*Boletín de Matemáticas*
Nueva Serie, Volumen XIV No. 2 (2007), pp. 110–128

# CARACTERIZACIÓN SEMÁNTICA DE LA JERARQUÍA SCR-N (1≤N≤ $\omega$)

MANUEL SIERRA A. (*)

RESUMEN. Se presentan como extensiones del cálculo proposicional clásico, la jerarquía de sistemas deductivos SCR-n con n $\geq$ 1. SCR-n es el *sistema de creencias para los razonadores de tipo n*. El sistema SCR-$\omega$ resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y coincide con el *sistema de lógica modal K*, por lo que la jerarquía SCR-n resulta ubicada entre el cálculo proposicional clásico y el sistema modal K. Los sistemas son caracterizados con una semántica al estilo Kripke, en la cual, la longitud de las cadenas de mundos posibles se encuentra restringida en función del tipo de razonador. Así, la profundidad de un modelo corresponde a la longitud máxima de las cadenas de mundos posibles que figuren en el modelo, resultando que los modelos de profundidad n caracterizan el sistema deductivo SCR-(n+1). Las pruebas de validez y completitud, de los sistemas de la jerarquía, son presentadas de forma detallada, así como la extensión de estas pruebas al sistema modal K.

PALABRAS CLAVES. Cálculo proposicional clásico, sistemas deductivos SCR-n, sistema de lógica modal K, semántica al estilo Kripke.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 03B05, 03B40

(*) Manuel Sierra A. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.
E-mail: msierra@eafit.edu.co.

ABSTRACT. The hierarchy of the deductive systems SCR-n, with n$\geq 1$ are presented as extensions of the classical propositional calculus. SCR-n is the system of believes for reasoners of type n. The system SCR-$\omega$ results of the union of the hierarchy systems and coincides with the *system of modal logic K*, consequently the hierarchy SCR-n turns out to be localized between the classical propositional calculus and the modal system K. The systems are characterized by a semantic in the Kripke style, in which the length of the chains of possible universes is restricted in terms of the type of reasoner. Then the depth of a model corresponds to the maximal length of the chains of possible universes that appear in the model, it follows that the models of depth n characterize the deductive system SCR-(n+1). The proofs of validity and completeness of the hierarchy systems are presented in a detailed manner and so are the extensions of these proofs to the modal system K.

KEY WORDS AND PHRASES. Classical propositional calculus, SCR-n deductive systems, modal system of logic K, semantic in the Kripke style.

## 1. PRESENTACIÓN

Los sistemas deductivos construidos como extensiones del sistema modal K, utilizando operadores de creencia y conocimiento son conocidos como *lógicas doxásticas* y *lógicas epistémicas* respectivamente (ver [7]), y son de interés en inteligencia artificial, en lo que respecta al modelamiento del comportamiento (razonamiento) de agentes inteligentes. Además como se menciona en [3], cualquier semántica para estos sistemas deductivos debe justificar el teorema B(X→Y)→(BX→BY) (donde BX se lee: el agente cree la fórmula X) y la regla de inferencia 'de X se sigue BX', por lo que esta semántica obliga a concebir al agente como una entidad capaz de conocer todas las consecuencias lógicas de su conocimiento, lo cual la hace inadecuada como un modelo de agentes tales como seres humanos o sistemas computacionales con limitaciones de espacio y tiempo. Este problema, denominado el problema de la *omnisciencia lógica*, si bien ha estimulado el desarrollo de semánticas alternativas, aún continúa abierto.

Por otro lado, en [8] Smullyan presenta algunos tipos de razonadores: un razonador es de *tipo 1* si cree todas las tautologías y razona con modus ponens, es decir, si el razonador cree X y cree X→Y entonces el razonador cree Y; un razonador es de *tipo 2* si es de tipo 1 y cree todas las proposiciones de la forma (BX ∧ B(X→Y))→BY; un razonador es *normal* si para cada proposición X, si cree X entonces cree que cree X; un razonador es de *tipo 3* si es normal y es de tipo 2; un razonador es de *tipo 4* si es de tipo 3 y cree todas las proposiciones de la forma BX→BBX. Los razonadores de tipo 1 son deductivamente caracterizados por el cálculo proposicional clásico, los razonadores de tipo 3 por el sistema modal K presentado en [4], y los razonadores de tipo 4 por el sistema modal K4.

Como puede ocurrir que el razonador crea algo que es falso, entonces se define un operador de conocimiento de la siguiente forma, el razonador sabe X si el razonador cree X y X es cierto, es decir, CX $\leftrightarrow$ (X $\wedge$ BX), donde CX se lee el razonador sabe X. Observe que los razonadores de tipo 1 razonan con modus ponens, por lo que es cierta la proposición (BX $\wedge$ B(X$\rightarrow$Y))$\rightarrow$BY, pero en general un razonador de tipo 1 no cree esta proposición, es decir, un razonador de tipo 1 no sabe que razona con modus ponens, por lo tanto no sabe que es de tipo 1. Mientras que un razonador de tipo 2, al creer las proposiciones de la forma (BX $\wedge$ B(X$\rightarrow$Y))$\rightarrow$BY, sabe que razona con modus ponens, por lo que los razonadores de tipo 2 tienen cierto autoconocimiento que no está presente en los razonadores de tipo 1.

