Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 4, número 8, diciembre de 2008, páginas 175–202

Sistemas multi–modales de profundidad restringida

Multi-modal systems of restricted depth

Manuel Sierra A.[1]

Recepción: 15-may-2007/Modificación: 13-dic-2008/Aceptación: 18-dic-2008
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

Se presentan como extensiones del cálculo proposicional clásico, la jerarquía de sistemas deductivos SMM–n con $n \geqslant 1$. SMM–n es el *sistema multi–modal de profundidad–n*. El sistema SMM–1 es el cálculo proposicional clásico. El sistema SMM–$(n+1)$ puede ser visto como el resultado de aplicar la regla de necesariedad, asociada a los razonadores con suficiente capacidad de razonamiento, una vez a los teoremas del sistema SMM–n. El sistema SMM resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y puede ser visto como el sistema de *lógica multi–modal* K_m con restricciones. Los sistemas SMM–n son caracterizados con una semántica al estilo Kripke, en la cual, la longitud de las cadenas de mundos posibles se encuentra restringida.

Palabras claves: lógica multi–modal, razonadores con restricciones, lenguaje con restricciones.

Abstract

They are presented as extensions of the classical propositional logic, the hierarchy of deductive systems SMM–n with $n \geqslant 1$. SMM–n is the multi–modal system of depth–n. The system SMM–1 is the classical propositional logic. The system SMM–$(n+1)$ it can be seen as the result of applying the necesariedad rule, associated to the reasoners with enough reasoning capacity, once

[1] Magíster en Ciencias, msierra@eafit.edu.co, profesor integrante del grupo en Lógica y Computación, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

to the theorems of the system SMM–n. The system SMM is of the union of the systems of the hierarchy, and it can be seen as the system of logic multi–modal K_m with restrictions. The systems SMM–n are characterized with a semantics to the style Kripke, in the one which, the longitude of the chains of possible worlds is restricted.

Key words: multi-modal logic, reasoners with restrictions, language with restrictions.

1 Presentación

Los sistemas deductivos, construidos como extensiones del sistema multi–modal K_m utilizando operadores de creencia y conocimiento, son conocidos como *lógicas doxásticas y lógicas epistémicas* [1], y son de interés en inteligencia artificial, en lo que respecta al modelamiento del razonamiento de agentes inteligentes.

Para estas lógicas, desde el punto de vista semántico, se tiene un enfoque básico, el cual consiste en adoptar una semántica de *alternativas epistémicas*, la cual fue propuesta originalmente por Hintikka en *Knowledge and Belief* [2], aunque en la actualidad es más común utilizar la semántica de *mundos posibles*, la cual utiliza las técnicas desarrolladas por Kripke en *Semantical analysis of modal logic* [3]. Desde esta aproximación, las creencias, conocimientos, metas, y demás propiedades de los agentes, se caracterizan con base en un conjunto de *mundos posibles* y *relaciones de accesibilidad* entre ellos.

Una lógica multi–modal normal, es básicamente una lógica proposicional clásica, extendida mediante la adición un operador monádico $[R]$ para cada razonador R, donde la fórmula $[R]X$ será cierta en un mundo posible específico si X es cierta en cada mundo posible accesible por el agente o razonador R desde el mundo posible específico. Para utilizar la lógica descrita como lógica epistémica, la fórmula $[R]X$ se interpreta como R *sabe* X, los mundos posibles se interpretan como alternativas epistémicas, la relación de accesibilidad indica cuales alternativas están disponibles para el razonador R desde cualquier mundo determinado, y además, se deben satisfacer ciertos axiomas específicos asociados al conocimiento.

Como menciona Freund en *Lógica epistémica* [4], cualquier semántica para estos sistemas deductivos debe justificar el teorema $[R](X \to Y) \to ([R]X \to$

$[R]Y$) (modus ponens para el razonador) y la regla de inferencia: de X se sigue $[R]X$ (regla de necesariedad), ya que estas propiedades se encuentran presentes en todas las lógicas normales. Estas dos propiedades, resultan ser las características más problemáticas de las lógicas modales normales, cuando se utilizan como lógicas del conocimiento y la creencia, ya que obligan a concebir al razonador como una entidad capaz de conocer todas las consecuencias lógicas de su conocimiento, lo cual la hace inadecuada para modelar razonadores tales como seres humanos o sistemas computacionales, los cuales tienen limitaciones de espacio y tiempo. Lo anterior determina el llamado problema de la *omnisciencia lógica*, el cual tiene como consecuencia, la modificación de la semántica de mundos posibles, si se quiere representar adecuadamente el conocimiento y las creencias de razonadores reales.

A fin de enfrentar el problema de la *omnisciencia lógica*, se han propuesto variaciones sobre la semántica de mundos posibles intentando conservar su esencia. Algunos investigadores han intentado desarrollar formalismos alternativos para representar la creencia, ya sea readaptando el modelo básico o cambiándolo. Siguiendo con el modelo de creencia de los mundos posibles, Cresswell en *Logic and languages* [5] trabaja con mundos no–clásicos, en los cuales se admiten las inconsistencias, Hintikka en *Impossible posible worlds vindicated* [6] los llama mundos imposibles, Rescher en *The logic of inconsistency* [7] los llama mundos no–estándar. Esta aproximación fue seguida por Levesque en *A logic of implicit and explicit belief* [8], donde un razonador tiene un conjunto relativamente pequeño de creencias explícitas y un conjunto infinito de creencias implícitas, este último incluye las consecuencias lógicas de las creencias explícitas, al operador de creencia implícita se le asocian los mundos estándar y al de creencia explícita los no estándar. La descripción formal del razonamiento parcial hecha por Levesque, es continuada por Schaerf y Cadoli en *Tractable reasoning via approximation* [9] , y a partir de este trabajo, Finger y Wassermann en *Logics for approximate reasoning: Approximating classical logic "from above"* [10], construyen una familia de lógicas, las cuales son aproximaciones a la lógica clásica. Con base en lo anterior, Rabelloa y Finger en *Approximations of Modal Logics: K and beyond* [11], presentan un método para construir aproximaciones a sistemas de lógicas modales, donde el grado de introspección de los razonadores, se encuentra limitado por la aproximación a la lógica clásica que se utilice en la construcción. Por otro lado, Konolige en *A Deduction Model of belief* [12], presenta la alternativa más común al modelo de creencia de los mundos posibles, al representar el razonamiento del agente con las llamadas *estructuras de deducción*, las cuales constan de un conjunto de fórmulas y un conjunto limitado de reglas de inferencia (el cual puede ser lógicamente incompleto), y en este sistema un razonador cree una fórmula, si ésta es una consecuencia del conjunto de fórmulas de la estructura utilizando únicamente reglas de inferencia de la estructura. A pesar de su simplicidad, esta aproximación funciona bien sólo bajo ciertas circunstancias.

Se tiene entonces que los formalismos sobre lógicas del conocimiento y la creencia, a pesar de haber recorrido un largo camino desde el primer trabajo de Hintikka, y en el cual se han realizado progresos en el desarrollo de semánticas alternativas, a nivel técnico el problema de la omnisciencia lógica no puede considerarse resuelto, todavía siguen pendientes muchas cuestiones y problemas fundamentales. En síntesis, el problema de la omnisciencia lógica continúa abierto, y se encuentra íntimamente relacionado con la capacidad de razonamiento de los razonadores.

En este trabajo se presenta una jerarquía de sistemas deductivos, los cuales tienen como punto de partida las siguientes consideraciones: en primer lugar, cada razonador tiene una capacidad de razonamiento limitada, por lo que, la aplicabilidad de las reglas de necesariedad debe ser restringida y el lenguaje de cada razonador debe ser limitado, frenando así la potencia del modus ponens para cada razonador. En segundo lugar, la capacidad deductiva de diferentes razonadores no es en general la misma, por lo que, los lenguajes de los razonadores no tienen que ser iguales.

Se presenta entonces, como extensión del cálculo proposicional clásico, la jerarquía de sistemas deductivos SMM–n con $n \geqslant 1$. SMM–n es el sistema *multi–modal de profundidad–n*. El sistema SMM–1 es el cálculo proposicional clásico. El sistema SMM–$(n+1)$ puede ser visto como el resultado de aplicar la regla de necesariedad, asociada a los razonadores con suficiente capacidad deductiva, solo una vez a los teoremas del sistema SMM–n. El lenguaje del sistema SMM–$(n+1)$ es una extensión propia del lenguaje de SMM–n, donde la jerarquía de los lenguajes se encuentra asociada, a una jerarquía en la capacidad deductiva de los razonadores.

El sistema SMM–2 se obtiene a partir de CP, el cual coincide con SMM–1, pidiendo que los axiomas de CP sean verdades necesarias para los razonadores de profundidad–1, y que las verdades necesarias de tales razonadores se preserven con la regla de inferencia modus ponens, es decir, el razonador aplica la regla modus ponens. El sistema SMM–$(n+1)$ se obtiene a partir de SMM–n, de manera similar a como se construyó SMM–2 a partir de SMM–1. El sistema SMM, *sistema multi–modal con restricciones*, resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y puede ser visto como el sistema de *lógica multi–modal* K_m con restricciones en el lenguaje y en las reglas de necesariedad, es decir, con razonadores de diferente capacidad de razonamiento.

