"Storia del pensiero matematico". II. Dal Settecento a oggi"**, Einaudi, Torino, 1991.

una ecuación diferencial con cualquier artificio se revelará como uno de los métodos fundamentales para el tratamiento de la ecuación diferencial ordinaria de orden superior".

Al margen de lo señalado aquí y que abundaremos a continuación, es que uno de los rasgos distintivos de esta ecuación (y que nos llevó a considerar el adjetivo "amplio") es el hecho que aún cuando el segundo miembro de (5) sea continuo, y tenga una expresión relativamente "simple", puede no ser posible expresar su solución en términos de funciones elementales.

Más aún, si consideramos en (5) el segundo miembro continuo sobre $(a,b)\subseteq\mathbf{R}$, P(x) no nula sobre dicho intervalo, podemos afirmar, en virtud del ya citado teorema de existencia y unicidad una y solo una curva integral en todo punto de la banda $\{a<x<b;\ y<+\infty\}$. No obstante, contrariamente a lo que sucede con la ecuación lineal de primer orden, las soluciones de la ecuación de Riccati no están, en general, definidas en todo el intervalo (a,b) de continuidad de las funciones P, Q y R. Una prueba de tal afirmación es la ecuación $y'=1+y^2$, el dominio de continuidad del segundo miembro es $\mathbf{R}$, sin embargo, una solución es $y=\tan x$, definida para $-\pi/2<x<\pi/2$.

Estudios posteriores (a partir de Picard[31]) han permitido establecer relaciones aún más precisas entre la ecuación lineal de segundo orden y la Ecuación de Riccati.

Algunas de estas relaciones son las siguientes[32].

Teorema 1. Para que una ecuación lineal de segundo orden sea soluble por cuadraturas, es necesario y suficiente, que la derivada logarítmica de una de las soluciones sea racional.

Teorema 2. Para que la ecuación diferencial de segundo orden $v''+2pv'+qv=0$, sea soluble por cuadraturas, es necesario y suficiente que la transformada de Riccati $u''+u^2+(q-p^2-p')=0$, tenga una solución racional.

O sea, la Ecuación de Riccati permite, incluso, caracterizar la solubilidad por cuadraturas de las ecuaciones lineales de segundo orden[33]. Incluso, en algunos casos especiales, puede decirse mucho más. La teoría de las funciones de Bessel está estrechamente relacionada con la teoría de la Ecuación de Riccati, de hecho, una función de Bessel es usualmente definida como una solución particular de una ecuación lineal de segundo orden llamada la Ecuación de Bessel, la cual es

[31] E. Picard-**"Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques"** (Traité d'analyse, t.3, chapitre 17, Gauthier-Villars (1898) 1928). Publicado separadamente en París, en 1936 y 1976 por Gauthier-Villars, 77p.

[32] Ver ambos resultados en E. Vessiot-**"Sur l'intégration des équations différentielles linéaires"**, Ann. De l'Éc. Normale, 3 Serie, Tome IX, Julliet 1892, 197-280 (Thèse).

[33] En este mismo marco algebraico, podemos añadir los trabajos de I. Kaplansky-**"An introduction to differential álgebra"**, París, Hermann, 1976, 64 p. y M. van der Put and M. F. Singer-**"Galois theory of linear differential equations"**, Springer, 2003, xvii+438 p.

derivada de una Ecuación de Riccati mediante una transformación elemental, como ya sabemos[34].
Ahora bien, ¿en qué consiste la importancia de esta ecuación? Es la ecuación diferencial ordinaria de primer orden más sencilla pero no lineal, que se convierte en una especie de forma canónica, pues diversos problemas prácticos, luego de diferentes transformaciones pueden ser modelados por ella; por ejemplo, en los sistemas mecánicos en los que la resistencia del medio al movimiento del sistema, se expresa mediante una función del cuadrado de la velocidad del movimiento. Por eso no es de extrañar que ha sido profusamente estudiada desde el siglo XVIII, desde distintos puntos de vista; en los últimos 30 años, la cuestión ha sido determinar hasta donde permite avanzar en su estudio la utilización de los grupos de Lie y esclarecer la estructura de las ecuaciones de Riccati que admiten grupos de Lie o, la del conjunto de soluciones. A pesar que en estos momentos, se conocen más ecuaciones de Riccati con soluciones conocidas que ecuaciones de Riccati para las cuales se ha logrado determinar un grupo de Lie admitido por la ecuación[35].

9. La consolidación de los métodos analíticos

En el año 1738 Leonard Euler (1707-1783) aplicó a la resolución de la ecuación (5) la teoría de series. Más adelante descubrió que cuando existen dos soluciones particulares, la integración de la ecuación se reduce a cuadraturas y que si se conoce una solución particular v, entonces ella puede ser transformada en una ecuación lineal mediante la transformación y=v+1/z.