Smullyan dice que un razonador *cree que es de tipo 1* si cree todas las proposiciones de la forma BX, donde X es una tautología, y cree todas las proposiciones de la forma (BX $\wedge$ B(X$\rightarrow$Y))$\rightarrow$BY. Si también cree todas las proposiciones de la forma B[(BX $\wedge$ B(X$\rightarrow$Y))$\rightarrow$BY], entonces el razonador *cree que es de tipo 2*. Si también cree todas las proposiciones de la forma BX$\rightarrow$BBX, entonces el razonador *cree que es de tipo 3*. Si también cree todas las proposiciones de la forma B(BX$\rightarrow$BBX), entonces el razonador *cree que es de tipo 4*. Para cada uno de estos tipos, se dice que un razonador sabe que es de ese tipo si cree que es de ese tipo y realmente lo es. Smullyan muestra que: un razonador que sabe que es de tipo 1 es de tipo 2, y que todo razonador de tipo 3 sabe que es de tipo 2, aunque no sabe necesariamente que es de tipo 3. También se tiene que un razonador sabe que es de tipo 4 si y solo si sabe que es de tipo 3; además un razonador de tipo 4 sabe que es de tipo 4, lo cual significa que todo lo que se pueda probar sobre los razonadores de tipo 4 utilizando únicamente la lógica proposicional, todo razonador de tipo 4 puede demostrarlo sobre sí mismo, dado que también conoce la lógica proposicional y sabe que es de tipo 4.

En [9] se generaliza y estudia la noción de tipo de razonador, al presentar como extensiones del cálculo proposicional clásico, las jerarquías de sistemas deductivos SCR-(n+1) y CP-n con n $\geq$ 0. SCR-n es el *sistema de creencias para los razonadores de tipo n* y CP-n es el *cálculo proposicional asociado a los razonadores de tipo n*. Los teoremas de los sistemas SCR-n son interpretados como las creencias de un razonador de tipo-n, mientras en los sistemas CP-n se interioriza la noción de creencia mediante el operador [R], en el siguiente sentido: X es una creencia de un razonador tipo-n (X es un teorema de SCR-n) si y solamente si [R]X es un teorema de CP-n. La forma como se construyen los sistemas, permite que un razonador de tipo-(n+1) sepa que es de tipo-n pero no siempre puede saber que es de tipo-(n+1). Lo anterior significa que los razonadores de la jerarquía no son autoconcientes. La autoconciencia sólo se puede garantizar al extender los sistemas de la jerarquía hasta el sistema modal K4.

En este trabajo se presentan los teoremas de validez y completitud para los sistemas de la jerarquía SCR-n con n $\geq$ 1. Los sistemas son caracterizados con una semántica al estilo Kripke, en la cual, la longitud de las cadenas de mundos posibles se encuentra restringida en función del tipo de razonador. Así, la profundidad de un modelo corresponde a la longitud máxima de las cadenas de mundos posibles que figuren en el modelo, resultando que los modelos de profundidad n caracterizan el sistema deductivo SCR-(n+1). Las pruebas de validez y completitud, de los sistemas de la jerarquía, son presentadas de forma detallada, así como la extensión de estas pruebas al sistema modal K. En los sistemas SCR-n el problema de la omnisciencia lógica se encuentra limitado, puesto que en estos sistemas no tiene validez general la regla de inferencia 'de X se sigue [R]X' y en los teoremas del sistema el número de ocurrencias de operadores de creencia se encuentra limitado.

## 2. Jerarquía se sistemas deductivos SCR-n (n $\geq$ 1)

El lenguaje de todos los sistemas de la jerarquía SCR-n (n $\geq$ 1) consta de los conectivos binarios $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$; y los conectivos unarios $\sim$, [R]. El conjunto de formulas del cálculo proposicional clásico CP es generado recursivamente a partir de un conjunto de formulas atómicas utilizando los conectivos de la siguiente forma:

1. Si A es una fórmula atómica entonces A es una fórmula.
2. Si A es una fórmula entonces $\sim$(A) es una fórmula.
3. Si A y B son fórmulas entonces (A)$\rightarrow$(B), (A)$\leftrightarrow$(B), (A)$\wedge$(B) y (A)$\vee$(B) son fórmulas.

El *sistema deductivo para el cálculo proposicional clásico* CP consta de los siguientes axiomas:

Ax0.1 A$\rightarrow$(B$\rightarrow$A).
Ax0.2 (A$\rightarrow$(B$\rightarrow$C))$\rightarrow$((A$\rightarrow$B)$\rightarrow$(A$\rightarrow$C)).
Ax0.3 A$\rightarrow$(A$\vee$B).
Ax0.4 B$\rightarrow$(A$\vee$B).
Ax0.5 (A$\rightarrow$C)$\rightarrow$((B$\rightarrow$C)$\rightarrow$((A$\vee$B)$\rightarrow$C)).
Ax0.6 (A$\wedge$B)$\rightarrow$A.
Ax0.7 (A$\wedge$B)$\rightarrow$B.
Ax0.8 (A$\rightarrow$B)$\rightarrow$((A$\rightarrow$C)$\rightarrow$(A$\rightarrow$(B$\wedge$C))).
Ax0.9 A$\rightarrow$ ($\sim$A$\rightarrow$B).
Ax0.10 A $\vee$ $\sim$A.
Ax0.11 (A$\leftrightarrow$B)$\rightarrow$(A$\rightarrow$B).
Ax0.12 (A$\leftrightarrow$B)$\rightarrow$(B$\rightarrow$A).
Ax0.13 (A$\rightarrow$B)$\rightarrow$[(B$\rightarrow$A)$\rightarrow$(A$\leftrightarrow$B)].

