



## NUEVAS TENDENCIAS PARA ENSEÑAR PROBABILIDADES USANDO CDPYE

M. J. García Ligeró<sup>1</sup>, A. Hermoso<sup>2</sup>, J. A. Maldonado<sup>3</sup>, P. Román<sup>4</sup> y F. Torres<sup>5</sup>

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada, España

### ABSTRACT

CDPYE is an interactive environment designed to provide an attractive material to the students of Probability and Statistics, which complements the contents developed by the teacher in the classroom, allowing them to have a mechanism of autonomous learning. This question is carried out by means of several interrelated modules including the different steps followed by a student in the learning process.

In this paper we present this environment and provide a description of its modules, showing their capacities in this context. In addition, we develop a teaching scheme with CDPYE focused on mathematic students.

**KEY WORDS:** interactive environment, autonomic learning, TIC's tools, methods of learning, and teaching techniques, probability and multimedia statistics.

**MSC:** 97D40, 97D80, 97U50, 97U70, 97U80.

### RESUMEN

CDPYE es un entorno interactivo diseñado para proporcionar a los estudiantes de Probabilidad y Estadística un material didáctico atrayente, que complemente los contenidos desarrollados en clase por el profesor, y que les permita poseer un mecanismo de aprendizaje autónomo. Ello se lleva a cabo mediante diversos módulos que incluyen los diferentes pasos que un alumno sigue en el proceso de aprendizaje.

En este artículo presentamos el entorno y proporcionamos una descripción de sus módulos, mostrando sus posibilidades, al mismo tiempo que mostramos una experiencia docente llevada a cabo con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada.

## 1.- INTRODUCCIÓN

Las universidades europeas están actualmente inmersas en un profundo proceso de cambio motivado por el establecimiento del denominado "Espacio Europeo de Educación Superior".

En ese contexto, las universidades españolas, y en particular la de Granada, están haciendo un gran esfuerzo para incorporar a su personal docente a este proceso de forma gradual y con garantías. Uno de los campos en los que se están haciendo grandes esfuerzos es el de la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, existiendo foros donde se presentan e intercambian opiniones en este ámbito; así, por ejemplo, cabe citar las sesiones de "Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística" encuadradas en los periódicos congresos de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), en cuyo seno existe un grupo de trabajo sobre el tema. En dichas sesiones, se exponen los trabajos realizados por distintos grupos docentes; un ejemplo de ellos es el realizado en la Universidad de Barcelona por el grupo Statme-

---

<sup>1</sup> mjgarcia@ugr.es

<sup>2</sup> ahermoso@ugr.es

<sup>3</sup> jamaldo@ugr.es

<sup>4</sup> , proman@ugr.es

<sup>5</sup> fdeasis@ugr.es

día (en [6] se puede obtener una descripción de los sucesivos desarrollos que ha ido realizando este grupo).

En este nuevo proceso de enseñanza, los estudiantes tienen un papel protagonista puesto que las nuevas tendencias docentes asignan un papel mucho más importante al trabajo personal del alumno, trabajo que debe ser desarrollado bajo las directrices marcadas por el profesor.

Todo ello ha motivado un movimiento de cambio en lo que concierne a los estudios universitarios y, más concretamente, en lo relativo a las técnicas y procedimientos docentes en todas sus vertientes. Todos los estamentos universitarios son conscientes de que los tiempos han cambiado: las posibilidades técnicas y tecnológicas han experimentado una transformación, tanto cualitativa como cuantitativa, espectacular; las necesidades de la sociedad hacen que los futuros profesionales respondan a un perfil en el cual no sólo se deba tener en cuenta la posesión de una ingente cantidad de conocimientos, sino que, además, deben ser capaces de mostrar habilidades y aptitudes de diversa índole: deben saber enfrentarse a un problema o situación concreta, saber analizar y esquematizar los diversos aspectos que lo conforman y organizar un plan debidamente estructurado que conduzca a una solución satisfactoria. Esto conlleva que hoy día se le pida al alumno una mayor implicación en el desarrollo de su formación puesto que debe prepararse para afrontar problemas y resolverlos, partiendo de unas directrices básicas planteadas por sus formadores. Esa mayor implicación conlleva una mayor dedicación al estudio personal, para lo cual el alumno debe disponer de un material adecuado a tal fin.

Con estas ideas en mente, el principal objetivo que perseguimos es proporcionar a los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas y, en general, a alumnos de asignaturas básicas de Probabilidad y Estadística de cualquier titulación (prescindiendo de algunos aspectos matemáticos rigurosos, según los casos), de material de apoyo a los contenidos teóricos y prácticos que se desarrollan en clase, sin que ello deba entenderse como un sustitutivo del profesor a la hora de explicar los contenidos de la materia, sino como un complemento a la clase presencial. En este sentido, no pretendemos simplemente la elaboración de unos apuntes, presentaciones, ejercicios resueltos, etc. (muy útiles para facilitar el aprendizaje del alumno) de forma separada, sino que todo ello esté integrado en un entorno interactivo, con posibilidad de navegación por sus módulos, con interrelaciones entre sus contenidos.

Todas estas ideas quedan recogidas en la elaboración de CDPYE, que es un entorno interactivo capaz de manejar y administrar un conjunto de materiales docentes que incluyen presentaciones multimedia (simulaciones de explicaciones en pizarra), programas interactivos que permiten realizar aplicaciones a problemas concretos, así como ejercicios con los cuales el alumno puede comprobar de forma interactiva los conocimientos adquiridos, bien mediante problemas desarrollados paso a paso, en los que se le incentiva mediante preguntas hacia el siguiente paso que debe seguir, o bien mediante autoevaluaciones de cada tema concreto. De esta forma se consigue proporcionar a los alumnos un material atractivo que complementa los desarrollos presenciales y permitan, al mismo tiempo, disponer de un mecanismo de aprendizaje autónomo.