10. Séptimo Problema

Ya a finales de los años 30 del siglo XVIII, Euler elaboró un algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, basado en la reducción del orden de ciertas ecuaciones homogéneas con ayuda de la función exponencial. En el año 1743 en uno de sus trabajos, fue publicado el método de resolución de una ecuación lineal con ayuda de la sustitución $y=e^{kx}$ y en el caso de raíces reales múltiples de la ecuación característica, utilizando $y=u\,e^{kx}$.
En el caso de la existencia de un par de raíces complejas $\alpha \pm$ ßi, utilizó la sustitución $y=ue^{\alpha x}$, sustituciones que reducen el problema a la ecuación d^2y/dx^2 +

[34]Ver G. N. Watson-**"A treatise on the theory of Bessel functions"**, 2^{nd} edition, Cambridge Univ. Press, 1966, viii+804 p.

[35]Para mayores detalles puede consultar M. Polyanin and I. Zaitsev-**"Handbook of exact solutions for ordinary differential equations"**, 2^{nd} edition, Chapman and Hall, CRC, 2003, xxvi+787 p y los trabajos de A. Campos, **"Ecuación de Riccati mediante grupos de Lie"** e **"Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie"**, 1995, 260 p.

ß^{2}y =0, la forma trigonométrica de cuya solución era conocida por Euler desde el año 1740.

Euler proporcionó el próximo desarrollo significativo cuando planteó y resolvió el problema de reducir una clase particular de ecuaciones diferenciales de segundo orden a una de primero. Su proceso de encontrar una segunda solución de una solución conocida, consiste tanto en reducir una ecuación de segundo orden a una de primero, como de encontrar un *factor integrante*. Adicionalmente, Euler confirmó que la proporción de dos factores diferentes que integran una ecuación diferencial de primer orden es una solución de la ecuación[36]. Euler empezó su tratamiento de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes en una carta que él escribió a Johan Bernoulli el 15 de septiembre de 1739, publicada en **Miscellanea Berolinensia**, 1743. En un año, Euler había completado este método para tratar exitosamente factores cuadráticos repetidos y considerando la ecuación lineal no homogénea.

Es a Euler a quien le corresponde la primera sistematización de los trabajos anteriores en sus **"Institutiones Calculi Integralis"** (1768-1770), donde encontramos lo que se puede llamar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta obra contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto actual, como el estudio de las ecuaciones diferenciales de 1er orden (y su correspondiente clasificación en

---

[36]Euler, L.-**"Opera omnia"**, ed., Soc. Scient. Natur. Helveticae, Teubner, Leipzig and Berlin, 1911- Fussli, Zurich; three series.

"separables", "homogéneas", "lineales", "exactas"), las de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden), y su generalización a las de orden superior. Asimismo, encontramos el método de series de potencias para resolver ecuaciones como $y''+ax^ny=0$. Lo que desde nuestra perspectiva, vale destacar de este trabajo, es su forma de *conceptualizar* las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la expresión dy/dx significa para Euler un cociente entre diferenciales y no nuestra derivada actual, en una ecuación de segundo orden aparecen los diferenciales ddy, dx^2 en lugar de la segunda derivada y".
El método de la reducción sucesiva del orden de la ecuación con ayuda de factores integrantes, se utilizó primero en ecuaciones integrables en forma finita. Euler redujo primero estas ecuaciones paso a paso y entonces las integró.
Así, para resolver la ecuación de segundo orden lineal no homogénea procede reduciendo el orden en la siguiente forma. Sea la ecuación:

$$X = Ay + Bdy/dx + Cddy/dx^2,$$

multiplica por el factor $e^{\alpha x}dx$ y obtiene:

$$Xe^{\alpha x}dx = (e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx),$$

como se requiere que el factor $e^{\alpha x}dx$ reduzca el orden en uno, se supone la integral encontrada y se iguala son la ecuación diferencial lineal de primer orden $e^{\alpha x}$ (A'y+B'dy/dx), es decir, se establece la relación:

$$(e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx) = e^{\alpha x}\ (A'y + B'dy/dx).$$

Para que esta igualdad se sostenga se requiere que la diferencial del lado derecho sea igual al integrando del primer miembro, donde A', B' y α son constantes a determinar en términos de A, B y C. Igualando tendremos $A=A'\alpha$, $B=A'+B'\alpha$, $C=B'$ de donde $A'=A/\alpha$, $B'=C$, $B=A/\alpha + C\alpha$.
Es decir, α queda determinada por las raíces de la ecuación cuadrática:

$$A\text{-}B\alpha+C\alpha^2=0.$$

De esta forma la ecuación diferencial de segundo orden se reduce a la ecuación diferencial de primer orden:

$$B'dy/dx + A'y = e^{-\alpha x} \quad \int e^{\alpha x}Xdx.$$

D'Alembert (en 1766) encontró que la solución general de una ecuación lineal no homogénea, es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.
Muchos matemáticos (en particular Clairaut y Euler) siguieron elaborando el método de factor integrante. Así, en los años 1768-1769, Euler investigó las clases de ecuaciones diferenciales que tienen factor integrante de un tipo dado e intentó extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior. Finalmente, cerraremos esta última etapa, mencionando las contribuciones de Lagrange (1736-1813), las cuales, al igual que Euler, fueron hacia el último cuarto del siglo XVIII. Lagrange demostró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, es de la forma