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y A$\rightarrow$B se infiere B.

Los sistemas SCR-n, *sistema de creencias para los razonadores de tipo-n,* se construyen de la siguiente manera:
SCR-1 es el *cálculo proposicional clásico* CP.
Para n $\geq$ 1, SCR-(n+1) es el mismo sistema SCR-n adicionando [R]X como axioma a cada axioma X, y representando internamente la regla de inferencia primitiva MP, es decir:
X es una fórmula de SCR-n $\Rightarrow$ X y [R]X son fórmulas de SCR-(n+1).
X, Y fórmulas de SCR-(n+1) $\Rightarrow$ X$\wedge$Y, X$\vee$Y, X$\rightarrow$Y, X$\leftrightarrow$Y, $\sim$X son fórmulas de SCR-(n+1).
X es un axioma de SCR-n $\Rightarrow$ X es un axioma de SCR-(n+1).
X es un axioma de SCR-n $\Rightarrow$ [R]X es un axioma de SCR-(n+1).
[R](X$\rightarrow$Y)$\rightarrow$([R]X$\rightarrow$[R]Y) es un axioma de SCR-(n+1).
Los sistemas tienen como única regla de inferencia el *modus ponens* MP.
El axioma [R](X$\rightarrow$Y)$\rightarrow$([R]X$\rightarrow$[R]Y) será referenciado como MP[R]: modus ponens para el razonador R.

Se dice que una fórmula X es un *teorema de SCR-n (n-teorema)*, o que *el razonador cree o acepta A*, denotado $\Vdash_n$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SCR-n o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando A es un teorema de CP, se utiliza la notación $\vdash$ A.
Si $\Gamma$ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de SCR-n a partir de* $\Gamma$, denotado $\Gamma \Vdash_n$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SCR-n o un elemento de $\Gamma$ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando A es un teorema de CP a partir de $\Gamma$, se utiliza la notación $\Gamma \vdash$ A.

## 3. Representación interna de la creencia

En lo que sigue cada vez que se habla de un razonador se entiende, a no ser que se diga lo contrario, que es un razonador de tipo-n.

**Proposición 1.** (*tipo-(n+1) es tipo-n*).
Los razonadores de tipo-(n+1) son razonadores de tipo-n, es decir $\Vdash_n$ X $\Rightarrow$ $\Vdash_{n+1}$ X, para n $\geq$ 1. Además, $\Vdash_t$ X $\Rightarrow$ $\Vdash_n$ X, para n $\geq$ t $\geq$ 1.

*Prueba:* Supóngase que $\Vdash_n$ X, se probará $\Vdash_{n+1}$ X haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SCR-n.
Paso base. La longitud de la demostración de X en SCR-n es 1, es decir X es un axioma de SCR-n, pero si X es un axioma de SCR-n entonces, por definición, X es axioma de SCR-(n+1). Por lo tanto,$\Vdash_{n+1}$ X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SCR-n es menor que L entonces $\Vdash_{n+1}$ Y.

Supóngase que la demostración de X en SCR-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_{n+1}$ X. En el segundo caso se tienen para alguna fórmula Z demostraciones de Z$\rightarrow$X y de Z, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_{n+1}$ Z$\rightarrow$X y $\Vdash_{n+1}$ Z. Aplicando MP resulta $\Vdash_{n+1}$ X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que $\Vdash_n$ X $\Rightarrow \Vdash_{n+1}$ X.
La parte segunda de la proposición es consecuencia inmediata de la primera.

**Proposición 2.** (*Aceptación de los teoremas clásicos*).
Los razonadores de tipo-n creen los teoremas del cálculo proposicional clásico CP.

$$\vdash X \Rightarrow \quad \Vdash_n [R]X, \text{ para } n \geq 2.$$

*Prueba:* Supóngase que $\vdash$ X, se probará $\Vdash_n$ [R]X haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en CP.
Paso base. La longitud de la demostración de X en CP es 1, es decir X es un axioma de CP, pero si X es un axioma de CP entonces, por definición, X es axioma de SCR-1, y de nuevo por definición [R]X es axioma de SCR-2, lo cual por la proposición 1, asegura que$\Vdash_n$ [R]X, para n $\geq$ 2.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en CP es menor que L entonces $\Vdash_n$ [R]Y.
Supóngase que la demostración de X en CP tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_n$ [R]X con n $\geq$ 2. En el segundo caso se tienen para alguna fórmula Z demostraciones de Z$\rightarrow$X y de Z, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_n$ [R](Z$\rightarrow$X) y $\Vdash_n$ [R]Z con n $\geq$ 2. Como en SCR-n, cuando n $\geq$ 2, se tiene [R](Z$\rightarrow$X)$\rightarrow$([R]Z $\rightarrow$[R]X), aplicando MP resulta $\Vdash_n$ [R]X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que $\vdash$ X $\Rightarrow \Vdash_n$ [R]X.