## 2.- EL ENTORNO CDPYE

El entorno CDPYE está desarrollado expresamente para poder administrar un determinado conjunto de materiales docentes previamente seleccionados y que, como se ha comentado con anterioridad, sean especialmente atractivos a los alumnos, sin que ello, obviamente, vaya en detrimento de los propios contenidos. Estos contenidos se presentan en diversos formatos, atendiendo al objetivo que se persigue con ellos y a su presentación final en el entorno. Así, se consideraron, entre otros: *desarrollos de texto de evolución en secuencia*, con los que se presentan resúmenes, contenidos teóricos relativos a conceptos y/o demostraciones, etc., *presentaciones animadas con posibilidades multimedia*, útiles para incluir simulaciones de explicaciones en pizarra, que permiten la explicación y esquematización de determinados contenidos de mayor complejidad o difícil aprendizaje, así como para la utilización de aplicaciones interactivas para la resolución de problemas; *páginas html* para la inclusión de gráficas y aplicaciones de cálculo, así como para la simulación de experiencias, a modo de ejemplos para la mejor comprensión de determinados conceptos, y *programas de creación propia*, orientados tanto a complementar a los demás elementos, como a abrir el horizonte de cara a la autoevaluación, generación de contenidos y revisión dinámica, etc.

Los desarrollos de texto, fijos o con evolución en secuencia, están presentados en formato pdf y han sido confeccionados con Latex, mediante la adaptación de paquetes y estilos como TexPower, PdfScreen o Hyperref, lo cual permite combinar texto con fórmulas y, dentro de lo posible, disponer de presentaciones

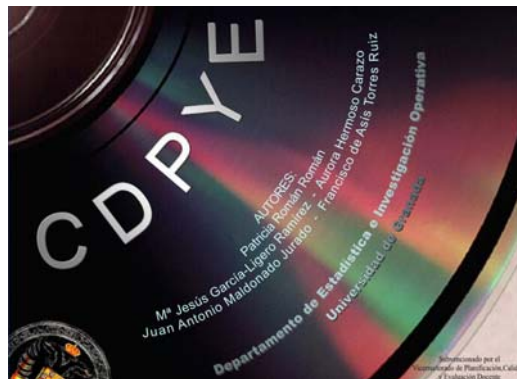
con cierta movilidad y efectos. Por su parte, las presentaciones animadas multimedia se han realizado bajo la aplicación Microsoft PowerPoint. En lo que respecta a la programación propia, el sistema de visualización, capaz de mostrar el contenido de todos los ficheros que se han empleado se ha generado mediante el lenguaje de programación Object Pascal utilizando el IDE Delphi 7.0, y como pantalla de visualización una instancia del explorador de Internet (Microsoft Internet Explorer) del equipo host. Los documentos son enviados a visualización activados por eventos desde un componente con estructura de árbol no dependiente del comctl32.dll de Microsoft, permitiendo la utilización de varias líneas por cada ítem del árbol. La información que muestra éste árbol reside en un fichero binario, que se genera/edita desde el propio entorno.

Después de iniciar una sesión de trabajo con CDPYE (la figura 1 muestra la portada del entorno) se plantea la opción de elegir entre las asignaturas *Probabilidad* y *Estadística Matemática*, pudiendo a lo largo de ella cambiar de una a otra asignatura sin necesidad de salir del entorno. No obstante, el desarrollo que hemos realizado se ha centrado, hasta el momento, en el apartado de Probabilidad.

Dentro de cada asignatura, el entorno muestra, a la izquierda, un índice de los temas que lo componen y, en la parte superior, una barra de iconos representativos de cada uno de los módulos que lo integra. Cada uno de ellos lleva asociado un color, de modo que los fondos de los materiales docentes incluidos en cada uno de ellos tendrán un mismo color, así como los hipervínculos que los apuntan.

Los módulos de que consta CDPYE son:

- **Resúmenes:** en este módulo (figura 2) se incluyen resúmenes de los diversos temas considerados, a modo de hipertexto. Cada tema lleva asociados elementos del resto de los módulos que están referenciados en su resumen.
- 



**Figura 1:** Portada principal de CDPYE

- **Contenidos:** este módulo es útil para disponer de un desarrollo más profundo del tema. La principal característica es la interactividad en la presentación animada de los mismos, que intenta imitar el proceso de aprendizaje habitual hasta ahora, fundamentado en clase magistral en pizarra, especialmente en demostraciones y desarrollos más complejos. La primera página del módulo de contenidos de cada tema muestra el listado de los disponibles en el mismo, diferenciados por iconos que representan su tipo de presentación: textual, textual consecutiva y multimedia. Así pues, en este módulo encontraremos explicaciones pormenorizadas de aspectos concretos de cada tema, desarrollados paso a paso, tanto en formato texto (ver figura 3) como en presentaciones multimedia que simulan una explicación en pizarra, incluyendo una voz en off que va explicando cada paso de los desarrollos que se van realizando. Asimismo, dentro de este apartado, encontraremos esquemas muy útiles (ver figura 4) para sintetizar conceptos y establecer relaciones que aclaren los mismos.

CDPYE - Probabilidad

Resúmenes

Probabilidad

Resúmenes:

- 1.- Introducción al cálculo de Probabilidades
- 2.- Probabilidad condicionada e independencia de sucesos
- 3.- Variables aleatorias unidimensionales
- 4.- Esperanza matemática de una variable aleatoria. Momentos. Funciones generatrices y otras características
- 5.- Modelos probabilísticos unidimensionales
- 6.- Variables aleatorias multidimensionales
- 7.- Independencia de variables aleatorias
- 8.- Esperanza condicionada. Regresión y correlación
- 9.- Modelos probabilísticos multidimensionales
- 10.- Convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Teoremas límite

Licensed under a Creative Commons Attribution - Non commercial - NoDerivs 2.5 License

SOME RIGHTS RESERVED

By Grupo CDPYE

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 2.5 License

BY: Grupo CDPYE-UGR

### Propiedades de la función generatriz de momentos

**Teorema de unicidad**  
Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, determina unívocamente su distribución de probabilidad.

**Teorema: relación con los momentos**  
Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria,  $M_X(t)$ ,  $\forall t \in (-t_0, t_1)$ , se tiene:

- $\exists E[X^k], \forall k \in \mathbb{N}$ .
- $M_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} E[X^j], \forall t \in (-t_0, t_1)$ .
- $E[X^k] = \left. \frac{d^k M_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$ .