$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$, donde y_1, y_2, ...y_n son un conjunto de soluciones linealmente independientes y c_1, c_2,...,c_n son constantes arbitrarias ("Principio de Superposición"); asimismo, también descubrió en su forma general el "método de variación de parámetros (o constantes)", hacia 1774.

Volviendo a la citada Ecuación de Riccati, queremos recalcar que ésta "rompe" con la tradición algebraica: una ecuación relativamente sencilla que en la mayoría de los casos no puede integrarse en cuadraturas. En segundo lugar, este rompimiento es más fuerte si puntualizamos que una de las razones por las cuales es más fácil resolver una ecuación diferencial lineal que una no lineal (aparte de la propia naturaleza de esta última que puede impedir tal propósito) es la existencia del Principio de Superposición. Este principio, es la forma usual de expresar la solución general como una función de un número finito de soluciones particulares. La Ecuación de Riccati (5) es una ecuación no lineal que posee una solución general que satisface la fórmula:

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

para cuatro valores diferentes de α, y cualesquiera tres soluciones particulares y_1, y_2, y_3, o sea, una solución general de una ecuación no lineal que se expresa en términos de otras particulares.

Para las ecuaciones que no eran integrables en forma finita, Euler utilizó el método de integrar por series. Alexis Claude Clairaut (1713-1765) aplicó el proceso de diferenciación a la ecuación $y=xy'+f(y')$, cuya solución general consiste en una familia de líneas rectas, la cual ahora se conoce como Ecuación de Clairaut y en 1734 publicó su investigación de esta clase de ecuaciones[37].

11. Octavo Problema

En sus trabajos de estos años, Euler consideró también las soluciones singulares de una serie de ecuaciones, las cuales ya eran conocidas del **"Methodus incrementorum..."** (1715) de Brook Taylor (1685-1731).

Taylor advirtió una solución singular considerando la ecuación:

$4x^3-4x^2=(1+z^2)^2(dx/dz)^2$. (6)

Mediante la sustitución $x = v/y^2$, $v = 1 + z$ transformó (6) en la ecuación:

$y^2-2zyy' +vy'^2=1$. (7)

Diferenciando esta última tenemos $2y''(vy'-zy)=0$, y a continuación, igualando a cero la expresión entre paréntesis y sustituyendo en la ecuación (7) $y'=zy/v$, Taylor obtuvo la expresión $y^2=v$, $x=1$, la cual denominó *cierta solución singular del problema.*

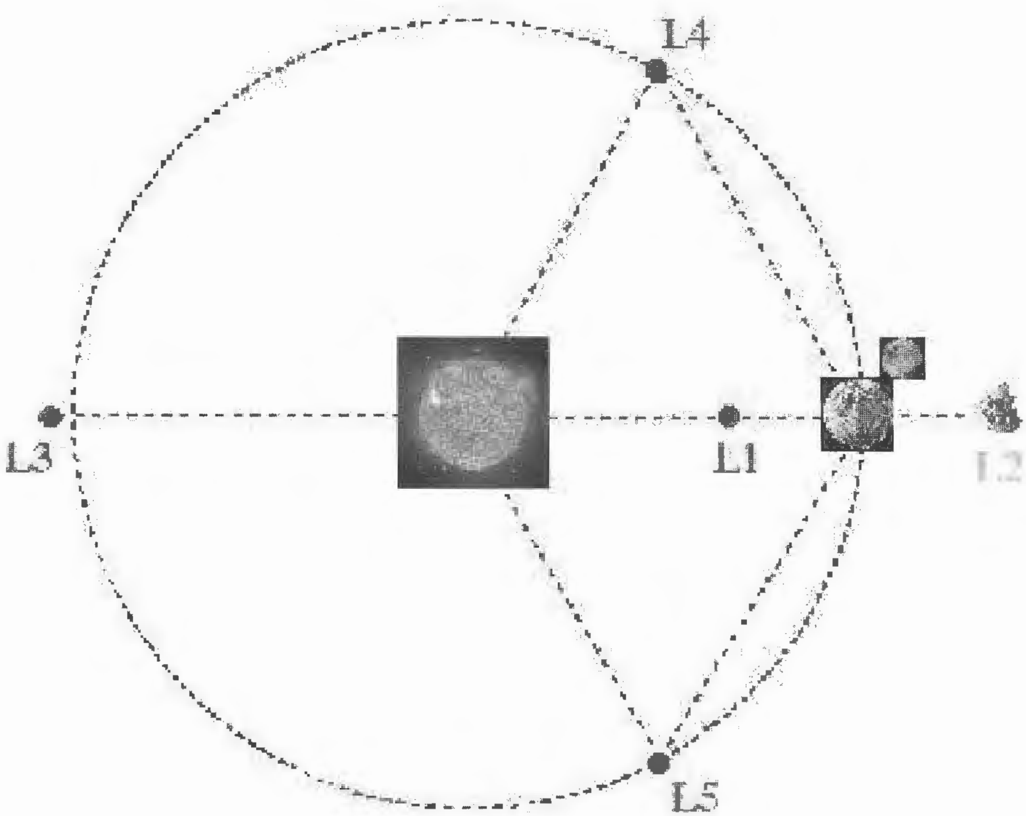
[37] Clairaut, A.-**"Histoire de l'Academie royale des sciences et belles lettres, depuis son origine jusqu'a present. Avec les pieces originales"**, Paris 1734. Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Chez Haude et Spener, 1752.