**Proposición 3.** (*Consecuencias básicas*).
En los sistemas SCR-n con n $\geq$ 1 se tienen los siguientes teoremas:

*Introducción de la conjunción*: A$\rightarrow$(B$\rightarrow$(A$\wedge$B)).
*Introducción y eliminación de la conjunción en el consecuente*: (A$\rightarrow$(B$\wedge$C)) $\leftrightarrow$ ((A$\rightarrow$B) $\wedge$ (A$\rightarrow$C)).
*Silogismo hipotético*: ((A$\rightarrow$B)$\wedge$(B$\rightarrow$C)) $\rightarrow$ (A$\rightarrow$C).
*Importación-Exportación*: (A$\rightarrow$(B$\rightarrow$C)) $\leftrightarrow$ ((A$\wedge$B)$\rightarrow$C).
*Equivalencia material*: (A$\leftrightarrow$B) $\leftrightarrow$ ((A$\rightarrow$B)$\wedge$(B$\rightarrow$A)).
*Creencia de la conjunción*: $\Vdash_n$ [R](A$\wedge$B) $\leftrightarrow$ ([R]A$\wedge$[R]B), para n $\geq$ 2.

*Prueba:* Los cinco primeros son resultados de CP muy conocidos, y como en los sistemas SCR-n con n $\geq$ 1, se tienen los axiomas de CP y la regla de inferencia

MP entonces, en cada uno de estos sistemas valen estos resultados. Para detalles de las pruebas en CP ver [1] y [5].
Para probar la creencia de la conjunción, se tiene por los axiomas Ax0.6 y Ax0.7 que (A∧B)→A y (A∧B)→B. Al ser axiomas de CP, también lo son de SCR-1, y por lo tanto [R]((A∧B)→A) y [R]((A∧B)→B) son axiomas de SCR-2, y por la proposición 1 son teoremas de SCR-n para n $\geq$ 2. Al tener $\Vdash_n$ [R]((A∧B)→A) y $\Vdash_n$ [R]((A∧B)→B), utilizando el axioma MP[R] y MP se infieren $\Vdash_n$ [R](A∧B)→[R]A y $\Vdash_n$ [R](A∧B)→[R]B. Utilizando introducción de la conjunción en el consecuente se infiere $\Vdash_n$ [R](A∧B)→([R]A∧[R]B) con n $\geq$ 2.
Por otro lado, de la regla introducción de la conjunción, se tiene $\vdash$ A → (B→ (A∧B)), es decir $\Vdash_1$ A → (B→ (A∧B)). Por la proposición 2 se infiere $\Vdash_2$ [R](A→(B→(A∧B))), y utilizando el axioma MP[R] y MP resulta $\Vdash_2$ [R]A → [R] (B→ (A∧B)), como además por MP[R] se tiene $\Vdash_2$ [R](B→ (A∧B))→ ([R]B→[R](A∧B)), entonces por silogismo hipotético se obtiene $\Vdash_2$ [R]A→([R]B→[R](A∧B)). Utilizando importación se infiere $\Vdash_2$ ([R]A∧[R]B)→ [R](A∧B), y por la proposición 1 se tiene finalmente que $\Vdash_n$ ([R]A ∧[R]B) →[R] (A∧B) con n $\geq$ 2. Como ya se probó la recíproca, entonces por introducción de la conjunción y equivalencia material resulta $\Vdash_n$ [R](A∧B) ↔([R]A∧[R]B) con n $\geq$ 2.

**Proposición 4.** (*Creencias como axiomas*)

$$[R]X \text{ axioma de SCR-(n+1)} \Rightarrow \Vdash_n X, \text{ para } n \geq 1.$$

*Prueba:* Supóngase que [R]X axioma de SCR-(n+1). Se probará $\Vdash_n$ X haciendo inducción en n.
Paso base (n = 1). Si [R]X es axioma de SCR-(1+1) entonces, por la definición de SCR-2, X es axioma de SCR-1 o [R]X es axioma de SCR-1. En el primer caso resulta que $\Vdash_1$ X. El segundo caso es imposible, ya que si [R]X es axioma de SCR-1, entonces por la definición de SCR-1 también es axioma de CP, pero los axiomas de CP no tienen la forma [R]X. Por lo tanto, [R]X es axioma de SCR-(1+1) $\Rightarrow$ $\Vdash_1$ X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que: [R]Z axioma de SCR-(n+1) $\Rightarrow\Vdash_n$ Z. Supóngase que [R]X axioma de SCR-(n+2), se debe probar que $\Vdash_{n+1}$ X. Si [R]X es axioma de SCR-(n+2) entonces, por la definición de SCR-(n+2), X es axioma de SCR-(n+1) o [R]X es axioma de SCR-(n+1). En el primer caso resulta que $\Vdash_{n+1}$ X. En el segundo caso, al ser [R]X axioma de SCR-(n+1), por la hipótesis inductiva se infiere que $\Vdash_n$ X, lo cual por la proposición 1 genera $\Vdash_{n+1}$ X. Por lo tanto, [R]X axioma de SCR-(n+2) $\Rightarrow$ $\Vdash_{n+1}$ X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que: [R]X axioma de SCR-(n+1) $\Rightarrow\Vdash_n$ X, para n $\geq$ 1.