Los modelos para el sistema deductivo SMM–2, son conjuntos de mundos posibles al estilo Kripke, donde del mundo actual (en el cual se determina si una fórmula de CP es una verdad necesaria para un razonador), se accede a mundos posibles en los cuales rige el cálculo proposicional clásico. Los modelos para el sistema deductivo SMM–$(n+1)$ donde $n \geqslant 2$, generalizan esta idea. Se tiene de esta manera, que los sistemas SMM–n son caracterizados con una semántica al estilo Kripke, en la cual, la longitud de las cadenas de mundos posibles se encuentra restringida.

Aunque no se soluciona el problema de la omnisciencia lógica, las restricciones en el lenguaje de los sistemas y de los razonadores, le imponen ciertos límites. Por ejemplo en el sistema SMM–4, un razonador de tipo–2 no puede hacer inferencias sobre fórmulas de tipo–3, mientras que un razonador de tipo–3 o superior si puede hacerlas, pero ningún razonador puede hacer inferencias sobre fórmulas de tipo–4.

Las pruebas de validez y completitud de los sistemas de la jerarquía, son presentadas de forma detallada, así como las pruebas para la caracterización semántica del sistema SMM.

2 Jerarquía de sistemas deductivos SMM–n $(n \geqslant 1)$

El lenguaje de todos los sistemas de la jerarquía SMM–$n(n \geqslant 1)$ consta de los conectivos binarios $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$; el conectivo unario $\sim$; y un conjunto numerable de conectivos unarios $[A], [B], \ldots$ (*operadores de necesariedad* asociados a los razonadores $A, B, \ldots$). El conjunto de formulas del cálculo proposicional clásico CP, o *fórmulas de tipo*–1 es generado recursivamente a partir de un conjunto de formulas atómicas utilizando los conectivos de la siguiente forma:

1. Si P es una fórmula atómica entonces P es una fórmula de tipo–1.

2. Si X es una fórmula de tipo–1 entonces $\sim(X)$ es una fórmula de tipo–1.

3. Si X y Y son fórmulas de tipo–1 entonces $(X) \to (Y)$, $(X) \leftrightarrow (Y)$, $(X) \wedge (Y)$ y $(X) \vee (Y)$ son fórmulas de tipo–1.

En general, para $n \geqslant 1$: si X es una fórmula de tipo–n y $[R]$ es un operador de necesariedad de profundidad–r[1] con $r \geqslant n$ entonces $[R]X$ es una fórmula de tipo–$(n+1)$.

Si X es una fórmula de tipo–k, Y es una fórmula de tipo–q y $n =$ máximo $\{k, q\}$ entonces $(X) \to (Y)$, $(X) \leftrightarrow (Y)$, $(X) \wedge (Y)$ y $(X) \vee (Y)$ son fórmulas de tipo–n.

Si X es una fórmula de tipo–n entonces $\sim(X)$ es una fórmula de tipo–n

El *sistema deductivo para el cálculo proposicional clásico* CP consta de los siguientes axiomas (donde X, Y y Z son fórmulas de tipo–1):

Ax 1.1 $X \to (Y \to X)$
Ax 1.2 $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$
Ax 1.3 $X \to (X \vee Y)$
Ax 1.4 $Y \to (X \vee Y)$
Ax 1.5 $(X \to Z) \to ((Y \to Z) \to ((X \vee Y) \to Z))$
Ax 1.6 $(X \wedge Y) \to X$
Ax 1.7 $(X \wedge Y) \to Y$
Ax 1.8 $(X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to (Y \wedge Z)))$
Ax 1.9 $X \to (\sim X \to Y)$
Ax 1.10 $X \vee \sim X$
Ax 1.11 $(X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)$
Ax 1.12 $(X \leftrightarrow Y) \to (Y \to X)$
Ax 1.13 $(X \to Y) \to ((Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y))$.

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de X y $X \to Y$ se infiere Y.

[1] Cada razonador (operador) tiene asociado un entero positivo llamado la profundidad del razonador (operador). Si $[R]$ es un operador de profundidad–r entonces $[R]$ es un operador de tipo–1, tipo–2, ..., tipo–r, es decir, la profundidad de un operador es su máximo tipo.

Definición 1 (Operadores de aceptación)**.**

$[R]X$	*X es una necesariedad (verdad necesaria) para el razonador R.*
$\neg_R X = [R] \sim X$	*X es imposible para el razonador R.*
$(R)X = \sim [R] \sim X$	*X es posible para el razonador R.*

$[R]$, $\neg_R$, y (R) son llamados *operadores de aceptación* asociados al razonador R. Como consecuencia de la definición, cada operador de aceptación puede ser caracterizado en términos de los demás: $[R]X \leftrightarrow \neg_R \sim X, [R]X \leftrightarrow \sim (R) \sim X, \neg_R X \leftrightarrow [R] \sim X, \neg_R X \leftrightarrow \sim (R)X, (R)X \leftrightarrow \sim [R] \sim X, (R)X \leftrightarrow \sim \neg_R X$.

La unión de los conjuntos de fórmulas de tipo–1, tipo–2, ..., tipo–n determinan el conjunto de *fórmulas de profundidad–n*, el cual constituye el *lenguaje del sistema* SMM–n[2].

Los sistemas SMM–n, *sistemas multi–modales de profundidad–n*, se construyen de la siguiente manera:

SMM–1 es el *cálculo proposicional clásico* CP.

Para $n \geqslant 1$, el sistema SMM–$(n + 1)$ se construye a partir del sistema SMM–n de la siguiente manera:

- Si X es un axioma de SMM–n entonces X es un axioma de SMM–$(n+1)$.
- Sea T una fórmula de tipo–t con $1 \leqslant t \leqslant n$, y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $t \leqslant r$, si T es un axioma de SMM–n entonces $[R]T$ es un axioma de SMM–$(n + 1)$.
- Los axiomas de CP donde X, Y y Z son fórmulas de profundidad–$(n+1)$, son axiomas de SMM–$(n + 1)$[3].
- Si $X \rightarrow Y$ una fórmula de tipo–t con $1 \leqslant t \leqslant n$ y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $t \leqslant r$, entonces, $[R](X \rightarrow Y) \rightarrow$

[2] Decir que la fórmula X es de profundidad–n significa que el tipo de X se encuentra entre 1 y n.

[3] Estos axiomas serán referenciados como el correspondiente axioma de CP. De manera precisa, el axioma correspondiente a Ax 1.k (con $13 \geqslant k \geqslant 1$) en el sistema SMM–$n$ (con $n \geqslant 1$), debe ser referenciado como Ax n.k.

$([R]X \to [R]Y)$ es un axioma de SMM–$(n+1)$. Este axioma será referenciado como MP$[R]$: modus ponens para el operador de necesariedad $[R]$.

- El sistema SMM–$(n+1)$ tiene como única regla de inferencia el *modus ponens* de profundidad–$(n+1)$, es decir, de X y $X \to Y$ se infiere Y, donde X y Y son fórmulas de profundidad–$(n+1)$. Esta regla será referenciada como MP–$(n+1)$[4].

Definición 2 (Teoremas)**.** Se dice que una fórmula X es un *teorema de SMM–n*, denotado $\Vdash_n X$, si y solamente si X es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SMM–n o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando X es un teorema de CP, se utiliza la notación $\vdash X$.

Si Γ es un conjunto de fórmulas de profundidad–n, se dice que una fórmula X es un *teorema de SMM–n a partir de* Γ, denotado $\Gamma \Vdash_n X$, si y solamente si X es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SMM–n o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando X es un teorema de CP a partir de Γ, se utiliza la notación $\Gamma \vdash X$.

3 Representación interna de los teoremas

Proposición 1 (Preservación de los teoremas)**.** *Para $1 \leqslant n < k$, los teoremas de SMM–n son teoremas de SMM–$(n+1)$ y de SMM–k.*

Prueba. Los teoremas de SMM–n son consecuencias de sus axiomas, y como los axiomas de SMM–n también son axiomas de SMM–$(n+1)$, entonces los teoremas de SMM–n también son teoremas de SMM–$(n+1)$. La segunda parte es consecuencia inmediata de la primera. $\square$

En lo que sigue se utilizarán los siguientes resultados de CP muy conocidos, y como en los sistemas SMM–n con $n \geqslant 1$, se tienen los correspondientes axiomas de CP y la regla de inferencia MP para fórmulas de profundidad–n,

[4] Se utilizará la notación MP cuando es claro el valor de n.

entonces, en cada uno de estos sistemas valen estos resultados (para detalles de las pruebas en CP ver [13] y [14]). *Introducción de la conjunción*: $X \to (Y \to (X \wedge Y))$, *eliminación de la conjunción*: $(X \wedge Z) \to X, (X \wedge Z) \to Z$, *introducción y eliminación de la conjunción en el consecuente*: $(X \to (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (X \to Z))$, *silogismo hipotético*: $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$, *importación-exportación*: $(X \to (Y \to Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \to Z)$, *equivalencia material*: $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (Y \to X)), (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (\sim X \wedge \sim Y))$, *demostración indirecta*: $(X \to (Y \wedge \sim Y)) \to \sim X, (\sim X \to (Y \wedge \sim Y)) \to X$, *doble negación*: $X \leftrightarrow \sim\sim X$, *negación de la disyunción*: $\sim(X \vee Y) \leftrightarrow (\sim X \wedge \sim Y)$, *negación de la conjunción*: $\sim(X \wedge Y) \leftrightarrow (\sim X \vee \sim Y)$, *negación del condicional*: $\sim(X \to Y) \leftrightarrow (X \wedge \sim Y)$, *implicación material*: $(X \to Y) \leftrightarrow (\sim X \vee Y)$, *principio de retorsión*: $(\sim X \to X) \to X$, *teorema de deducción* : si de X se infiere Y entonces $X \to Y$.