La falta de claridad de este tipo de solución y su denominación de singular, se conservó hasta las obras de Clairaut, el cual consideró (en 1736) la solución singular de la ecuación[38] (encontrando una ecuación de una envolvente de la familia de curvas representadas por la solución general) $y=(x+1)y'-(y')^2$. Euler, no obstante, ya en el año 1736 advirtió que si se encuentra un factor integrante $\mu(x,y)$ de la ecuación diferencial, entonces $1/\mu=0$ puede dar lugar a una solución singular. Por ejemplo $xdx+ydy=(x^2+y^2-r^2)^{1/2}dy$, tiene como factor integrante $\mu=(x^2+y^2-r^2)^{-1/2}$ y la solución singular será $x^2+y^2-r^2=0$. En 1739 y 1740, Clairaut publicó más trabajos sobre el cálculo integral, en particular sobre la existencia de factores integrantes para la resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (un tema que interesó también a Johann Bernoulli y Reyneau). Concretamente, en 1740 publica su obra **"Sobre la integración o la construcción de las ecuaciones diferenciales de primer orden"**, donde introduce, independientemente de Euler, el uso del factor integrante. La claridad en este concepto fue obtenida por Lagrange sólo en los años 1774-1776, dando una interpretación geométrica de las mismas como envolvente de las curvas integrales. Una exposición sistemática y unificada la dió el propio Lagrange en 1801-1806 en sus **"Lecciones sobre el cálculo de funciones"**.

[38]Lagrange, J.-**"Miscellanea Berolinensia"**, Berlin, 7 (1743).

12. Noveno Problema

Joseph Louis Lagrange (1736-1813), al trabajar en el problema de determinar un factor integrante para la ecuación linear general, formalizó el concepto de la *ecuación adjunta.* Lagrange no sólo determinó un factor integrante para la ecuación lineal general, sino que completó la prueba de la solución general de una ecuación lineal homogénea de orden n[39]. En adición, Lagrange descubrió el método de **variación de los parámetros**[40]. Las contribuciones de Lagrange en la Mecánica Celeste (obtenidas con ayuda de ecuaciones diferenciales), son resumidas en su **"Mecánica Analítica"**, publicada en 1788, y queremos destacar que sus trabajos en el Problema de los Tres Cuerpos, le permitieron descubrir cinco puntos especiales en los alrededores de dos masas orbitando



[39]Lagrange, J.-**"Miscellanea Berolinensia"**, Berlin, 7 (1743).

[40]Lagrange, J.-**"Miscellanea Taurinensia"**, Ostwald's Klassiker, No. 47, Engelmann, Leipzig, 1894.