**Demostración:**

i) A partir de la cadena de desigualdades

$$\frac{|t^k|}{k!} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j |x_j|^j}{j!} = e^{|t|} \leq e^{t^2} + e^{-t^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N},$$

se deduce

$$\frac{|t^k|}{k!} \leq e^{t^2} + e^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Figura 2: Resumen de un tema en CDPYE

CDPYE - Probabilidad

Resúmenes

Probabilidad

Resúmenes:

- 1.- Introducción al cálculo de Probabilidades
- 2.- Probabilidad condicionada e independencia de sucesos
- 3.- Variables aleatorias unidimensionales
- 4.- Esperanza matemática de una variable aleatoria. Momentos. Funciones generatrices y otras características
- 5.- Modelos probabilísticos unidimensionales
- 6.- Variables aleatorias multidimensionales
- 7.- Independencia de variables aleatorias
- 8.- Esperanza condicionada. Regresión y correlación
- 9.- Modelos probabilísticos multidimensionales
- 10.- Convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Teoremas límite

Licensed under a Creative Commons Attribution - Non commercial - NoDerivs 2.5 License

SOME RIGHTS RESERVED

By Grupo CDPYE

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 2.5 License

BY: Grupo CDPYE-UGR

### Tema 3

#### Variables aleatorias unidimensionales

- 1.- Variables aleatorias
  - 1.1.- Espacio de Borel
  - 1.2.- Función medible
  - 1.3.- Variable aleatoria
- 2.- Distribución de probabilidad de una variable aleatoria
- 3.- Función de distribución de una variable aleatoria
- 4.- Clasificación de variables aleatorias
  - 4.1.- Variables aleatorias discretas
  - 4.2.- Variables aleatorias continuas
  - 4.3.- Variables aleatorias mixtas
- 5.- Funciones de variables aleatorias. Cambio de variable

Figura 3: Texto con desarrollo en CDPYE

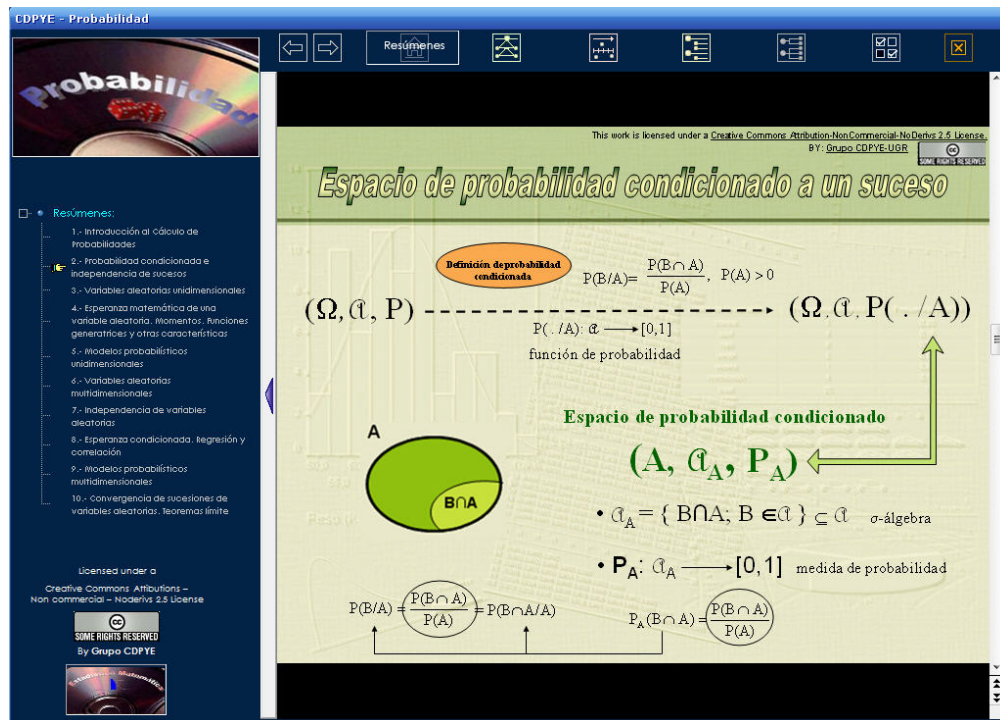


Figura 4: Esquema en CDPYE

- **Aplicaciones:** incluye un conjunto de aplicaciones complementarias en el estudio de cada tema, que cada vez están más presentes a medida que aumentan las capacidades tecnológicas: manejo interactivo de distribuciones de probabilidad (ver figura 5), visualización de gráficos interactivos, manejo de programas específicos de cálculo, etc. Asimismo, son de destacar aquellas aplicaciones con las cuales queremos ayudar al alumno a comprender algunas definiciones y conceptos mediante la *visualización* de ejemplos relativos a los mismos. Por ejemplo, la concepción clásica de la probabilidad mediante el uso de una baraja de cartas (ver figura 6), la concepción frecuentista de la probabilidad a partir de un juego de monedas, construcción de variables aleatorias y cálculo de sus características, etc.



Figura 5: Distribuciones de probabilidad en CDPYE



Figura 6: Probabilidad con la baraja española en CDPYE

- **Complementos:** en la mayoría de los textos docentes es habitual encontrar una sección de apéndices en la que se incluyen ciertos elementos de complemento en el estudio de un tema, y que no fueron ampliamente desarrollados, o incluso no tratados, en el propio contenido del mismo. Siguiendo este patrón, hemos incluido este módulo en el estudio de cada tema, que dedicamos a este tipo de anexos. Debemos notar que hemos incluido aspectos de índole más teórica (por ejemplo, hemos considerado cuestiones como la definición subjetiva de la probabilidad, o las variables aleatorias simétricas o algunos modelos probabilísticos concretos), pero también hemos prestado atención a cuestiones aplicadas (por ejemplo, la aplicación de

la probabilidad condicionada en el diagnóstico clínico o en la genética de poblaciones, o el esquema que se debe seguir en la resolución de un problema de combinatoria (figura 7)). La diversidad de tipos de complementos disponibles hace que en el listado de los mismos aparezcan diferentes iconos aludiendo a los diferentes tipos de presentaciones empleadas, siguiendo el mismo esquema que en el módulo de contenidos.