Proposición 2 (Representación interna de los teoremas). *Sean X una fórmula de profundidad–p con $1 \leqslant p \leqslant n$, y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $p \leqslant r$:*

- *Si X es un teorema de SMM–n entonces $[R]X$ es un teorema de SMM–$(n+1)$.*
- *Si $\sim X$ es un teorema de SMM–n entonces $\neg_R X$ es un teorema de SMM–$(n+1)$.*

Prueba. Supóngase que $\Vdash_n X$, se probará $\Vdash_{n+1} [R]X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SMM–n.

Paso base. La longitud de la demostración de X en SMM–n es 1, es decir, X es un axioma de SMM–n, pero si X es un axioma de SMM–n, donde X es de profundidad–p con $1 \leqslant p \leqslant n$, y $[R]$ es un operador de necesariedad con profundidad–r donde $p \leqslant r$, entonces por definición, $[R]X$ es axioma de SMM–$(n+1)$, y por lo tanto, $\Vdash_{n+1} [R]X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SMM–n es menor que L entonces $\Vdash_{n+1} [R]Y$.

Supóngase que la demostración de X en SMM–n tiene longitud L mayor que uno. Se tiene entonces que X es un axioma ó X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_{n+1} [R]X$. En el segundo caso se tienen, para alguna fórmula Z, demostraciones en SMM–n de $Z \to X$ y de Z, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_{n+1} [R](Z \to X)$ y $\Vdash_{n+1} [R]Z$. Como en SMM–$(n+1)$ con $n \geqslant 1$ se tiene como axioma $MP[R]$: $[R](Z \to X) \to ([R]Z \to [R]X)$, aplicando dos veces la regla MP resulta $\Vdash_{n+1} [R]X$.

Utilizando la definición de imposibilidad, la segunda parte es consecuencia inmediata de la primera. □

Proposición 3 (Conjunción de necesariedades y de imposibilidades)**.** *Si X y Y son fórmulas de profundidad–p con $1 \leqslant p \leqslant n$ y $[R]$ es un operador de necesariedad de profundidad–r con $p \leqslant r$, entonces, $[R](X \wedge Y) \leftrightarrow ([R]X \wedge [R]Y)$ y $\neg_R(X \vee Y) \leftrightarrow (\neg_R X \wedge \neg_R Y)$ son teoremas de SMM–$(n+1)$.*

Prueba. Por los axiomas Axn.6 y Axn.7 se tienen $(X \wedge Y) \to X$ y $(X \wedge Y) \to Y$, y como $[R]$ es un operador de necesariedad de profundidad–r con $p \leqslant r$, entonces $[R]((X \wedge Y) \to X)$ y $[R]((X \wedge Y) \to Y)$ son axiomas de SMM–$(n+1)$. Al tener $\Vdash_{n+1} [R]((X \wedge Y) \to X)$ y $\Vdash_{n+1} [R]((X \wedge Y) \to Y)$, utilizando el axioma MP$[R]$ y MP se infieren $\Vdash_{n+1} [R](X \wedge Y) \to [R]X$ y $\Vdash_{n+1} [R](X \wedge Y) \to [R]Y$. Utilizando introducción de la conjunción en el consecuente se infiere $\Vdash_{n+1} [R](X \wedge Y) \to ([R]X \wedge [R]Y)$ con $n \geqslant 1$.

Por otro lado, de la regla introducción de la conjunción, se tiene $\Vdash_n X \to (Y \to (X \wedge Y))$. Por la proposición 2 se infiere $\Vdash\ n+1[R](X \to (Y \to (X \wedge Y)))$, y utilizando el axioma MP$[R]$ y MP resulta $\Vdash_{n+1} [R]X \to [R](Y \to (X \wedge Y))$, como además por MP$[R]$ se tiene $\Vdash_{n+1} [R](Y \to (X \wedge Y)) \to ([R]Y \to [R](X \wedge Y))$, entonces por silogismo hipotético se obtiene $\Vdash_{n+1} [R]X \to ([R]Y \to [R](X \wedge Y))$. Utilizando importación se infiere $\Vdash_{n+1} ([R]X \wedge [R]Y) \to [R](X \wedge Y)$ con $n \geqslant 1$. Como ya se probó la recíproca, entonces por introducción de la conjunción y equivalencia material resulta $\Vdash_{n+1} [R](X \wedge Y) \leftrightarrow ([R]X \wedge [R]Y)$ con $n \geqslant 1$. Por negación de la disyunción, en SMM–n se tienen $\sim(X \vee Y) \to (\sim X \wedge \sim Y)$ y $(\sim X \wedge \sim Y) \to \sim(X \vee Y)$, por la proposición 2, MP$[R]$ y equivalencia material se infiere en SMM–$(n+1)$ que $[R]\sim(X \vee Y) \leftrightarrow [R](\sim X \wedge \sim Y)$, por la primera parte de esta proposición resulta $[R]\sim(X \vee Y) \leftrightarrow ([R]\sim X \wedge [R]\sim Y)$, lo cual por la definición de imposibilidad significa que $\neg_R(X \vee Y) \leftrightarrow (\neg_R X \wedge \neg_R Y)$ es teorema de SMM–$(n+1)$. □

Proposición 4 (Sustitución por equivalencia)**.** *Sean X y Y fórmulas de profundidad–p con $1 \leqslant p \leqslant n$, y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $p \leqslant r$, si $X \leftrightarrow Y$ es un teorema de SMM–n entonces $[R]X \leftrightarrow [R]Y$ es un teorema de SMM–$(n+1)$.*

Prueba. Supóngase que $\Vdash_n X \leftrightarrow Y$, por equivalencia material resulta $\Vdash_n (X \to Y) \wedge (Y \to X)$, por la proposición 2 se infiere $\Vdash_{n+1} [R]((X \to Y) \wedge (Y \to X))$, por la proposición 3 se obtiene $\Vdash_{n+1} [R](X \to Y) \wedge [R](Y \to X)$, utilizando introducción y eliminación de la conjunción y el axioma MP$[R]$ se genera $\Vdash_{n+1} ([R]X \to [R]Y) \wedge ([R]Y \to [R]X)$, finalmente, aplicando equivalencia material se concluye $\Vdash_{n+1} [R]X \leftrightarrow [R]Y$ (Utilizando las definiciones de los operadores de aceptación, también se siguen $(R)X \leftrightarrow (R)Y$ y $\neg_R X \leftrightarrow \neg_R Y$). $\square$

Como consecuencia de esta proposición se tiene que, en SMM–n vale sustitución por equivalencia. Es decir, si $F(T)$ es una fórmula de profundidad–n en la cual figura la fórmula T de tipo–t con $1 \leqslant t \leqslant n$, y $F(Z)$ es el resultado de cambiar en $F(T)$ alguna ocurrencia de T por Z, donde Z es una fórmula de tipo–t, entonces, de $\Vdash_n X \leftrightarrow Y$ se infiere $\Vdash_n F(X) \leftrightarrow F(Y)$.

4 n–Modelos

Definición 3 (n–marco)**.** La terna (S, M_a, RA) es un *n–marco* si y solamente si S es un conjunto, M_a es un elemento de S, RA es un conjunto de relaciones binarias sobre S (una relación asociada a cada operador de necesariedad), donde n indica la *profundidad* del marco. Los elementos de S son llamados *mundos posibles*, el mundo posible M_a es el mundo actual, y los elementos de RA son las relaciones de accesibilidad.

Cada mundo posible de S tiene *asociado un lenguaje.* Si un mundo tiene asociado el lenguaje del sistema SMM–k, lenguaje de profundidad–k, entonces se dice que el mundo es de profundidad–k. Cada relación de accesibilidad también tiene asociada una profundidad, la cual coincide con la profundidad del razonador u operador de necesariedad asociado. La profundidad satisface las siguientes restricciones, donde M y N son mundos diferentes y R es una relación de accesibilidad (M_t indica que el mundo M tiene profundidad–t):

RP1. Si M es el mundo actual entonces M_n.

RP2. Si $M_p R N_q$ entonces $q < p$, donde $1 \leqslant p \leqslant n$ y $1 \leqslant q \leqslant n$.