una tercera, pequeñas masas pueden orbitar a una distancia fija de la masa mayor. Más precisamente, los Puntos de Lagrange marcan la posición donde el empuje gravitacional de las dos masas, precisamente iguala la fuerza centrípeta requerida para rotar con ellas. De los cinco Puntos de Lagrange, tres son inestables y dos son estables. Los Puntos de Lagrange inestables son denominados L1, L2 y L3 que es la línea recta que conecta a las dos mayores masas. Los Puntos de Lagrange estables son denominados L4 y L5 que son los formados por los vértices de dos triángulos equiláteros que tiene las mayores masas en sus vértices. El punto L1 en el sistema Sol-Tierra permite una vista constante del Sol, y es la que actualmente, donde está localizado el satélite Solar and Heliospheric Observatory (SOHO, Observatorio Solar y Heliosférico)
El punto L2 en el sistema Sol-Tierra, también será el sitio donde se colocará el satélite MAP de la próxima generación de telescopios espaciales. Los puntos L1 y L2 son inestables en una escala de tiempo de aproximadamente 23 días, en el cual los satélites requieren se colocados en sus posiciones con correcciones de altitud y curso.
Los puntos L4 y L5 son lugares de órbitas estables con masas tan grandes como que su relación entre las dos mayores masas, excedan 24,96. Esta condición es satisfecha para ambos sistemas Sol-Tierra y Tierra-Luna; y por muchos de otros pares de cuerpos más en el sistema solar. Los objetos encontrados orbitando en los puntos L4 y L5 son llamados Troyanos (el primer ejemplo real de la predicción de Lagrange la obtuvo Max Wolf en 1906 al descubrir los llamados *asteroides troyanos*, localizados en las proximidades de los puntos L4 y L5 correspondientes a la órbita de Júpiter alrededor del Sol). Muchas lunas de Saturno, por ejemplo, son compañeros Troyanos. No hay grandes asteroides que se hayan encontrado en los puntos Troyanos en el sistema Tierra-Luna o Sol-Tierra. Sin embargo, en 1956 el astrónomo Polaco Kordylewski descubrió una gran concentración de polvo en los puntos Troyanos del sistema Tierra-Luna. Recientemente, el instrumento DIRBE del satélite COBE confirmó las observaciones de un anillo de polvo siguiendo la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La existencia de estos anillos está muy cerca a los puntos Troyanos, pero esto se complica por los efectos de la presión de la radiación sobre los granos de polvo.

13. Décimo Problema

Partiendo del trabajo de Lagrange, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), encontró las condiciones bajo las cuales el orden de una ecuación diferencial lineal puede ser disminuido[41]. Derivado de un método para tratar los casos excepcionales, D'Alembert resolvió el problema de las ecuaciones lineales con

[41] D'Alembert, J.-**"Melanges de litterature, d'histoire, et de philosophie"**, 4th ed., 5 vols. Amsterdam, 1767.

coeficientes constantes, e inició el estudio de sistemas diferenciales lineales[42]. En un tratado escrito en 1747, dedicado a las cuerdas vibrantes, D'Alembert fue llevado a las ecuaciones diferenciales parciales donde hizo su trabajo principal en este campo.

Cuentan que Napoleón, al hojear el **"Traité de Mécanique Céleste"** escrito por el marqués de Laplace, le comentó al autor que no encontraba ninguna mención a Dios en todo el tratado. Laplace, soberbio, le respondió que él no necesitaba de esa hipótesis. Cuando esto llegó a oídos de Lagrange, el otro gran mecánico teórico contemporáneo de Laplace, se dice que aquél comentó: *"!Ah! pero de cualquier modo ésa es una bella hipótesis. Explica tantas cosas"*. Trabajó primero Laplace con Lavoisier, el padre de la química, y juntos iniciaron lo que hoy llamamos la termoquímica. Luego se dedicó a la gravitación y estudió la estabilidad del sistema solar, probando con Lagrange que las órbitas planetarias casi no pueden variar, que permanecen estables. Ya sexagenario, escribió otro tratado, ahora sobre la teoría de la probabilidad, con el cual esta importante rama de las Matemáticas empezó a tomar la forma que hoy tiene.

Desde la misma creación del Calculus en el siglo XVII por Newton y Leibniz se apreció la existencia de "imprecisiones"(una famosa referencia: el obispo Berkeley atacó la metafísica que encontraba en los nuevos métodos de Newton) e, incluso, contradicciones en los conceptos básicos de la nueva disciplina matemática (la cual constituía el principal logro de las matemáticas modernas, el corazón de su práctica en los siglos XVIII y buen parte del XIX). La derivada, la integral, o la continuidad, exhibían problemas de rigor y consistencia lógica (por ejemplo, series infinitas divergentes que se asumían convergentes, uso de *infinitesimales*[43]: famosos entes matemáticos que eran menores que cualquier número pero diferentes de 0, etc.) Sin embargo, a pesar de eso las matemáticas crecían como nunca, en un siglo que se suele llamar el "heroico", bajo la mano de insignes matemáticos. Baste mencionar a Euler, los Bernoulli (todos suizos), y una colección impresionante de matemáticos franceses: Clairaut, D'Alembert, Maupertuis, Lagrange, Laplace, Legendre, Condorcet y Carnot. Las preocupaciones por el rigor no podían tener un significado tan grande mientras se tuviera tanto éxito en el desarrollo de las nuevas matemáticas y, muy especialmente, de su aplicación en la física. Aún así, desde el mismo siglo XVIII, empezaron los intentos por superar las debilidades: todo se concentró en el concepto de límite, hoy común a cualquier texto de Cálculo. Podemos decir que la primera figura que abrió el camino para la reformulación digamos moderna de la idea

---

[42] D'Alembert, J.-**"Melanges..."**.