**Proposición 5.** (*Representación interna de la creencia*)
Para R un razonador de tipo-n se tiene que $\Vdash_n$ X $\Leftrightarrow\Vdash_{n+1}$ [R]X, con n $\geq$ 1.

*Prueba:* Supóngase que $\Vdash_n$ X, se probará $\Vdash_{n+1}$ [R]X haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SCR-n.
Paso base. La longitud de la demostración de X en SCR-n es 1, es decir X es un axioma de SCR-n, pero si X es un axioma de SCR-n entonces, por definición, [R]X es axioma de SCR-(n+1), y por lo tanto,$\Vdash_{n+1}$ [R]X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SCR-n es menor que L entonces $\Vdash_{n+1}$ [R]Y.
Supóngase que la demostración de X en SCR-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_{n+1}$ [R]X. En el segundo caso se tienen para alguna fórmula Z demostraciones de Z$\rightarrow$X y de Z, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_{n+1}$ [R](Z$\rightarrow$X) y $\Vdash_{n+1}$ [R]Z. Como en SCR-(n+1) con n $\geq$ 1 se tiene como axioma MP[R]:$\Vdash_{n+1}$ [R](Z$\rightarrow$X)$\rightarrow$ ([R]Z$\rightarrow$[R]X), aplicando dos veces la regla MP resulta $\Vdash_{n+1}$ [R]X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que $\Vdash_n$ X $\Rightarrow\Vdash_{n+1}$ [R]X con n $\geq$ 1.
Para probar la recíproca supóngase que $\Vdash_{n+1}$ [R]X, se probará $\Vdash_n$ X haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de [R]X en SCR-(n+1).
Paso base. La longitud de la demostración de [R]X en SCR-(n+1) es 1, es decir [R]X es un axioma de SCR-(n+1), y utilizando la proposición 4 resulta $\Vdash_n$ X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de [R]Y en SCR-(n+1) es menor que L entonces $\Vdash_n$ Y.
Supóngase que la demostración de [R]X en SCR-(n+1) tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que [R]X es un axioma o [R]X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_n$ X. En el segundo caso, si [R]X no es un axioma, sólo puede ser obtenida por el uso del axioma MP[R]: [R](Z$\rightarrow$X)$\rightarrow$([R]Z$\rightarrow$[R]X) para alguna fórmula Z (MP[R] se tiene en SCR-n cuando n $\geq$ 2), y para inferir [R]X se requieren demostraciones de [R](Z$\rightarrow$X) y de [R]Z, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_n$ Z$\rightarrow$X y $\Vdash_n$ Z, aplicando MP se infiere $\Vdash_n$ X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que $\Vdash_{n+1}$ [R]X $\Rightarrow$ $\Vdash_n$ X.
Al tener ($\Vdash_n$ X $\Rightarrow\Vdash_{n+1}$ [R]X) y ($\Vdash_{n+1}$ [R]X $\Rightarrow$ $\Vdash_n$ X) se concluye ($\Vdash_n$ X $\Leftrightarrow\Vdash_{n+1}$ [R]X) cuando n $\geq$ 1.

## 4. n-Modelos

**Definición 1.** M = (S, $M_1$, R) es un *marco* $\Leftrightarrow$ S es un conjunto, $M_1$ es un elemento de S y R es una relación binaria sobre S.

Los elementos de S son llamados *mundos posibles*, el mundo posible $M_1$ es llamado el *mundo actual*, y la relación R es llamada *relación de accesibilidad.*

Si $M_1$, $M_2$, ..., $M_{n+1}$ ($n \geq 0$) son mundos posibles diferentes entre sí y C = $M_1M_2...M_nM_{n+1}$ entonces

$$C \text{ es una } \textit{cadena} \text{ de } M \Leftrightarrow (\forall k, 1 \leq k \leq n)(M_kRM_{k+1})$$

En la cadena C = $M_1M_2...M_nM_{n+1}$ se dice que: $M_{n+1}$ es el *extremo final* de la cadena C, el mundo actual $M_1$ es el *extremo inicial* de la cadena C, y que la *profundidad de C* es n (prof(C) = n). La cadena formada por un único mundo, el mundo actual $M_1$, tiene profundidad 0. Observar que una cadena tiene profundidad n significa que la cadena esta formada por n+1 mundos posibles.
Si $M_x$ es un mundo posible del marco M, se dice que: la *profundidad de $M_x$* es k (prof($M_x$) = k) $\Leftrightarrow$ k = max{p : prof(C) = p, C es una cadena de M y $M_x$ es el extremo final de C}. En este caso se dice que la profundidad es *finita*. Si el máximo no existe, entonces se dice que la profundidad de $M_x$ es *arbitraria*.
Se dice que la *profundidad del marco* M = (S, $M_1$, R) es k (Prof(M) = k) $\Leftrightarrow$ k = max{p : prof($M_x$) = p y $M_x \in$S}. En este caso se dice que la profundidad es *finita*.
Si el máximo no existe, entonces se dice que la profundidad del marco es *arbitraria*.