RP3. $[R]$ es un operador de necesariedad de profundidad–r si y solo si R es una relación de accesibilidad de profundidad–r.

Como consecuencia se tiene que, ningún otro mundo accede al mundo actual, los mundos de tipo–1 no acceden a ningún mundo.

Definición 4 (Cadena de mundos)**.** Dado un n–marco (S, M_a, RA), si para $1 \leqslant m \leqslant t \leqslant n, M_m$ es un mundo posible, para $1 \leqslant r < t \leqslant n, R_r$ es una relación de accesibilidad, y $C = M_t \ldots M_2 M_1$ donde M_t es el mundo actual entonces

$$\text{C es una cadena de } (S, M_a, RA) \text{ significa que } (\forall k, 1 \leqslant k < t)(M_{k+1} R_k M_k)$$

En la cadena $C = M_t \ldots M_2 M_1$ se dice que la *profundidad o longitud de* C es t. Observar que una cadena tiene profundidad–t significa que la cadena está formada por t mundos posibles. Observar también que en un n–marco la longitud máxima de una cadena es n.

Definición 5 (n–modelo)**.** Sea (S, M_a, RA) un n–marco y F_n el conjunto de las fórmulas de profundidad–n. (S, M_a, RA, V) es un *n-modelo* si y solamente si V es una función parcial[5] (valuación) de SxF_n en $\{0, 1\}$ la cual satisface las siguientes *reglas o condiciones*:

Sean P una fórmula atómica, T una fórmula de tipo–t, S una fórmula de tipo–s, y M_k un mundo de profundidad–k, donde $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant k \leqslant n$.

Vat	$V(M_k, P) = 1$ ó $V(M_k, P) = 0$
$V \sim$	$V(M_k, \sim T) = 1 \Leftrightarrow V(M_k, T) = 0$
$V\wedge$	$V(M_k, T \wedge S) = 1 \Leftrightarrow V(M_k, T) = 1 = V(M_k, S)$
$V\vee$	$V(M_k, T \vee S) = 0 \Leftrightarrow V(M_k, T) = 0 = V(M_k, S)$
$V \rightarrow$	$V(M_k, T \rightarrow S) = 0 \Leftrightarrow V(M_k, T) = 1$ y $V(M_k, S) = 0$

[5] Parcial puesto que, si M es de profundidad–p y T es de tipo–t, entonces para que $V(M_p, T)$ esté definida, debe ocurrir que $p \geqslant t$ (esta situación será referenciada como: función parcial en el sentido de valuación).

$V\leftrightarrow \quad V(M_k, T\leftrightarrow S)=1 \Leftrightarrow V(M_k,T)=V(M_k,S)$ [6]

$V[R] \quad V(M_m,[R]T)=1 \Leftrightarrow (\forall K_k \in S)(M_m R K_k \Rightarrow V(K_k,T)=1)$, donde $1\leqslant t\leqslant k<m\leqslant n, T$ es una fórmula de tipo–t, y R un razonador de profundidad–r con $t\leqslant r$

Proposición 5 (Caracterización semántica de los operadores de aceptación). *Para* $1\leqslant t\leqslant k<m\leqslant n, T$ *es una fórmula de tipo–t y* $[R]$ *un operador de necesariedad de profundidad–r con* $t\leqslant r$*, se tienen:*

$V_{\neg R} \quad V(M_m,{}_{\neg R}T)=1 \Leftrightarrow (\forall K_k \in S)(M_m R K_k \Rightarrow V(K_k,T)=0)$

$V(R) \quad V(M_m,(R)T)=1 \Leftrightarrow (\exists K_k \in S)(M_m R_r K_k \text{ y } V(K_k,T)=1)$

Prueba. Supóngase que $1\leqslant t\leqslant k<m\leqslant n, T$ es una fórmula de tipo–t y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $t\leqslant r$. De V[R] se tiene que, $V(M_m,[R]\sim T)=1 \Leftrightarrow (\forall K_k \in S)(M_m R K_k \Rightarrow V(K_k,\sim T)=1)$. Utilizando la definición de imposibilidad y la regla $V\sim$ se infiere que $V(M_m,{}_{\neg R}T)=1 \Leftrightarrow (\forall K_k \in S)(M_m R K_k \Rightarrow V(K_k,T)=0)$, por lo tanto $V_{\neg R}$.

De $V[R]$ se tiene que, $V(M_m,[R]\sim T)=1 \Leftrightarrow (\forall K_k \in S)(M_m R K_k \Rightarrow V(K_k,\sim T)=1)$. Por lo que, $V(M_m,[R]\sim T)=0 \Leftrightarrow (\exists K_k \in S)(M_m R K_k$ y $V(K_k,\sim T)=0)$, lo cual por $V\sim$ y la definición de posibilidad significa que $V(M_m,(R)T)=1 \Leftrightarrow (\exists K_k \in S)(M_m R K_k$y $V(K_k,T)=1)$, por lo tanto $V(R)$. □

5 n–Validez

Definición 6 (n–validez). Sea X una fórmula de profundidad–n, se dice que X es *verdadera en el n–modelo* $M=(S,M_a,RA,V)$ (denotado $M\vDash_n X$) si y solo si $V(M_a,X)=1$. Se dice que X es *n–válida* (denotado $\vDash_n X$) si y solo si X es verdadera en todo n–modelo.

Observar que cuando se habla de 1–validez, se hace referencia a los 1–modelos, pero en estos modelos no aplica la regla $V[R]$, es decir, los 1–modelos

[6]También se tienen las reglas correspondientes cuando S es una fórmula de tipo–t, y T es una fórmula de tipo–s.

son los modelos del cálculo proposicional clásico CP, por lo que 1–validez coincide con validez en CP.

Resulta entonces que, una fórmula X de profundidad–n *no* es n–válida si y solamente si existe un n–modelo $M = (S, M_a, RA, V)$, en el cual X no es verdadera, es decir $V(M_a, X) = 0$. Por lo que, si la fórmula X no es n–válida, utilizando las reglas $V\sim, V\wedge, V\vee, V\rightarrow, V\leftrightarrow$ y $V[R]$, a partir de $V(M_a, X) = 0$, se construye un n–modelo $M = (S, M_a, RA, V)$ que refute la validez de la fórmula X, este modelo es llamado *n–modelo refutador*. Pero si la fórmula X es n–válida, entonces la construcción del *n–modelo refutador* fracasará, puesto que, en alguno de los mundos posibles (bien sea M_a o un mundo generado por la aplicación de la regla $V[R]$) del modelo en construcción se presentará una inconsistencia. Cuando fracasa la construcción del modelo refutador, entonces se genera una cadena de mundos posibles $C = M_1M_2 \dots M_k$ tal que M_k *es inconsistente*, es decir, para alguna fórmula $Z, V(M_k, Z) = 1$ y $V(M_k, Z) = 0$. En este caso se dice que *la cadena C es inconsistente*.

En resumen, para probar la n–validez de una fórmula X de profundidad–n, se supone que la fórmula X no es n–válida, es decir, es falsa en el mundo actual M_a, y a partir de esta información se construye el n–modelo refutador. Si tal n–modelo no existe entonces se concluye que la fórmula X es n–válida.

Proposición 6 (Preservación de la validez)**.** *Sea T una fórmula de tipo–t con $1 \leqslant t \leqslant n$ y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $t \leqslant r$, si T es n–válida entonces T y $[R]T$ son $(n+1)$–válidas.*

Prueba. Supóngase que $\vDash_n T$, por lo que en la búsqueda constructiva de un n–modelo refutador de la fórmula T, resulta una cadena inconsistente $C = M_1M_2 \dots M_s$ para algún s tal que $1 \leqslant s \leqslant n$. Por lo tanto, en la búsqueda constructiva de un $(n+1)$–modelo refutador de la fórmula T, resulta la misma cadena inconsistente $C = M_1M_2 \dots M_s$ para algún $k, 1 \leqslant s \leqslant n+1$, se concluye entonces que $\vDash_{n+1} T$.