[43] La teoría de los infinitesimales cuyo origen a veces se asocian a Leibniz ha tenido una historia apasionante hasta nuestros días. Algunos autores (como Lakatos) consideran una tensión de teorías: infinitesimales (por un lado) y los enfoques de Weierstrass (dominantes en la comunidad matemática de la época). De hecho, la teoría de los infinitesimales, perdedora en aquella época, fue rehabilitada en el marco de lo que se llama Análisis no- Estándar desarrollado por Abraham Robinson en la década de 1960.

del "paso al límite"fue D'Alembert, al que le siguieron importantes trabajos de replanteamiento conceptual y rigorización lógica: Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, Dedekind que llegan hasta Cantor[44]. Estos trabajos establecieron la pauta, características y sentidos del análisis matemático y su enseñanza hasta nuestros días.
El período del descubrimiento inicial de métodos generales de integrar las ecuaciones diferenciales ordinarias terminó en 1775, cien años después que Leibniz inaugurara el signo integral. Para muchos problemas los métodos formales no eran suficientes. Soluciones con propiedades especiales eran requeridas, y así, los criterios que garantizan la existencia de tales soluciones llegaron a ser cada vez más importantes. Los problemas con valores en la frontera llevaron a ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como la Ecuación de Bessel, eso incitó el estudio de los polinomios de Laguerre, de Legendre, y de Hermite. El estudio de estas y otras funciones que son soluciones de ecuaciones del tipo hipergeométricas, se dirigió en cambio a métodos numéricos modernos.
Así, alrededor de 1775, la atención se centró más y más en métodos analíticos y problemas de existencia, la búsqueda de métodos generales de integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias había terminado, a pesar de los famosos **"Institutiones..."** de Euler, obra que consta de tres tomos que vieron la luz sucesivamente en los años 1768, 1769 y 1770, pero que tienen un suplemento que fue editado en 1794, culminando la serie de libros de Euler dedicados a la exposición sistemática y rigurosa del Calculus y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

14. Epílogo

En este contexto, veamos el protocolo de rigor que imperaba a finales del siglo XVIII:

- Cada concepto matemático debía ser explícitamente definido en términos de otros conceptos cuya naturaleza era suficientemente conocida[45].
- Las pruebas de los teoremas debían ser completamente justificadas en cada una de sus etapas, o bien por un teorema anteriormente probado, por una definición, o por un axioma explícitamente establecido.
- Las definiciones y axiomas escogidos debían ser lo suficientemente amplios para que pudiesen cubrir los resultados ya existentes.
- La intuición (geométrica o física) no era un criterio válido para desarrollar una prueba matemática.

---

[44]Véase A. Ruiz y Hugo Barrantes-**"Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos"**, San José: Ed. UCR, 1997.

[45]La argumentación reposa en un punto de partida conformado por razones consensuales para un grupo de "entendidos".

Las dos primeras caracterizaciones han permanecido más o menos estables desde la época de Euclides. Las dos últimas, son un pronunciamiento en contra de concepciones matemáticas muy comunes hasta el siglo XVIII. En esta época, casi todos los problemas del cálculo, surgían de la necesidad de matematizar algún fenómeno de índole físico. Por este hecho, los resultados matemáticos cobraban importancia en la medida en que reflejaran una realidad tangible. La relación entre matemáticas y naturaleza era muy cercana. Lo que hacía el cálculo era traducir al lenguaje de las funciones la explicación o las relaciones causales de los fenómenos naturales. Afortunadamente, estas funciones (de carácter *regular* en el sentido euleriano) tenían comportamiento adecuado al nivel del saber matemático entonces dominante, es decir, no problematizaban ni hacían entrar en crisis sus resultados.

La contradicción entre los algoritmos del cálculo diferencial y su correspondencia con las representaciones existentes entonces con el rigor matemático heredado de los griegos, fue evidente para la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII. Por otra parte, este cálculo encontraba cada día nuevas aplicaciones en la mecánica y la astronomía, convirtiéndose, poco a poco, en la parte central y más productiva del conocimiento matemático. El problema de la fundamentación del cálculo diferencial se hizo cada vez más actual, convirtiéndose en uno de los problemas del siglo. Está claro que una teoría puede ser lógicamente fundamentada sólo cuando llega a determinado nivel de madurez. Una teoría que todavía se encuentra en el estadio de búsqueda de leyes fundamentales de desarrollo y de definición precisa de sus conceptos principales no puede ser fundamentada lógicamente. Además, para poder hablar de una fundamentación filosófica los conceptos fundamentales deben ser suficientemente generales y a la vez bien determinados. La fundamentación lógica y filosófica del cálculo diferencial e integral era objetivamente imposible sobre la base de los conceptos sobre los cuales aparecieron y por eso los esfuerzos de Newton, Leibniz, Lagrange y otros, hasta los mismos comienzos del siglo XIX, terminaron en el fracaso. Señalemos las principales insuficiencias[46]:

Incorrecta comprensión del concepto de diferencial: En Leibniz, L'Hospital, Euler y otros matemáticos del siglo XVIII el concepto de diferencial se confundía en el incremento. Una aproximación suficientemente correcta del concepto de diferencial fue dada sólo por Lagrange (1765).