**Definición 2.** Sea M = (S, $M_1$, R) un marco y F el conjunto de todas las fórmulas, M = (S, $M_1$, R,V)[1] es un *n-modelo* $\Leftrightarrow$ Prof(M) $\leq$ n y además V es una función (valuación) de SxF en {0, 1} la cual satisface, para cada mundo posible $M_x$, las siguientes reglas o condiciones:
Vat. V($M_x$, p) = 1 o V($M_x$, p) = 0 cuando p es una fórmula atómica.
V$\sim$. V($M_x$, $\sim$A) = 1 $\Leftrightarrow$ V($M_x$, A) = 0.
V$\wedge$. V($M_x$, A$\wedge$B) = 1 $\Leftrightarrow$ V($M_x$, A) = 1 = V($M_x$, B).
V$\vee$. V($M_x$, A$\vee$B) = 0 $\Leftrightarrow$ V($M_x$, A) = 0 = V($M_x$, B).
V$\rightarrow$. V($M_x$, A$\rightarrow$B) = 0 $\Leftrightarrow$ V($M_x$, A) = 1 y V($M_x$, B) = 0.
V$\leftrightarrow$. V($M_x$, A$\leftrightarrow$B) = 1 $\Leftrightarrow$ V($M_x$, A) = V($M_x$, B).
V[R]. V($M_x$, [R]A) = 1 $\Leftrightarrow$ ($\forall M_y \in$S)( $M_xRM_y$ $\Rightarrow$ V($M_y$, A) = 1), cuando Prof($M_x$) < n.

**Definición 3.** Sea A una fórmula, A es *verdadera en el n-modelo* M = (S, $M_1$, R,V) (denotado M$\vDash_n$ A) $\Leftrightarrow$ V($M_1$, A) = 1.
A es *n-válida* (denotado $\vDash_n$ A) $\Leftrightarrow$ ($\forall$M, M un n-modelo)(M$\vDash_n$ A).

Observar que cuando se habla de 0-validez, se hace referencia a los 0-modelos, pero en estos modelos no aplica la regla V[R], es decir, lo 0-modelos son los modelos del cálculo proposicional clásico CP, por lo que 0-validez coincide con validez en CP ($\vDash$ A $\Leftrightarrow$ $\vDash_0$ A).
Resulta entonces que una fórmula A *no* es n-válida si y solamente si ($\exists$M, M un n-modelo)(M no$\vDash_n$ A), es decir, ($\exists$M = (S, $M_1$, R, V), M un n-modelo)(V($M_1$,

[1]Observar que cada modelo (S, $M_1$, R, V) tiene un *marco asociado* (S, $M_1$, R). Cuando no hay lugar a confusión se les da el mismo nombre.

A) = 0). Por lo que, si la fórmula A no es válida, utilizando las reglas V$\sim$, V$\wedge$, V$\vee$, V$\rightarrow$, V$\leftrightarrow$ y V[R], a partir de V($M_1$, A) = 0, se construye un n-modelo M = (S, $M_1$, R, V) que refute la validez de la fórmula A, este modelo es llamado *n-modelo refutador*. Pero si la fórmula A es válida, entonces la construcción del *n-modelo refutador* fracasará puesto que, en alguno de los mundos posibles (bien sea $M_1$ o un mundo generado por la aplicación de la regla V[R]) del modelo en construcción se presentará una inconsistencia.

En resumen, para probar la n-validez de una fórmula A, se supone que la fórmula A no es n-válida, es decir, es falsa en el mundo actual $M_1$, y a partir de esta información se construye el n-modelo refutador. Si tal n-modelo no existe entonces se concluye que la fórmula A es válida.

## 5. n-Completitud

En la búsqueda constructiva del *modelo refutador*, los valores de verdad generados por las reglas V$\sim$, V$\wedge$, V$\vee$, V$\rightarrow$ y V$\leftrightarrow$ en el mundo $M_x$ son llamados *valores de verdad consiguientes* de $M_x$, y las fórmulas asociadas a estos valores son llamadas *fórmulas consiguientes* de $M_x$. Los valores de verdad generados por la regla V[R] en el mundo $M_y$ son llamados *valores de verdad iniciales* de $M_y$, y las fórmulas asociadas a estos valores son llamadas *fórmulas iniciales* de $M_y$.

A cada mundo posible $M_x$ se le asocia la fórmula $m_x$ de la siguiente manera:

Si $X_1$, ..., $X_k$ son las fórmulas iniciales de $M_x$ con valores iniciales 1, y X es la fórmula inicial de $M_x$ con valor inicial 0, entonces $m_x$ es la fórmula ($X_1\wedge...\wedge X_k$) $\rightarrow$X. En caso de no existir en $M_x$ fórmulas iniciales con valores iniciales 1, entonces $m_x$ es X. En el mundo actual $M_1$ el valor inicial es 0 y la fórmula inicial es A (la fórmula cuya validez se intenta refutar), por lo que $m_1$ es la fórmula A, es decir, $m_1$ es la fórmula cuya validez se intenta refutar.