Para la segunda parte, sea T de tipo–t con $t \leqslant n$, y supóngase que $[R]T$ no es $(n+1)$–válida, por lo que existe un $(n+1)$–modelo refutador de $[R]T, M = (S, M_{(n+1)}, RA, V)$ tal que $[R]T$ no es verdadera en M, es decir $V(M_{(n+1)}, [R]T) = 0$, por la regla $V[R]$ resulta que existe un mundo posible K_k tal que $M_{(n+1)}RK$ y $V(K, T) = 0$. El $(n+1)$–modelo M se encuentra formado por cadenas consistentes de la forma $M_{(n+1)}K_k \dots S_s$, las cuales tienen profundidad a lo sumo $n+1$, y además en el mundo $M_{(n+1)}$ la fórmula $[R]T$ toma el valor 0, y en el mundo K_k la fórmula T toma el valor 0. A partir del $(n+1)$–modelo refutador M de $[R]T$ se construye un n–modelo refutador M' de la fórmula T de la siguiente manera: se elimina el mundo actual $M_{(n+1)}$ del modelo M y se toma como mundo actual del modelo M' el mundo K_k, en las relaciones de accesibilidad del modelo M se eliminan las relaciones existentes entre el mundo $M_{(n+1)}$ y cualquier otro mundo obteniéndose el conjunto RA', y del dominio de la valuación V se excluye el mundo $M_{(n+1)}$ obteniéndose la valuación V', y resultando de esta manera que $M' = (S - \{M_{(n+1)}\}, K_k, RA', V')$. Por construcción el modelo M' se encuentra formado por cadenas consistentes $K_k \ldots S_s$ de profundidad a lo sumo n, lo que significa que M' es un n–modelo, y además en el mundo actual K_k la fórmula T toma el valor 0, por lo tanto M' es un n–modelo refutador de la fórmula T, es decir T no es verdadera en el n–modelo M', por lo que T no es n–válida. De lo anterior se concluye que si $[R]T$ no es $(n+1)$–válida entonces T no es n–válida, es decir, si T es n–válida entonces $[R]T$ es $(n+1)$–válida. $\square$

Proposición 7 (Validez de los axiomas)**.** *Sea X una fórmula de profundidad–n con $n \geqslant 1$, si X es un axioma de SMM–n entonces X es n–válida.*

Prueba. Supóngase que X axioma de SMM–n, se probará $\vDash_n X$ haciendo inducción sobre n.

Paso base ($n = 1$). Se debe probar: X axioma de SMM–1 $\Rightarrow \vDash_1 X$, lo cual es cierto ya el sistema SMM–1 es el cálculo proposicional clásico CP, 1–validez es validez en CP y utilizando el teorema de validez de CP, presentado en [13], se obtiene que $\vdash_{CP} X \Rightarrow \vDash_{CP} X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene, para cada fórmula Y que, si Y es un axioma de SMM–n entonces $\vDash_n Y$. Supóngase que X es un axioma de SMM–$(n+1)$, se debe probar que $\vDash_{n+1} X$. Al ser X un axioma se deben considerar 4 casos: en el primer caso X es un axioma de SMM–n, en el segundo X es de la forma $[R]T$, donde T es un axioma de SMM–n, en el tercer caso X es de la forma $[R](T \to S) \to ([R]T \to [R]S)$, en el cuarto caso X es uno de los axiomas $Ax(n+1).1, \ldots, Ax(n+1).13$.

En el primer caso, X es un axioma de SMM–n, utilizando la hipótesis inductiva resulta que $\vDash_n X$, y por la proposición 6 se infiere $\vDash_{n+1} X$.

En el segundo caso, X es de la forma $[R]T$, donde T es un axioma de SMM–n, utilizando la hipótesis inductiva resulta que $\vDash_n T$, y por la proposición 6 se infiere $\vDash_{n+1} [R]T$, por lo que $\vDash_{n+1} X$.

En el tercer caso, X es de la forma $[R](T \rightarrow S) \rightarrow ([R]T \rightarrow [R]S)$. Supóngase que $1 \leqslant t \leqslant s \leqslant n, T$ es de tipo–t, S es de tipo–s y $[R]$ es un operador de profundidad–r con $s \leqslant r$, si esta fórmula no fuese $(n+1)$–válida, entonces existiría un $(n+1)$–modelo tal que en el mundo actual M, $V(M, [R](T \rightarrow S) \rightarrow ([R]T \rightarrow [R]S)) = 0$, lo cual según la regla $V \rightarrow$ significa $V(M, [R](T \rightarrow S)) = 1$ y $V(M, [R]T \rightarrow [R]S) = 0$, y de nuevo por la misma regla se obtienen $V(M, [R]T) = 1$ y $V(M, [R]S) = 0$, de esta última por la regla $V[R]$ se infiere la existencia de un mundo K, tal que MRK y $V(K, S) = 0$, y como $V(M, [R](T \rightarrow S)) = 1$ por $V[R]$ se infiere $V(K, T \rightarrow S) = 1$, como $V(M, [R]T) = 1$, por $V[R]$ se obtiene $V(K, T) = 1$ y como ya se tiene $V(K, T \rightarrow S) = 1$, por $V \rightarrow$ se genera $V(K, S) = 1$, pero esto es imposible. Por lo tanto, $[R](T \rightarrow S) \rightarrow ([R]T \rightarrow [R]S)$ es $(n+1)$–válida, es decir $\vDash_{n+1} X$.

Finalmente, en el cuarto caso X es uno de los axiomas Ax(n+1),1, …, $Ax(n+1)$,13, por lo que, utilizando las reglas Vat, $V \sim$, $V\wedge$, $V\vee$, $V \rightarrow$ y $V \leftrightarrow$, y procediendo como es habitual para la validez del cálculo proposicional clásico (para detalles del caso clásico ver [13] y [14]), se concluye que $\vDash_{n+1} X$. □

Proposición 8 (MP preserva validez)**.** *Para $n \geqslant 1$, T y S fórmulas de profundidad–n, si T y $T \rightarrow S$ son n–válidas entonces S también es n–válida.*

Prueba. Sean T una fórmula de tipo–t y S una fórmula de tipo–s, donde $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n$. Supóngase que $\vDash_n T$ y $\vDash_n T \rightarrow S$. Si no $\vDash_n S$, entonces existe un n–modelo tal que, en el mundo actual M, $V(M, S) = 0$. Como T y $T \rightarrow S$ son n–válidas, entonces $V(M, T \rightarrow S) = 1$ y $V(M, T) = 1$, por la regla $V \rightarrow$ de $V(M, S) = 0$ y $V(M, T \rightarrow S) = 1$ resulta $V(M, T) = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto $\vDash_n S$. Resultando finalmente que, si $\vDash_n T$ y $\vDash_n T \rightarrow S$ entonces $\vDash_n S$. □

Proposición 9 (n–validez)**.** *Para $n \geqslant 1$ y X una fórmula de profundidad–n, si X es un teorema de SMM–n entonces X es n–válida.*

Prueba. Supóngase $\Vdash_n X$, se prueba $\vDash_n X$ por inducción sobre la longitud L de la demostración de X es SMM–n.

Paso Base ($L = 1$). Si la longitud de la demostración de X en SMM–n es 1, entonces X es un axioma de SMM–n, lo cual por la proposición 7 significa que $\vDash_n X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que para cada fórmula Y, si $\Vdash_n Y$ y la longitud de la demostración de Y tiene longitud menor que L (donde $L > 1$) entonces $\vDash_n Y$. Si $\Vdash_n X$ y la longitud de la demostración de X es L entonces, X es un axioma de SMM–n o X es consecuencia de aplicar modus ponens en pasos anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el caso base. En el segundo caso se tienen en SMM–n, para alguna fórmula Z, demostraciones de Y y de $Z \to X$, donde la longitud de ambas demostraciones es menor que L, utilizando la hipótesis inductiva se infieren $\vDash_n Z$ y $\vDash_n Z \to X$, y por la proposición 8 resulta $\vDash_n X$. □

6 n–Completitud

Definición 7 (Extensión consistente y completa)**.** Una *extensión* de un sistema deductivo, se obtiene alterando el conjunto de axiomas de tal manera que, todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas, y que el lenguaje de la extensión coincida con el lenguaje del sistema deductivo. Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula X tal que tanto X como $\sim X$ sean teoremas de la extensión. Un conjunto de fórmulas es *inconsistente* si de ellas se deriva una contradicción, es decir, si se deriva $Z \wedge \sim Z$ para alguna fórmula Z. Una extensión es completa si para toda fórmula X, del lenguaje de la extensión, o bien X o bien $\sim X$ es teorema de la extensión.

Proposición 10 (Extensión consistente)**.**

a. Para cada $n \geqslant 1$, SMM–n es consistente.

b. Si E una extensión de SMM–n, X es una fórmula de profundidad–n que no es teorema de E, y E_x es la extensión de SMM–n obtenida añadiendo $\sim X$ como nuevo axioma a E, entonces, E_x es consistente.

Prueba. Supóngase que SMM–n no fuese consistente, por lo que debe existir una fórmula X de profundidad–n tal que tanto X como $\sim X$ sean teoremas. Entonces por la proposición 9, tanto X como $\sim X$son fórmulas n–válidas, pero esto es imposible, ya que si $\sim X$ es una fórmula n–válida, entonces para todo n–modelo (S, M_a, RA, V) se tiene $V(M_a, \sim X) = 1$, lo cual según $V \sim$ significa $V(M_a, X) = 0$, por lo que X no puede ser n–válida, lo cual no es el caso. Por lo tanto, SMM–n es consistente.