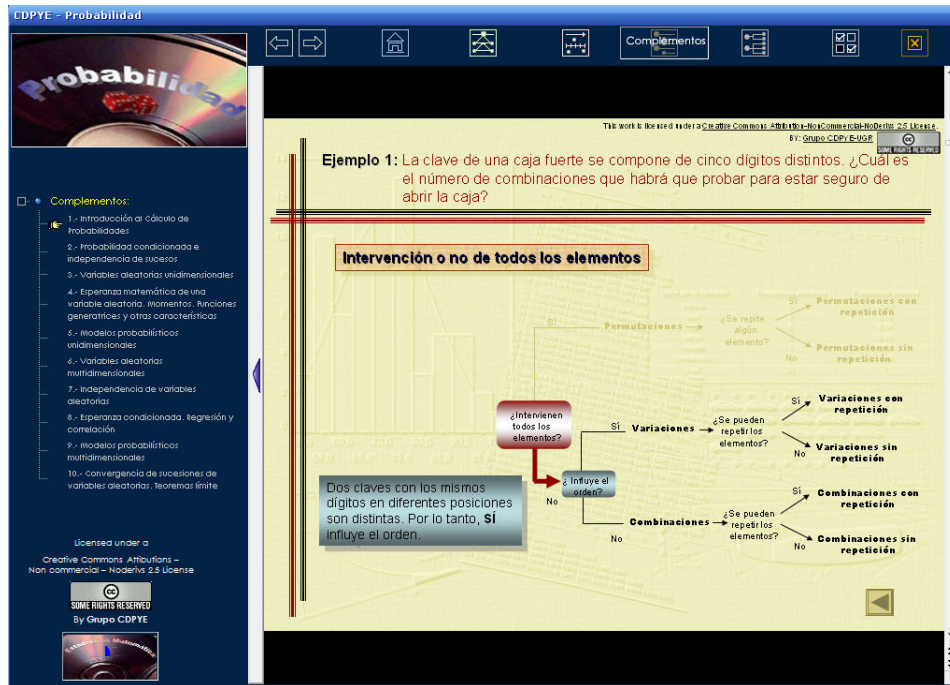


Figura 7: Esquema para la resolución de un problema de combinatoria en CDPYE.

- **Ejercicios:** cada tema contiene un conjunto de ejercicios, con resolución animada, que consideramos necesario para el correcto aprendizaje del mismo. A lo largo de la resolución de cada ejercicio, se dirige al alumno mediante preguntas ilustrativas que lo conduzcan hacia la solución final (ver figura 8). Con ello pretendemos que el alumno contemple de forma ordenada qué tipo de razonamientos ha de conducirle a la resolución de un determinado problema. Evidentemente, somos conscientes de que en muchas ocasiones no hay una única forma de abordar un problema concreto, pero lo que pretendemos es colaborar en la formación del alumno mediante la ordenación lógica de sus razonamientos.
- **Autoevaluaciones:** en este módulo se ofrece al alumno la posibilidad de que pueda valorar su formación. Incluye preguntas tipo test, con posibilidad de orientación tras la elección de la respuesta (ver figura 9), y ejercicios propuestos para su desarrollo, con acceso a su resolución.

### 3.- EXPERIENCIA DOCENTE CON CDPYE

Es importante notar que todo el proceso llevado a cabo debe ser avalado por la utilización del entorno por los alumnos, que son el centro de interés real del mismo y sin los cuales carecería de sentido todo lo realizado. En este sentido, tanto los materiales realizados como el entorno en sí mismo están siendo evaluados en la actualidad, si bien todavía en una primera fase experimental. Así, algunos de los materiales han sido empleados para explicar en clase aspectos puntuales de algunos temas. De esta forma pretendemos comprobar la idoneidad de la estructuración de los mismos así como la utilidad de los formatos elegidos para su presentación. Pero nos preocupa en gran manera la utilidad real del entorno y los materiales contenidos en él en la fase de estudio del alumno.