Cuando fracasa la construcción del modelo refutador, entonces se genera una cadena de mundos posibles C = $M_1M_2...M_k$ tal que *$M_k$ es inconsistente*, es decir, en $M_k$ se presenta una contradicción al aplicar las reglas V$\sim$, V$\wedge$, V$\vee$, V$\rightarrow$ y V$\leftrightarrow$, en los valores iniciales de la fórmula $m_k$. En este caso se dice que *la cadena C es inconsistente*.

**Proposición 6.** *(0-validez en las cadenas inconsistentes).*

En la búsqueda de un n-modelo refutador, si para algún k, 1 $\leq$ k $\leq$ n+1, $M_1M_2...M_k$ es una cadena inconsistente entonces $m_k$ es 0-válida.

*Prueba:* si para algún k, 1 $\leq$ k $\leq$ n+1, $M_1M_2...M_k$ es una cadena inconsistente, entonces el mundo $M_k$ es inconsistente, es decir, a partir de los valores iniciales de la fórmula $m_k$ se presenta una contradicción. Como $m_k$ tiene la forma ($P_1\wedge...\wedge P_t$) $\rightarrow$C donde los valores iniciales de las fórmulas $P_1$, ..., $P_t$ son 1 y el valor inicial de la fórmula C es 0, entonces, decir que a partir de los valores iniciales de $M_k$ se genera una contradicción, es equivalente a decir que si $m_k$ toma el valor 0 entonces al utilizar las reglas V$\sim$, V$\wedge$, V$\vee$, V$\rightarrow$ y V$\leftrightarrow$ se genera una contradicción, por lo que $m_k$ no puede tomar el valor 0, es decir $m_k$ es CP-válida o 0-válida.

**Proposición 7.**
Para cada j, t y n tales que $1 \leq j, t \leq n$ y $n \geq 2$, $\Vdash_t m_{j+1} \quad \Rightarrow \quad \Vdash_{t+1} m_j$. En particular, $\Vdash_n m_2 \quad \Rightarrow \quad \Vdash_{n+1} m_1$.

*Prueba:* Supóngase que la fórmula $m_{j+1}$ tiene la forma $(X_1 \wedge ... \wedge X_k) \rightarrow X$, esto significa que en el mundo $M_{j+1}$, las fórmulas iniciales $X_1$, ..., $X_k$ tienen valores iniciales 1 y la formula inicial X tiene valor inicial 0. Por lo tanto, según la regla V[R], en el mundo $M_j$ se tienen las fórmulas $[R]X_1$, ..., $[R]X_k$ con valores 1 y la fórmula [R]X con valor 0, resultando que la fórmula $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ toma el valor 0 en $M_j$. Por otro lado, los valores de las fórmulas $[R]X_1$, ..., $[R]X_k$ y [R]X, si no son iniciales, entonces son consiguientes, y como los valores consiguientes se obtienen a partir de los iniciales utilizando únicamente las reglas V$\sim$, V$\wedge$, V$\vee$, V$\rightarrow$ y V$\leftrightarrow$, y además estos valores iniciales hacen que $m_j$ tome el valor 0, se tiene entonces que si $m_j$ toma el valor 0 entonces $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ toma el valor 0, es decir, si $m_j$ no es válido (validez en CP) entonces $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ no es válido, o dicho de otra manera, si $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ es válido entonces $m_j$ es válido. Es decir, según el teorema de completitud del cálculo proposicional clásico, si $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ es un teorema de CP entonces $m_j$ es teorema de CP. Como los sistemas de la jerarquía SCR-n con $n \geq 1$ son extensiones de CP entonces, si $([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$ es un teorema de SCR-n entonces $m_j$ es teorema de SCR-n.
Supóngase que $\Vdash_t m_{j+1}$. Por la proposición 5, $\Vdash_{t+1} [R]m_{j+1}$, y como $m_{j+1}$ es de la forma $(X_1 \wedge ... \wedge X_k) \rightarrow X$ entonces $\Vdash_{t+1} [R]((X_1 \wedge ... \wedge X_k) \rightarrow X)$, aplicando MP[R] resulta $\Vdash_{t+1} [R](X_1 \wedge ... \wedge X_k) \rightarrow [R]X$, utilizando la proposición 3 creencia de la conjunción se infiere $\Vdash_{t+1} ([R]X_1 \wedge ... \wedge [R]X_k) \rightarrow [R]X$, y por lo dicho al inicio de la prueba se concluye que $\Vdash_{t+1} m_j$.
La segunda parte de la proposición es consecuencia de la primera cuando se hace $t = n$ y $j = 1$.

**Proposición 8.**
Para cada k y j tales que $0 \leq k < j$, $\Vdash_t m_j \quad \Rightarrow \quad \Vdash_{t+k} m_{j-k}$. En particular, para $n \geq 1$, $\Vdash_1 m_n \quad \Rightarrow \quad \Vdash_n m_1$.