Para la parte b, sea X una fórmula SMM–n que no es teorema de E, y sea E_x la extensión obtenida añadiendo $\sim X$ como nuevo axioma a E. Supóngase que E_x es inconsistente. Entonces, para alguna fórmula Z, tanto Z como $\sim Z$ son teoremas de E_x. Ahora bien, por Axn.9 se tiene que $Z \rightarrow (\sim Z \rightarrow X)$ es teorema de SMM–n y por lo tanto de E_x, aplicando dos veces MP se obtiene que X es teorema de E_x. Pero E_x tan sólo se diferencia de E en que tiene $\sim X$ como axioma adicional, así que 'X es un teorema de E_x' es equivalente a 'X es un teorema de E a partir del conjunto $\{\sim X\}$'. Por el teorema de deducción resulta que $\sim X \rightarrow X$ es un teorema de E, y por el principio de retorsión se infiere que X también es teorema de E, lo cual no es el caso. Por lo tanto, E_x es consistente. □

Proposición 11 (Extensión consistente y completa)**.** *Si E es una extensión consistente de SMM–n entonces existe una extensión consistente y completa de E.*

Prueba. Sea $X_0, X_1, X_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de SMM–n. Se construye una sucesión $J_0, J_1, J_2, \ldots$ de extensiones de E como sigue:

Sea $J_0 = E$, si X_0 es teorema de J_0, sea $J_1 = J_0$, en caso contrario, sea J_1 el resultado de añadir $\sim X_0$ como nuevo axioma a J_0.

En general, dado $t \geqslant 1$, para construir J_t a partir de J_{t-1}, se procede de la siguiente manera: si X_{t-1} es teorema de J_{t-1}, entonces $J_t = J_{t-1}$, en caso contrario, sea J_t la extensión de J_{t-1} obtenida añadiendo $\sim X_{t-1}$ como nuevo axioma.

E es consistente, es decir, J_0 es consistente por hipótesis. Dado $t \geqslant 1$, si J_{t-1} es consistente, entonces, por la proposición 10b, J_t es consistente. Así pues, por inducción, todo J_t es consistente. Se define ahora J, como aquella extensión de E, la cual tiene como axiomas a aquellas fórmulas que son axiomas de al menos uno de los J_t.

Si J es inconsistente, entonces existe una fórmula X tal que, tanto X como $\sim X$ son teoremas de J. Ahora bien, las demostraciones de X y

$\sim X$ en J son sucesiones finitas de fórmulas, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas de J. Por lo que, debe existir un t suficientemente grande, para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de J_t. Se deduce que tanto X como $\sim X$ son teoremas de J_t, lo cual es imposible ya que J_t es consistente. Por lo tanto, J es consistente.

Sea X una fórmula de SMM–n, por lo que X debe aparecer en la lista $X_0, X_1, X_2, \ldots$, supóngase que X es X_k. Si X_k es teorema de J_k, entonces X_k también es teorema de J, puesto que J es una extensión de J_k. Si X_k no es teorema de J_k, entonces de acuerdo con la construcción de $J_{k+1}, \sim X_k$ es un axioma de J_{k+1}, con lo que $\sim X_k$ es teorema de J_{k+1}, y entonces $\sim X_k$ también es teorema de J. Así, en todo caso se tiene que X_k es teorema de J o $\sim X_k$ es teorema de J, con lo que J es completo. $\square$

Proposición 12 (Consistencia R–subordinada)**.** *Sean $Y, Z_1, \ldots, Z_k$ formulas de profundidad–p con $p \leqslant n$ y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $p \leqslant r$. Si $\{[R]Z_1, \ldots, [R]Z_k, (R)Y\}$ es consistente en SMM–$(n+1)$ entonces $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ es consistente en SMM–n.*

Prueba. Supóngase que $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ es inconsistente, por lo que existe una fórmula W tal que, $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\} \Vdash_n W \wedge \sim W$, utilizando el teorema de deducción y exportación se infiere $\Vdash_n (Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_k \wedge Y) \rightarrow (W \wedge \sim W)$, y por demostración indirecta, en SMM–n resulta $\sim(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_k \wedge Y)$, lo cual por negación de la conjunción e implicación material significa, $(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_k) \rightarrow \sim Y$. Utilizando la proposición 2 resulta que $[R]((Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_k) \rightarrow \sim Y)$ es derivable en SMM–$(n+1)$, por $MP[R]$ se infiere $[R](Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_k) \rightarrow [R] \sim Y$, por la proposición 3 se obtiene $([R]Z_1 \wedge \ldots \wedge [R]Z_k) \rightarrow [R] \sim Y$, lo cual, por implicación material, negación de la conjunción y la definición de posibilidad equivale a $\sim([R]Z_1 \wedge \ldots \wedge [R]Z_k \wedge (R)Y)$, por lo que $\{[R]Z_1, \ldots, [R]Z_k, (R)Y\}$ es inconsistente en SMM–$(n+1)$. $\square$

Definición 8 (R–subordinado)**.** Sean E_p un conjunto de fórmulas de profundidad–p, E_q un conjunto de fórmulas de profundidad–q y $[R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $1 \leqslant q < p \leqslant r$. Se utiliza la notación E_p para indicar que E es una extensión de SMM–p, y se dice que E es de *profundidad–p*.

Se dice que E_q es R–*subordinado* de E_p si y solamente si existe una fórmula Y de profundidad–q, tal que $(R)Y$ está en E_p, y además para cada fórmula Z de profundidad–q, tal que $[R]Z$ está en E_p, se tiene que Y y Z están en E_q.

Proposición 13 (Extensión R–subordinada consistente y completa)**.** *Para $p > 1$ y X una fórmula de profundidad–k con $k < p$, si E_p es una extensión consistente y completa de SMM–p, tal que $(R)X$ está en E_p, donde $[R]$ es un operador de necesariedad de profundidad–r con $k \leqslant r$, entonces, existe una extensión consistente y completa E_t de SMM–t con $t < p$ tal que, $X \in E_t$ y E_t es R–subordinada de E_p.*

Prueba. Sea X una fórmula de profundidad–k con $k < p$, tal que la fórmula $(R)X$ está en E_p. A fin de que la extensión pedida sea R–subordinada, se toma el conjunto $Z = \{X\} \cup \{Y : [R]Y \text{ está en } E_p\}$, el cual gracias a la proposición 12 es consistente, las fórmulas de Z pertenecen a SMM–t para algún $t < p$, y utilizando el procedimiento de la proposición 11 se construye una extensión consistente y completa E_t de SMM–t, la cual es R–subordinada de E_p. $\square$

Proposición 14 (Construcción de un n-modelo)**.** *Para cada $n \geqslant 1$, si E es una extensión consistente de SMM–n, entonces existe un n–modelo en el cual todo teorema de E es verdadero.*

Prueba. Se define el n–marco (S, M_1, RA) de la siguiente manera: sean $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$, las extensiones consistentes y completas de E (E_1 es la inicial J presentada en la proposición 11 y las demás R–subordinadas presentadas en la proposición 13). A cada extensión E_k se le asocia un mundo posible M_k, sean S el conjunto de tales mundos posibles y M_1 el mundo actual (extensiones consistentes y completas inicial y subordinadas corresponden a los mundos posibles). Las relaciones de accesibilidad de R_A se construyen así: si E_t es R–subordinado de E_i entonces $M_i R M_t$, (subordinación corresponde a accesibilidad). Observar que, la coherencia de esta construcción, se encuentra garantizada por las proposiciones 11 a 13.

Asociado al n–marco (S, M_1, RA), se define el candidato a n–modelo $M = (S, M_1, RA, V)$ sobre las fórmulas de SMM–n haciendo para cada M_k en $S, V(M_k, X) = 1$ si $\Vdash_{Ek} X$, y $V(M_k, X) = 0$ si $\Vdash_{Ek} {\sim} X$, donde E_k es la extensión consistente y completa asociada a M_k. Nótese que V es una función parcial en el sentido de valuación, ya que está definida para cada M_k, sobre todas las fórmulas de profundidad–k, por ser E_k completa. Ahora bien, sea T una fórmula de tipo–t, donde $1 \leqslant t \leqslant k \leqslant n$, ya que E_k es consistente, entonces $V(M_k, T) \neq V(M_k, \sim T)$ y por lo tanto, $V(M_k, T) = 1 \Leftrightarrow V(M_k, \sim T) = 0$, por lo que se satisface la definición $V \sim$. Para afirmar que M es un n–modelo, se debe mostrar que para cada uno de los conectivos, V satisface la definición de valuación.

Para todos los casos, sean T una fórmula de tipo–t, S una fórmula de tipo–s, donde $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant k \leqslant n$.

Para el caso del condicional. Utilizando la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(M_k, T \rightarrow S) = 0 \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} \sim(T \rightarrow S) \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} T \wedge \sim S \Leftrightarrow (\Vdash_{Ek} T$ y $\Vdash_{Ek} \sim S) \Leftrightarrow [V(M_k, T) = 1$ y $V(M_k, S) = 0]$, por lo que se satisface la definición $V \rightarrow$.

Para el caso de la conjunción. Utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(M_k, T \wedge S) = 1 \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} T \wedge S \Leftrightarrow (\Vdash E_k T$ y $\Vdash_{Ek} S) \Leftrightarrow [V(M_k, T) = 1$ y $V(M_k, S) = 1]$, por lo que se satisface la definición $V\wedge$.