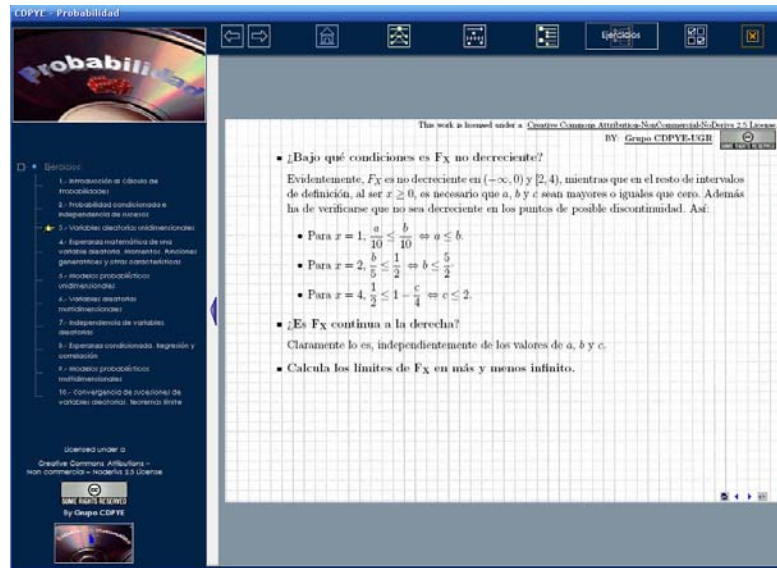


Figura 8: Resolución de un problema dirigido en CDPYE

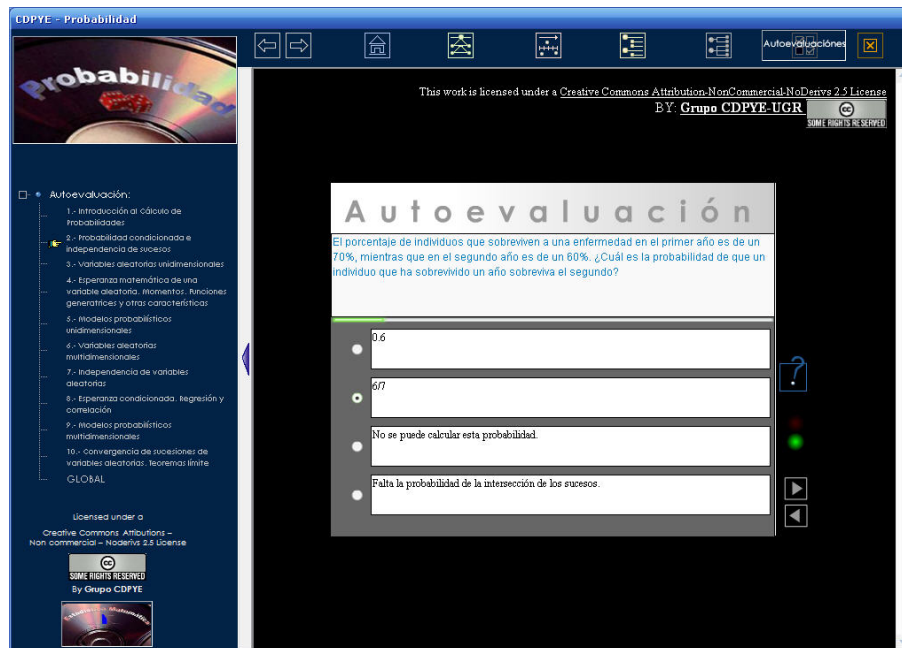


Figura 9: Cuestiones tipo test en CDPYE

A tal fin ya hemos llevado a cabo algunas experiencias concretas en las cuales se ha planteado a los alumnos una prueba consistente en un problema concreto y se ha procedido a evaluar la resolución del mismo antes y después de haber realizado una sesión de trabajo con el entorno, con la finalidad de captar la capacidad de CDPYE como herramienta para el estudio y seguimiento de los contenidos y competencias adquiridos. A continuación describimos una de estas experiencias piloto que hemos desarrollado.

Se seleccionaron dos grupos de alumnos al azar de la asignatura “Probabilidades y Estadística” de segundo curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada. A uno de ellos (grupo A) se le avisó de la realización de una prueba sobre un tema concreto, con lo que se supone que habían estudiado previamente y se habían ejercitado en la resolución del tipo de problemas que se le iba a proponer. Por el contrario, al otro grupo (grupo B) no se le avisó, y simplemente se le convocó a una sesión de trabajo con CDPYE (hay que remarcar que las pruebas fueron totalmente anónimas salvo por la identificación del grupo). De esta forma, se pueden discriminar las puntuaciones obtenidas no sólo por la disposición del

alumno al estudio, sino por la utilización de nuevos recursos disponibles (nuestro entorno), lo que puede suponer una buena herramienta de apoyo/consulta, o mejor aún, un verdadero entorno interactivo para el aprendizaje autónomo.

La experiencia constó de tres partes bien diferenciadas:

- Propuesta y resolución del ejercicio, previa a la sesión de trabajo con CDPYE.
- Realización de una sesión de trabajo con CDPYE con la finalidad de que el alumno adquiriera destreza en la resolución del problema previamente planteado.
- Resolución del ejercicio, posterior a la sesión de trabajo con CDPYE.

La prueba en concreto consistió en un problema de cambio de variable (ver figura 10).

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad


$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 6x-3 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria  $Y = \left|X - \frac{1}{4}\right|$ .

Figura 10: Prueba planteada a los alumnos para su resolución.

Hay que hacer notar que CDPYE contiene ejemplos concretos de este tipo de ejercicios, por lo que el alumno puede consultar tanto la teoría necesaria para resolver el ejercicio como ejemplos de aplicación del mismo tipo al planteado.

La figura 11 contiene dos de los ejercicios realizados por los alumnos correspondientes a cada una de las fases de realización. Los códigos de barras garantizan el anonimato de la prueba y permite emparejar las pruebas de cada fase para cada alumno con el fin de poder efectuar comparaciones entre las mismas y, si es posible, constatar la presumible mejora.



•12438516-UXS\*

Espacio reservado para el código de barras

Problema para resolver antes de haber utilizado CDPYE:

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 6x-3 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria  $Y = \left|X - \frac{1}{4}\right|$ .

$Y = X - \frac{1}{4} \quad X = Y + \frac{1}{4}$


$f(y) = \begin{cases} 2(y + \frac{1}{4}) & \frac{1}{4} < y < \frac{1}{4} \\ 6(y + \frac{1}{4}) - 3 & \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \end{cases}$

$6y - \frac{3}{2} - 3 = 6y - \frac{9}{2} - 3 = 6y - \frac{15}{2}$

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (6y - \frac{15}{2}) dy = 3y^2 - \frac{15}{2}y \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \frac{9}{16} - \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} - (3 \cdot \frac{1}{16} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{27}{16} - \frac{45}{8} - (\frac{3}{16} - \frac{15}{8}) = \frac{27}{16} - \frac{45}{8} - \frac{3}{16} + \frac{15}{8} = \frac{24}{16} - \frac{27}{8} = \frac{3}{4} - \frac{27}{8} = -\frac{21}{8}$

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (6y - \frac{9}{2}) dy = 3y^2 - \frac{9}{2}y \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4} - (3 \cdot \frac{1}{16} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{27}{16} - \frac{27}{8} - (\frac{3}{16} - \frac{9}{8}) = \frac{27}{16} - \frac{27}{8} - \frac{3}{16} + \frac{9}{8} = \frac{24}{16} - \frac{27}{8} = \frac{3}{4} - \frac{27}{8} = -\frac{21}{8}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$  Por lo tanto vemos que está bien definida su función de densidad.



•12438593-XXT\*

Espacio reservado para el código de barras

Problema para resolver con CDPYE:

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 6x-3 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria  $Y = \left|X - \frac{1}{4}\right|$ .