Insuficiente comprensión del concepto de función: De hecho hasta fines del siglo XIX los matemáticos partiendo de la intuición mecánica y geométrica, entendieron por fundamentación sólo las funciones analíticas representadas por una determinada fórmula (en algunos casos infinita como es el caso de las consideraciones de Fourier ligadas con su teoría del calor). Sólo con la aparición de

[46]Completamos a C. Sánchez F.-"**Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática**", U.H., 1987.

las funciones discontinuas en problemas prácticos, los matemáticos prestaron atención a la formación lógica del concepto de función.
Ausencia de un concepto claro de límite: Los seguidores de Newton: Maclaurin, Taylor, Wallis y otros, mantuvieron una larga discusión sobre el hecho de que si la variable alcanza o no el límite. Este problema no era fácil, precisamente, porque no había una definición precisa de límite y sólo se determinaba por razonamientos mecánicos y geométricos. Esta insuficiencia permaneció hasta Cauchy (1823).
El concepto de continuidad funcional era intuitivo: Esto se explica porque los matemáticos del siglo XVIII consideraban todas las funciones continuas y por eso no tenían la necesidad de precisar este concepto. Sólo a principios del siglo XIX se comenzó a pensar en este problema (otros detalles los puede encontrar en la última sección de esta conferencia).
Concepto difuso de integral definida: Relacionado ante todo con la ausencia de un teorema de existencia. Se consideraba por ejemplo, que la fórmula de Newton-Leibniz tenía un significado universal, es decir, que era válida para todas las funciones y en todas las condiciones. Los esfuerzos en la precisión del concepto hechos por Lacroix, Poisson y Cauchy pusieron en primer plano el concepto de límite y de continuidad. Pero el problema de la integral definida sólo halló una respuesta completa hasta fines del siglo XIX en los trabajos de Lebesgue.
Se necesitaba tener una clara comprensión de lo que era un sistema numérico: En particular, la estructura del sistema de los números reales, lo que no sucederá sino con las investigaciones de Dedekind y Cantor, entre otros; otra de las concepciones básicas relacionadas con este tópico, era el concepto mismo de número (aquí, nuevamente debemos mencionar a los matemáticos del siglo XIX y a Frege en especial, para seguir con Russel, etc.).
Así, el movimiento del análisis matemático en el siglo XVIII hacia su fundamentación, puede describirse completamente en el sistema ***teoría-práctica***, esto es, como interrelación dialéctica entre estos momentos. La necesidad del cálculo de áreas y volúmenes y del hallazgo de máximos y mínimos entre otros problemas concretos, conllevó a la creación del algoritmo del cálculo diferencial e integral. La aplicación de estos algoritmos a nuevos problemas inevitablemente conllevó a la generalización y precisión de los algoritmos. En última instancia, el análisis se formalizó como lógicamente no-contradictorio, como un sistema relativamente cerrado y completo.

CUADRO SINÓPTICO (1675-1775)			
FECHA	**PROBLEMA**	**DESCRIPCION**	**MATEMATICO**
1690	Problema de la Isócrona	Encontrar una curva sobre la cual, un cuerpo cae con velocidad vertical uniforme	James Bernoulli
1694	Cuadratura de la Hipérbola	Proceso de obtención de un cuadrado igual al área bajo la curva sobre un intervalo dado	G. W. Leibniz
1696	Problema de la Braquistócrona	Encontrar la ecuación del camino en el cual una partícula va de un punto a otro, en el menor tiempo posible	Johan Bernoulli
1698	Problema de las Trayectorias Ortogonales	Encontrar una curva que corta todas las curvas de una familia con ángulo recto	Johan Bernoulli
1701	Problema Isoperimétrico	Un problema en el cual se requiere hacer una integral máxima o mínima, mientras se mantiene constante la integral de una segunda función dada	Daniel Bernoulli
1720	Problema de la Ecuación de Riccati	Dada una trayectoria descrita por una ecuación diferencial lineal de primer orden, encontrar la ecuación que describe una pendiente dada	Jacopo F. Riccati
1728	Problema de reducir la Ecuación de 2do Orden a una de 1ero	Encontrar una factor integrante	Leonhard Euler
1734	Problema de las Soluciones Singulares	Encontrar una ecuación de una envolvente de la la familia de curvas representada por la solución general	Alexis Clairaut
1743	Problema de determinar un Factor Integrante de la Ecuación Lineal General	Concepto de adjunta de una ecuación diferencial	Joseph Lagrange
1762	Problema de la Ecuación Lineal con Coeficientes Constantes	Condiciones bajo las cuales el orden de una ecuación diferencial lineal puede ser disminuido	Jean d'Alembert

Referencias

[1] J. Bernoulli, *Acta Eruditorum*, 1695, Ostwald's Klassiker, No. 46, Engelmann, Leipzig, 1894.