Para el caso de la disyunción. Utilizando negación de la disyunción e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(M_k, T \vee S) = 0 \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} \sim(T \vee S) \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} \sim T \wedge \sim S \Leftrightarrow [\Vdash_{Ek} \sim T$ y $\Vdash_{Ek} \sim S] \Leftrightarrow [V(M_k, T) = 0$ y $V(M_k, S) = 0]$, por lo que se satisface la definición $V\vee$.

Para el caso del bicondicional. Utilizando equivalencia material, $V\vee$, $V\wedge$ y $V \sim$ (ya probadas) e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(M_k, T \leftrightarrow S) = 1 \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} T \leftrightarrow S \Leftrightarrow \Vdash_{Ek} (T \wedge S) \vee (\sim T \wedge \sim S) \Leftrightarrow V(M_k, (T \wedge S) \vee (\sim T \wedge \sim S)) = 1 \Leftrightarrow [V(M_k, T \wedge S) = 1$ ó $V(M_k, \sim T \wedge \sim S) = 1] \Leftrightarrow [V(M_k, T) = V(M_k, S) = 1$ ó $V(M_k, T) = V(M_k, S) = 0] \Leftrightarrow V(M_k, T) = V(M_k, S)$, por lo que se satisface la definición $V \leftrightarrow$.

Para el caso de la regla $V[R]$, donde $1 \leqslant t \leqslant q < p \leqslant n, [R]$ un operador de necesariedad de profundidad–r con $t \leqslant r, M_p$ es un mundo asociado a E_p, N_q es un mundo asociado a E_q, y Z es una fórmula de profundidad–t.

Supóngase que $V(M_p, [R]Z) = 1$, por lo que $\Vdash_{Ep} [R]Z$, lo cual significa que $[R]Z$ está en E_p. Si $M_p R N_q$, y entonces E_q es R–subordinada de E_p, por lo que Z está en E_q, es decir $\Vdash_{Eq} Z$, resultando que $V(N_q, Z) = 1$. Se ha probado de esta manera que $V(M_p, [R]Z) = 1 \Rightarrow (\forall N_q \in S)(M_p R N_q \Rightarrow V(N_q, Z) = 1)$.

Para probar la recíproca, supóngase que $(\forall N_q \in S)(M_pRN_q \Rightarrow V(N_q, Z) = 1)$. Si $V(M_p, [R]Z) = 0$, entonces al ser M_p el mundo asociado a la extensión consistente y completa E_p resulta que $\Vdash_{Ep}\sim[R]Z$, es decir por doble negación $\Vdash_{Ep}\sim[R] \sim\sim Z$, por lo que $\sim[R] \sim\sim Z$, es decir $(R) \sim Z$ está en E_p. Por la proposición 13 existe una extensión consistente y completa E_q con $q < p$, R–subordinada de E_p, tal que $\sim Z$ está en E_q, es decir $\Vdash_{Eq}\sim Z$. Como N_q es el mundo asociado a E_q, entonces M_pRN_q, lo cual, por el supuesto inicial implica $V(N_q, Z) = 1$, es decir $\Vdash_{Eq} Z$, resultando que E_q es inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $V(M_p, [R]Z) = 1$. Se ha probado de esta manera que $(\forall N_q \in S)(M_pRN_q \Rightarrow V(N_q, Z) = 1) \Rightarrow V(M_p, [R]Z) = 1$.

Con base en el análisis anterior, se concluye finalmente que V es una valuación, y por lo tanto, M es un n–modelo.

Para finalizar la prueba, sea X un teorema de E, por lo que $\Vdash_{E1} X$. Por lo tanto, utilizando la definición de V resulta que $V(M_1, X) = 1$, es decir, X es verdadera en el n–modelo $M = (S, M_1, RA, V)$. □

Proposición 15 (n–completitud)**.** *Las fórmulas n–válidas son teoremas de SMM–n, es decir, para cada fórmula X de profundidad–n, con $n \geqslant 1$, si X es n–válida entonces X es un teorema de SMM–n.*

Prueba. Sea X una fórmula de SMM–n. Si X no es un teorema, entonces, por la proposición 10b, la extensión E, obtenida añadiendo $\sim X$ como nuevo axioma, es consistente. Así pues, según la proposición 14, existe un n–modelo M tal que todo teorema de E es verdadero en M, y como $\sim X$ es un teorema de E entonces, $\sim X$ es verdadero en M, es decir, X es falso en M, y por lo tanto, X no es n–válida. Se ha probado de esta forma que, si X no es un teorema de SMM–n entonces X no es n–válida, o dicho de otra manera, si X es n–válida entonces X es un teorema de SMM–n[7]. □

Proposición 16 (Caracterización semántica)**.** *Si X es una fórmula de profundidad–n, entonces, X es n–válida si y solamente si X es un teorema de SMM–n.*

Prueba. consecuencia de las proposiciones 9 y 15. □

[7] Para llegar a la prueba de completitud se han seguido las directrices dadas por Henkin en [15] y Kaplan en [16], para probar la completitud de la lógica de primer orden, y del sistema modal T.

7 Sistema SMM

Definición 9 (Sistema SMM)**.** El lenguaje de SMM, *sistema multi–modal con restricciones*, es la unión de los lenguajes de los sistemas SMM–n con $n \geqslant 1$, por lo que en SMM hay fórmulas de tipo arbitrario. El sistema SMM tiene como única regla de inferencia primitiva el modus ponens y es axiomatizado de la siguiente manera: X es un axioma de SMM si y solamente si X axioma de SMM–n para algún $n \geqslant 1$. Los teoremas de SMM se definen de la manera habitual. Para indicar que X es un teorema de SMM se utiliza la notación $\Vdash X$.

Definición 10 (Modelo)**.** Los *modelos de profundidad arbitraria*, o simplemente *modelos*, se definen de la misma forma que se definen los n–modelos, pero eliminando la restricción sobre la profundidad del marco asociado. La fórmula X es *verdadera en un modelo* $M = (S, M_a, RA, V)$ (denotado $M \vDash X$) si y solamente si $V(M_a, X) = 1$. La fórmula X es *válida* (denotado $\vDash X$) si y solamente si X es verdadera en todo modelo.

Proposición 17 (Teoremas de SMM en SMM–n)**.** *Sea X una fórmula de profundidad–p con $p \geqslant 1$, X es un teorema de SMM si y solo si para cada $n \geqslant p$, X es un teorema de SMM–n.*

Prueba. Supóngase que $\Vdash X$, se probará $\Vdash_p X$ por inducción sobre la longitud de la demostración de X en SMM.

Paso base. Si la longitud de la demostración de X en SMM es 1, entonces X es un axioma de SMM, pero los axiomas de SMM son axiomas de los sistemas SMM–n, y como X es de profundidad–p, por definición de SMM–p se puede asegurar que X es axioma de SMM–p, y por lo tanto $\Vdash_p X$.

Paso de inducción. Supóngase que la longitud de la demostración de X en SMM es $L \geqslant 2$. Como hipótesis inductiva se tiene que, si Z es una fórmula de profundidad–p y la longitud de la demostración de Z en SMM es menor que L entonces $\Vdash_p Z$. Como la longitud de la demostración de X es mayor que 2, entonces X es un axioma de SMM o X resulta de aplicar MP en pasos anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el paso base, en el segundo caso, se tienen en SMM demostraciones de Y y de $Y \rightarrow X$, ambas demostraciones de longitud menor que L, por la hipótesis inductiva se infieren $\Vdash_p Y$ y $\Vdash_p Y \rightarrow X$, por MP se concluye $\Vdash_p X$.

Se ha probado que, si $\Vdash X$ entonces $\Vdash_p X$, y utilizando la proposición 1 se obtiene que, si $\Vdash X$ entonces $(\forall n \geqslant p)(\Vdash_n X)$. Para probar la recíproca, supóngase que $\Vdash_p X$, lo cual significa que existe una demostración de X a partir de los axiomas de SMM–p, y como los axiomas de SMM–p son axiomas de SMM entonces, la demostración de X en SMM–p también es una demostración de X en SMM, por lo tanto $\Vdash X$. □

Proposición 18 (Validez de SMM)**.** *Para cada fórmula X, si X es un teorema de SMM entonces X es válida.*

Prueba. Supóngase que $\Vdash X$, y que X es una fórmula de profundidad–p. Por la proposición 17 resulta que $(\forall n \geqslant p)(\Vdash_n X)$, lo cual según la proposición 9 significa $(\forall n \geqslant p)(\vDash_n X)$.