$g(x) = \left|x - \frac{1}{4}\right|$

$g^{-1}(0,1) \rightarrow (0, \frac{1}{4})$   
 $x \rightarrow \left|x - \frac{1}{4}\right|$

Esta función no es estrictamente monótona por lo que tenemos que aplicar el Teorema de Extensión de Cambio de Variable.

$0 < y < \frac{1}{4} \quad g^{-1}(y) = y + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \quad g^{-1}(y) = \frac{1}{4} - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$

$0 < y < \frac{1}{4} \quad f^{-1}(y) = y + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{4} - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$


$f(y) = 2(y + \frac{1}{4}) \quad f(\frac{1}{4} - y) = 6(\frac{1}{4} - y) - 3 = \frac{3}{2} - 6y - 3 = -\frac{3}{2} - 6y$

Figura 11: Exámenes tipo antes y después de haber utilizado el entorno CDPYE.



Tras proporcionar a los alumnos la resolución del problema, el siguiente paso en la experiencia consistió en la administración de un cuestionario de opinión/valoración a los alumnos, sujeta al diseño experimental propuesto. Sesiones de grupo y la administración de un cuestionario piloto nos permitió llevar a cabo la validación del mismo, tanto desde el punto de vista del constructo, como de la posible reducción de la dimensionalidad de ítems, así como del estudio de su fiabilidad en cuanto a la consistencia interna. Tras la experiencia piloto, se propuso como definitivo el que presentamos en la figura 12.

6


**CDPYE**  
 como complemento en el estudio del Cálculo de Probabilidades

Referencia del código de barras: 17438397-26E

Valora de 1 a 5 el grado de dificultad (1: sin dificultad; 5: mucha dificultad) que has encontrado, antes y después de usar el entorno CDPYE, en la resolución del ejercicio en lo que se refiere a cada uno de los aspectos recogidos en la siguiente tabla:

| Aspecto  | Valoración antes | Valoración después |
|--|------------------|--------------------|
| Identificar el tipo de problema propuesto  | 4                | 2                  |
| Identificar las herramientas teóricas disponibles para su resolución   | 4                | 2                  |
| Verificar el cumplimiento o no de las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable (propiedades de la transformación considerada) | 3                | 1                  |
| Seleccionar exactamente el resultado teórico necesario (extensión del Teorema de Cambio de Variable)                             | 5                | 2                  |
| Aplicación de la extensión del Teorema de Cambio de Variable:  |                  |                    |
| <input checked="" type="checkbox"/> Valores de la nueva variable   | 3                | 2                  |
| <input checked="" type="checkbox"/> Antimárgenes para cada valor de la nueva variable  | 3                | 2                  |
| <input checked="" type="checkbox"/> Fórmula de Cambio de Variable  | 4                | 2                  |
| <input checked="" type="checkbox"/> Expresión de la función de densidad de la variable original en las antimárgenes              | 4                | 2                  |
| Valoración global de tu dificultad para resolver el problema   | 4                | 3                  |

Después de usar el entorno CDPYE, valora de 1 a 5 tu grado de satisfacción con él (1: nada satisfecho; 5: muy satisfecho) referente a cada uno de los aspectos de la siguiente tabla:

| Aspecto  | Valoración |
|--|------------|
| Estructura   | 5          |
| Sistema de navegación por sus módulos                  | 4          |
| Nivel de captación de la atención del usuario          | 5          |
| Motivación para su uso como complemento al estudio     | 5          |
| Utilidad para el estudio de resultados teóricos        | 2          |
| Utilidad como guía en la resolución de problemas       | 5          |
| Utilidad para conectar resultados teóricos y prácticos | 4          |
| Utilidad para incentivar el autoaprendizaje            | 5          |

Asigna una puntuación global genérica (0 a 10) al entorno CDPYE:

Indica cuantas observaciones consideres oportunas acerca de cada una de las fases del proceso al que has sido sometido (ello nos ayudará seguro a mejorarlo) así como del propio entorno CDPYE (eso nos ayudará a perfeccionarlo y orientarlo a vuestras necesidades)

Este cuestionario es absolutamente anónimo y será tratado bajo las garantías del secreto estadístico.

**¡ Muchas gracias por tu colaboración !**

Figura 12: Cuestionario de opinión/valoración.

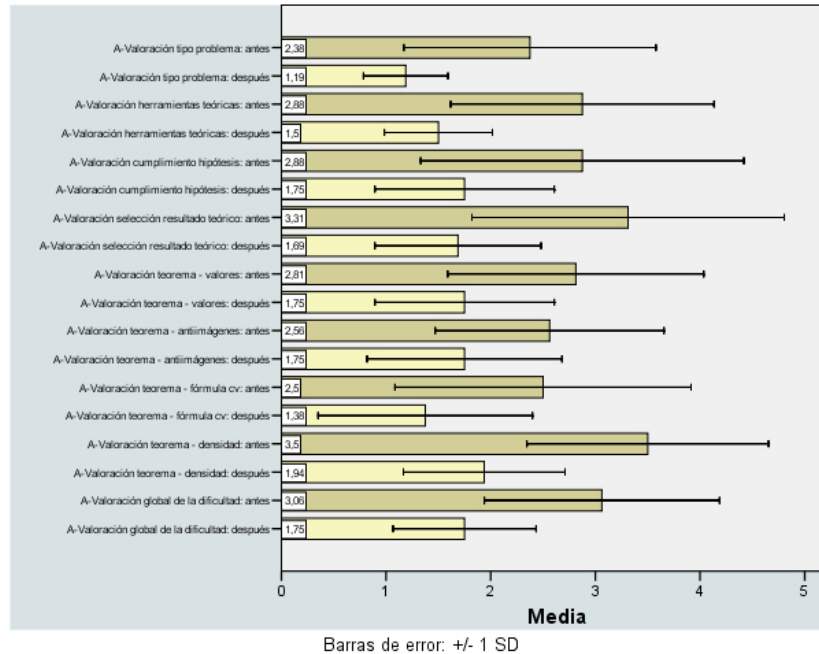
El cuestionario consta de cuatro partes:

- Información del grado de dificultad que el alumno estimó encontrar en la realización del ejercicio, antes y después de usar el entorno, en los aspectos que en él se pueden apreciar (identificación del problema y de las herramientas teóricas, verificación de hipótesis, selección del resultado teórico adecuado, aplicación del teorema y valoración global de la dificultad), bajo una escala de 1 a 5 (1= ninguna dificultad; 5= mucha dificultad).
- Grado de satisfacción del alumno con diferentes aspectos referidos al entorno CDPYE (estructura, navegación, nivel de captación de la atención, motivación para su uso como complemento al estudio, utilidad para el estudio de resultados teóricos, como guía en la resolución de problemas, para conectar resultados teóricos y prácticos y para incentivar el autoaprendizaje).
- Una pregunta final de valoración global del entorno, recogida en una puntuación asignada por el alumno en la escala en la que está habituado a ser evaluado: 0 a 10.
- Un apartado de observaciones, en las que el alumno podía indicar todo aquello que deseara en relación al proceso al que había sido sometido, así como al propio entorno, lo que nos permitirá tomar conciencia de diferentes criterios de posibles mejoras posteriores, a tenor de lo allí indicado.

La referencia del código de barras permite relacionar las puntuaciones individuales de cada ejercicio con los datos proporcionados en el cuestionario de valoración, facilitando posteriormente los análisis oportunos.

Pasamos ahora a comentar algunos aspectos relevantes de los resultados obtenidos, teniendo siempre presente que esta experiencia la hemos planteado como una experiencia piloto para futuras investigaciones:

- Como era de esperar, se ha puesto de manifiesto una considerable mejora en la puntuación asignada en la prueba después de haber utilizado CDPYE ( $7.65 \pm 1.03$ ) con respecto a la obtenida antes de hacerlo ( $5.15 \pm 1.68$ ), siempre bajo una perspectiva exploratoria que puede marcar un patrón de punto de partida.
- En lo que respecta a la valoración del grado de dificultad antes y después de haber utilizado el entorno, se aprecia un considerable descenso en el grado de dificultad encontrado después de haber utilizado CDPYE en todos y cada uno de los aspectos a que se hacía referencia. La figura 13 representa este hecho en el total de alumnos, sin división por grupos.



**Figura 13:** Valoración del grado de dificultad antes y después de haber utilizado el entorno.

Este mismo hecho se refleja igualmente si atendemos a la tipología por grupos, si bien el grupo que no se preparó la prueba (grupo B), por no estar avisado, ha valorado en mejor medida el haber utilizado los contenidos que le proporciona CDPYE de cara a la resolución del problema, apreciando nuevamente un considerable descenso en el grado de dificultad, especialmente notorio en cada una de las valoraciones, como se puede ver en la gráfica inferior de la figura 14.

- En cuanto a la valoración del entorno en los aspectos antes aludidos, nos encontramos, para nuestra satisfacción, con resultados que nos invitan a seguir avanzando en esta línea de innovación docente. Los resultados de los promedios del grado de satisfacción superan en todos los aspectos el 3 sobre 5, lo que nos marca un punto de partida halagador. La gráfica 15 recoge estos resultados para el total de alumnos, así como la puntuación global media, sobre 10, asignada a CDPYE.

Si tenemos en cuenta la división en grupos, los resultados aparecen en la gráfica 16, resultando ser similares, e igualmente satisfactorios

Hemos de decir que, hasta el momento, los resultados son, cuando menos, reconfortantes y halagüeños ya que hemos podido comprobar cómo los alumnos mejoraban notoriamente sus prestaciones ante la resolución de problemas concretos tras dedicar un tiempo a profundizar en los mismos mediante los contenidos incluidos en el entorno. Es nuestra intención seguir ahondando en esta línea e ir evaluando nuestro trabajo ampliando los objetivos de las pruebas como la aquí presentada. Asimismo, las primeras valoraciones de los alumnos acerca de su opinión sobre la utilidad del entorno, su manejabilidad y posibilidades de ayuda en el estudio de las materias, han sido positivas. Podemos decir que la acogida ha sido muy buena y que las sugerencias y opiniones que vierten los alumnos sobre todo el proceso nos están llevando a mejorarlo notoriamente. Asimismo, el entorno CDPYE ha sido presentado en varios foros nacionales e internacionales (ver [1], [2], [3] y [4]), mostrando su evolución. Hay que decir que la acogida por parte del personal

docente ha sido buena, y sus comentarios y sugerencias nos han permitido ir mejorando en sucesivas etapas, lo que ha supuesto, entre otras cosas, el ser merecedor del “Premio de Innovación Docente de la Universidad de Granada”, en su convocatoria de 2007. Igualmente, la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa (SEIO) se ha hecho eco del mismo, incluyendo un artículo divulgativo en su boletín sobre el proyecto (ver [5]). Todo ello nos anima en gran manera a proseguir en nuestra tarea.

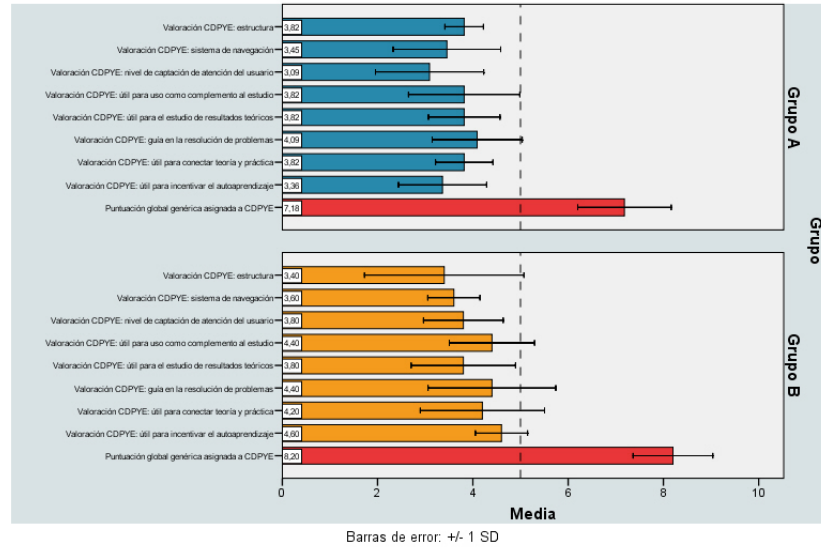


Figura 14: Valoración del grado de dificultad antes y después de haber utilizado el entorno por grupos.