[2] j. Bernoulli, *Opera omnia*, ed. G. Cramer, 4 vols., Lausanne, 1742.

[3] A. Clairaut, *Histoire de l'Academie royale des sciences et belles lettres, depuis son origine jusqu'a present. Avec les pieces originales*, Paris 1734. Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Chez Haude et Spener, 1752.

[4] J. D'Alembert, *Melanges de litterature, d'histoire, et de philosophie*, 4th ed., 5 vols. Amsterdam, 1767.

[5] P. Dedron et J. Itard *"Mathématiques et Mathématiciens"*, Magnard, París, 1959.

[6] C. Di Rovero, *Vita del Conte Jacopo Riccati*, Opere del Conte Jacopo Riccati Nobile Trevigiano, C. Rocchi, Lucca (Italia), 1765.

[7] L. Euler, *Opera omnia*, ed., Soc. Scient. Natur. Helveticae, Teubner, Leipzig and Berlin, 1911- Fussli, Zurich; three series.

[8] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 4th Edition, 1976, Holt, Rinehold and Winston, New York.

[9] C. Gerhardt, *Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz*, Halle, 1848, p. 25.

[10] Grattan-Guinnes *A Sideway Looks at Hilbert's Twenty-three Problems of 1900*, Notices of the AMS, 47(2000), 752-757.

[11] D. Hilbert, *Los Problemas Futuros de la Matemtíca* Versión y traducción de J. R. Ortiz. http://www.geocities.com/Athens/4346/hilb.html

[12] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, 1st Edition, 1956, Dover Publications, Inc., New York.

[13] Kline *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[14] J. Lagrange, *Miscellanea Berolinensia*, Berlin, 7 (1743).

[15] G. Leibniz, *Mathematische Schriften*, ed. by C.J. Gerhardt, Gesammelte Werke. Ed. by G.H. Pertz. Third Series, Mathematik. 7 vols., Halle, 1849-63.

[16] Leibniz-Newton *El Cálculo Infinitesimal origen-polémica*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1977, p. 29.

[17] A. A. Michieli, *Una famiglia di matematici e di poligrafi trivigiani: i Riccati*, Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, tomo 102, Part. II, 1942-43.

[18] L. Motz and J. Hane W.-*Conquering Mathematics; From Arithmetic to Calculus*, Plenum, New York and London, 1991.

[19] J. E. Nápoles V. *El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas*, Boletín de Matemáticas, V(1998), 53-79. http://www.matematicas.unal.edu.co/revistas/boletin/vol5n1/98050105.pdf

[20] J. E. Nápoles V. *Del caos y esas cosas. Una introducción comentada a la matemática contemporánea*, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, No.3, 2001, 65-74.

[21] J. E. Nápoles V. *Ley, orden y caos en el Universo*, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, No.4, 2001, 67-76.

[22] J. E. Nápoles V. y C. Negrón S. *"La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto*, Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática, Año 3, No.2, 2002, 33-57. http://www.uaq.mx/matemáticas/redm/

[23] J. E. Nápoles V. *El papel de la historia en la integración de los marcos geométrico, algebraico y numérico en las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, Vol.4, No.1, Mayo 2003.

[24] J. E. Nápoles V. *La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico*, Revista de Educación y Pedagogía, XV, no.35, 2003, 163-182.

[25] J. E. Nápoles V. *Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales*, Revista Lecturas Matemáticas, Vol.25(2004), 59-111. www.scm.org.co/Articulos/740.pdf

[26] I. Newton, *The Mathematical Works*, ed. D.T. Whiteside, 2 Vols, Johnson Reprint Corp., 1964-67.

[27] I. Newton, *Opuscula mathematica, philosophica et philological*, 3 vols, Lausannae and Genevae, 1744.

[28] G. Piaia y M.L. Soppelsa (eds.), *I Riccati e la Cultura della Marca nel Settecento Europeo*, L.S. Olschki editor, Florencia, 1992.

[29] A. Ruiz y H. Barrantes *Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos*, San José: Ed. UCR, 1997.

[30] D. E. Smith *A Source Book in Mathematics*, New York, 1929, pp.619-626. (reimpreso: New York Public Library, New York, 1951-1952. Reimpreso: Dover, New York, 1959. Reseñado: Isis 14(1930), 268-270).

[31] D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1986.

[32] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., pp.1-3, Cambridge, London, 1944.

RECIBIDO: Julio de 2007. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Octubre de 2008