Si no es el caso que $\vDash X$, entonces existe un modelo M tal que no es el caso que $M \vDash X$, es decir $V(M_a, X) = 0$ donde M_a es el mundo actual, el cual debe ser de profundidad–q con $q \geqslant p$, por lo que el modelo M es de profundidad–q, resultando que no es el caso que $\vDash_q X$, lo cual es imposible ya que $q \geqslant p$ y $(\forall n \geqslant p)(\vDash_n X)$. Por lo tanto $\vDash X$. □

Proposición 19 (Completitud de SMM)**.** *Para cada fórmula X, si X es válida entonces X es un teorema de SMM.*

Prueba. Supóngase que $\vDash X$ y que X es de profundidad–p, por lo que en la construcción de un modelo refutador de la fórmula X, resulta una cadena inconsistente de mundos posibles $C = M_1 M_2 \ldots M_m$ para algún m, donde $p \geqslant m \geqslant 1$ y M_1 es el mundo actual de profundidad–p, lo cual significa que X no puede ser refutada por un p–modelo, es decir $\vDash_p X$. Por la proposición 15 se infiere $\Vdash_p X$, y por la proposición 1 se obtiene que para cada $n \geqslant p \Vdash_n X$, finalmente aplicando la proposición 17 se concluye que $\Vdash X$. □

Proposición 20 (Caracterización semántica de SMM)**.** *Sea X una fórmula, X es válida si y solo si X es un teorema de SMM.*

Prueba. consecuencia inmediata de las proposiciones 18 y 19. □

8 Conclusiones

Chellas muestra detalladamente en *Modal logic: an introduction* [17], como la semántica de mundos posibles tiene asociada una *teoría de correspondencia*, la cual permite caracterizar axiomáticamente algunas propiedades que podrían ser, bajo ciertas circunstancias, semánticamente deseables. Las *lógicas doxásticas y las lógicas epistémicas* se definen comúnmente como ciertas *lógicas modales normales* caracterizadas por semánticas al estilo Kripke, las cuales satisfacen algunos axiomas específicos relacionados con la creencia y el conocimiento respectivamente.

El *axioma de consistencia*, dice que un razonador no cree inconsistencias, puede ser escrito como $[R]X \rightarrow \sim [R] \sim X$, y se encuentra caracterizado semánticamente por los modelos en los cuales la relación de accesibilidad asociada al razonador R es *serial*, es decir, desde cada mundo posible el razonador accede a la información de algún mundo. El *axioma de conocimiento*, dice que las creencias de un razonador son ciertas, puede ser escrito como $[R]X \rightarrow X$, se considera como el axioma que distingue el conocimiento de la creencia, ya que el conocimiento se define como una creencia cierta, y se encuentra caracterizado semánticamente por los modelos en los cuales la relación de accesibilidad asociada al razonador R es *reflexiva*, es decir, desde cada mundo posible el razonador accede a la información del mundo. El *axioma de introspección positiva*, dice que si un razonador cree algo entonces cree que lo cree, es decir, el razonador es consciente de lo que él sabe, puede ser escrito como $[R]X \rightarrow [R][R]X$, y se encuentra caracterizado semánticamente por los modelos en los cuales la relación de accesibilidad asociada al razonador R es *transitiva*, es decir, si desde un primer mundo posible el razonador accede a la información de un segundo mundo y desde el segundo accede a un tercero entonces desde el primero accede al tercero. El *axioma de introspección negativa*, dice que un razonador es consciente de lo que él no sabe, puede ser escrito como $\sim [R]X \rightarrow [R] \sim [R]X$, y se encuentra caracterizado semánticamente por los modelos en los cuales la relación de accesibilidad asociada al razonador R es *euclidiana*, es decir, si desde un primer mundo posible el razonador accede a la información de un segundo y un tercer mundo entonces desde el segundo accede al tercero. La introspección positiva y negativa, implican que un razonador tiene conocimiento completo sobre que sabe y lo que no. El *axioma de consecuencias* o modus ponens para el razonador,

$[R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y)$, dice que si un razonador cree un condicional y cree su antecedente entonces también cree su consecuente, es decir, el razonador cree las consecuencias de su conocimiento. Finalmente, la *regla de creencia* o regla de necesariedad, dice que los razonadores creen los teoremas, puede ser escrita como: de X se infiere $[R]X$, y semánticamente garantiza que, $[R]X$ es verdadera en un mundo posible dado si y solo si X es verdadera en todos los mundo accesibles desde el mundo dado. Como consecuencia de la regla de creencia y del axioma de consecuencias, resulta que el razonamiento al interior de cada mundo posible se rige por la lógica clásica.

Adicionando al cálculo proposicional clásico, para cada razonador, los axiomas de consecuencias y las reglas de creencia, se obtiene un sistema básico, el cual cumple con los requisitos mínimos que le permiten ser caracterizado con la semántica de mundos posibles sin restricciones. Este sistema es conocido como el *sistema multi–modal* K_m, donde m indica el número de razonadores (operadores de necesariedad), siendo K_m la lógica normal sobre la cual se construyen las demás lógicas multi–modales normales. Adicionando al sistema multi–modal K_m los axiomas de consistencia, introspección positiva y negativa se obtiene una lógica idealizada de la *creencia*, conocido como el sistema multi–modal $KD45_m$. Si además, se adicionan los axiomas de conocimiento, se obtiene una lógica idealizada del *conocimiento*, conocido como el sistema multi–modal $S5_m$.

En las proposiciones 2 y 6, se muestra como la regla de creencia tiene validez restringida en los sistemas de la jerarquía SMM–n, y por lo tanto en el sistema SMM (restricciones en el lenguaje del sistema y restricciones en la profundidad de cada razonador), además, en cada uno de estos sistemas se tiene la regla $MP[R]$ con restricciones en el lenguaje y también en la profundidad del operador. Estas restricciones se reflejan, en la semántica de mundos posibles, con restricciones en la profundidad de los modelos y de los mundos, es decir, con restricciones en la longitud de las cadenas de mundos posibles y del lenguaje asociado a los mundos. Por estas razones, tales sistemas pueden ser vistos como el sistema de *lógica multi–modal* K_m con diversos tipos de restricciones. Resulta entonces natural, extender los sistemas presentados a otras lógicas, por ejemplo a lógicas del conocimiento y la creencia, utilizando la versión con restricciones, del fragmento de la teoría de la correspondencia presentada más arriba. La construcción de estas lógicas normales con restricciones, puede ser de interés en el estudio de aspectos meta–lógicos relacionados con las nociones de verdad necesaria, creencia, conocimiento, obligación, y en general, de las nociones que suelen ser formalizadas con los operadores de necesariedad.

Referencias

[1] Wolfgang Lenzen. *Recent work in epistemic logic.* Acta Philosophica Fennica, ISSN 0355–1792, **30**(1), 1978. Referenciado en 176

[2] Jaakko Hintikka. *Knowledge and Belief–An Introduction to the Logic of the Two Notions*, ISBN 978–1904987086. College Publications, 2005. Referenciado en 176

[3] Saul Kripke. *Semantical analysis of modal logic*. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, ISSN 0044–3050, 9, 67–96 (1963). Referenciado en 176

[4] Max Freund. *Lógica epistémica*. Enciclopedia iberoamericana de filosofía, ISBN 84-8164-045-X. Editorial Trotta S. A. Madrid, 1995. Referenciado en 176

[5] Max J. Cresswell. *Logics and languages*. ISBN 978–0416769500, Methuen young books, 1973. Referenciado en 177

[6] Jaakko Hintikka. *Impossible posible worlds vindicated.* Journal of Philosophical Logic, ISSN 0022–3611, **4**(3), 475–484 (1975). Referenciado en 177

[7] Nicholas Rescher and Robert Brandon. *The logic of inconsistency: a study in non-standard possible–world semantics and ontology*, ISBN 978–0631115816. Oxford: Blackwell, 1980. Referenciado en 177

[8] Hector J. Levesque. *A logic of implicit and explicit belief*. Proceedings of National Conference on Artificial Intelligence, ISBN 978–0865760806, 1984. Referenciado en 177

[9] Marco Schaerf and Marco Cadoli. *Tractable reasoning via approximation.* Artificial Intelligence, ISSN 0004–3702, **74**(2), 1995. Referenciado en 177

[10] Marcelo Finger and Renata Wassermann. *Logics for approximate reasoning: approximating classical logic "from above"*. Brazilian Symposium on Artificial Intelligence 16, ISBN 3540001247, **2507**, 21–30 (2002). Referenciado en 177

[11] Guilherme de Souza Rabello and Marcelo Finger. *Approximations of Modal Logics: K and beyond*. Annals of Pure and Applied Logic, ISSN 0168–0072, **152**(1–3), 161–173 (2008). Referenciado en 177

[12] Kurt Konolige. *A Deduction Model of belief*, ISBN 0934613087. Pitman Publishing: London and Morgan Kaufmann., 1986. Referenciado en 177

[13] Xavier Caicedo. *Elementos de lógica y calculabilidad*, ISBN 9706251905. Editorial Universidad de los Andes, 1990. Referenciado en 183, 189, 190

[14] A. G. Hamilton. *Lógica para matemáticos*, ISBN 8428311013. Editorial Paraninfo S.A., 1981. Referenciado en 183, 190

[15] Leon Henkin. *The completeness of the first–order functional calculus*. The journal of symbolic logic, ISSN 0022–4812, **14**(3), 159–166 (1949). Referenciado en 196

[16] David Kaplan. *Review of Kripke*. The Journal of Symbolic Logic, ISSN 0022–3611, **31**(1), 120–122 (1966). Referenciado en 196

[17] Brian Chellas. *Modal logic: an introduction*, ISBN 978–0521295154. Cambridge University Press, 1980. Referenciado en 199