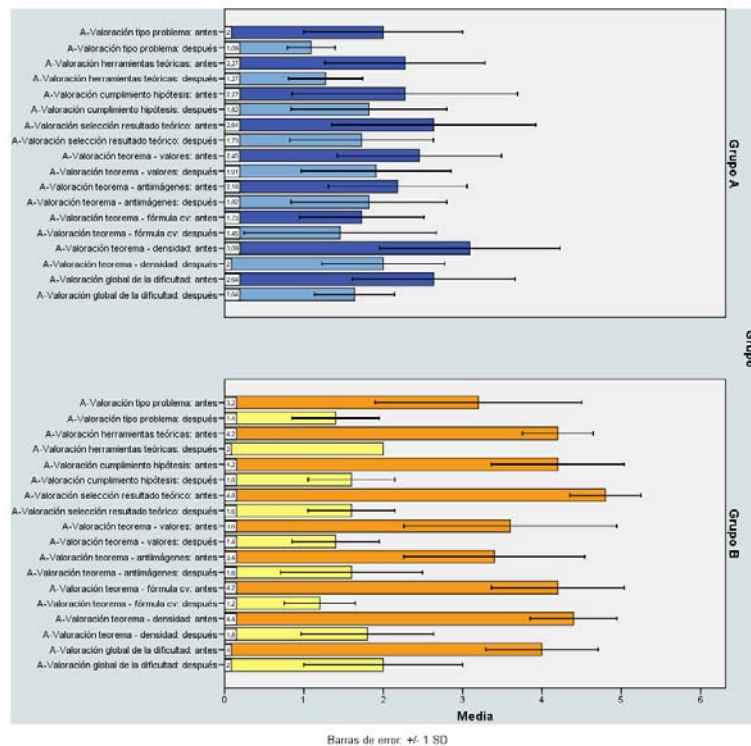


Figura 15: Valoración global y por apartados del entorno CDPYE por los alumnos.

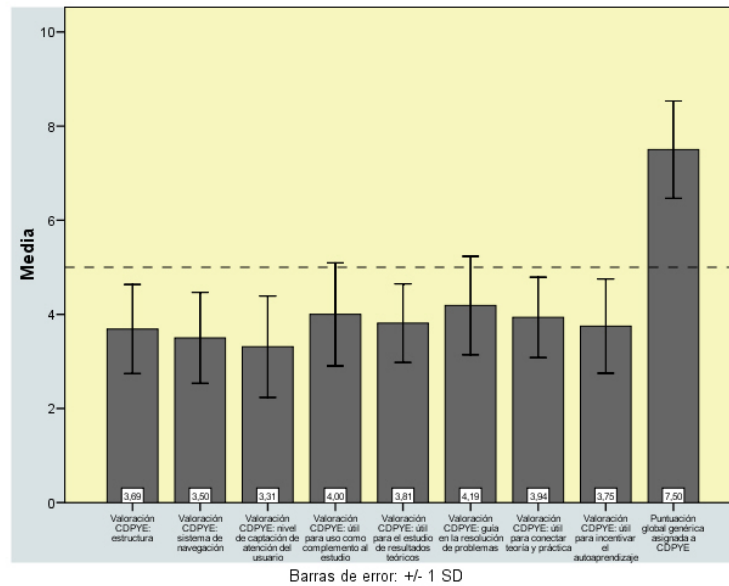


Figura 16: Valoración global y por apartados del entorno CDPYE por los alumnos. Resultados por grupos.

**AGRADECIMIENTOS:** Este trabajo ha sido financiado por el Vicerrectorado de Planificación e Innovación Docentes de la Universidad de Granada, a través del Proyecto de Innovación Docente “Elaboración de material docente sobre Probabilidad para su inclusión en el entorno CDPYE (continuación)”.

RECEIVED JULY 2008  
REVISED FEBRUARY 2009

#### REFERENCES

- [1]. CERDÁ, M.V.; GARCÍA-LIGERO, M. J.; HERMOSO, A.; MALDONADO, J. A.; ROMÁN, P. y TORRES, F. (2004). CDPYE: un entorno interactivo de apoyo a la docencia del Cálculo de Probabilidades y la Estadística Matemática. **XXVIII Congreso de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa**, 615-616.
- [2]. GARCÍA-LIGERO, M. J.; HERMOSO, A.; LÓPEZ, P.; MALDONADO, J. A.; ROMÁN, y P. TORRES, F. (2006). Contenidos de Probabilidad en el entorno CDPYE. **XXIX Congreso de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa**, 283-284.
- [3]. GARCÍA-LIGERO, M. J.; HERMOSO, A.; MALDONADO, J. A.; ROMÁN, P. y TORRES, F. (2007). Aportaciones para la mejora de la calidad en la docencia de la Probabilidad y la Estadística: el entorno CDPYE. **IV Foro de Evaluación de la Calidad de la Educación Superior y de la Investigación**. Granada.
- [4]. GARCÍA-LIGERO, M. J.; HERMOSO, A.; MALDONADO, J. A.; ROMÁN, P. y TORRES, F. (2008). New trends for teaching probability using CDPYE. **8th International Conference on Operations Research**. La Habana..
- [5]. GARCÍA-LIGERO, M. J.; HERMOSO, A.; MALDONADO, J. A.; ROMÁN, P. y TORRES, F. (2008). **The CDPYE environment: an interactive support for studying Probability and Statistics**. Boletín de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa, 24, 37-42.
- [6]. ARCAS, A.; MIÑARRO, A. y CALVO, M. (2009). **Statmedia projects in Statistical Education**. Boletín de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa, 25, 42-56.