*Prueba:* la prueba se realiza por inducción sobre k.
Paso base ($k = 0$). Se reduce a probar que $\Vdash_t m_j \Rightarrow \quad \Vdash_t m_j$, lo cual es inmediato.
Paso de inducción. Como hipótesis de inducción se tiene $\Vdash_t m_j \quad \Rightarrow \quad \Vdash_{t+k} m_{j-k}$ donde $0 \leq k < j$.

Supóngase que $\Vdash_t$ $m_j$ donde $0 \leq$ k+1 $<$ j, por la hipótesis inductiva resulta $\Vdash_{t+k}$ $m_{j-k}$ y además $0 <$ j-(k+1), es decir $1 <$ j-k, utilizando la proposición 7 se infiere $\Vdash_{t+k+1}$ $m_{j-k-1}$, es decir $\Vdash_{t+(k+1)}$ $m_{j-(k+1)}$.
Por el principio de inducción matemática resulta que $\Vdash_t$ $m_j \quad\Rightarrow\quad \Vdash_{t+k}$ $m_{j-k}$ donde $0 \leq$ k $<$ j.
La segunda parte se sigue de la primera cuando t = 1, k = n − 1 y j = n.

**Proposición 9.**
Para cada n y j tales que $0 \leq$ j $\leq$ n, $\Vdash_1$ $m_{j+1} \quad\Rightarrow\quad \Vdash_{n+1}$ $m_1$.

*Prueba:* Supóngase que $0 \leq$ j $\leq$ n y $\Vdash_1$ $m_{j+1}$, por la proposición 8 resulta que $\Vdash_{j+1}$ $m_1$, y puesto que j+1 $\leq$ n+1, por la proposición 1 se infiere $\Vdash_{n+1}$ $m_1$.

**Proposición 10.** *(n-completitud de SCR-(n+1)).*
Para n $\geq$ 0, y para cada fórmula X, $\vDash_n$ X $\Rightarrow\quad \Vdash_{n+1}$ X.

*Prueba:* Supóngase que $\vDash_n$ X, por lo que en el proceso de construcción de un modelo refutador de la fórmula X resulta una cadena de mundos posibles C = $M_1M_2...M_{j+1}$, donde $0 \leq$ j $\leq$ n y C es inconsistente. Al ser el mundo $M_{j+1}$ inconsistente entonces, por la proposición 6 resulta que la fórmula $m_{j+1}$ es CP válida, lo cual gracias a la completitud de CP significa que $m_{j+1}$ es un teorema de CP, es decir $\Vdash_1$ $m_{j+1}$, utilizando la proposición 9 se infiere $\Vdash_{n+1}$ $m_1$, o sea que $\Vdash_{n+1}$ X. Por lo tanto, $\vDash_n$ X $\Rightarrow\quad \Vdash_{n+1}$ X.

## 6. n-Validez

**Proposición 11.** (*de n-validez a (n+1)-validez*).
Para cada n $\geq$ 0, $\vDash_n$ A $\Rightarrow\quad \vDash_{n+1}$A.

*Prueba:* Supóngase que $\vDash_n$ A, por lo que en la búsqueda constructiva de un n-modelo refutador de la fórmula A, resulta una cadena inconsistente C = $M_1M_2\ldots M_k$ para algún k tal que $1 \leq$ k $\leq$ n+1. Por lo tanto, en la búsqueda constructiva de un (n+1)-modelo refutador de la fórmula A, resulta la misma cadena inconsistente C = $M_1M_2\ldots M_k$ para algún k, $1 \leq$ k $\leq$ n+2, se concluye entonces que $\vDash_{n+1}$A.

**Proposición 12.** (*validez de las creencias*).
Para cada n $\geq$ 0, $\vDash_n$ A $\Rightarrow\quad \vDash_{n+1}$[R]A.

*Prueba:* Supóngase que 'no$\vDash_{n+1}$[R]A', por lo que existe un (n+1)-modelo refutador de [R]A M = (S, $M_1$, R, V) tal que 'no M$\vDash_{n+1}$[R]A', es decir V($M_1$, [R]A) = 0, por la regla V[R] resulta que existe un mundo posible $M_2$ accesible desde $M_1$ tal que V($M_2$, A) = 0. El (n+1)-modelo M se encuentra formado por cadenas consistentes de la forma $M_1M_2...M_k$, las cuales tienen profundidad a lo sumo n+1, y además en el mundo $M_1$ la fórmula $m_1$, es decir [R]A, toma el valor 0, y en el mundo $M_2$ la fórmula $m_2$, es decir A, toma el valor 0. A partir del (n+1)-modelo refutador M de [R]A se construye un n-modelo refutador M' de la fórmula A de la siguiente manera: se elimina el mundo actual $M_1$ del modelo M y se toma como mundo actual del modelo M' el mundo $M_2$, en la relación de accesibilidad del modelo M se eliminan la relación existente entre el mundo $M_1$ y el mundo $M_2$, resultando que M' = (S-$\{M_1\}$, $M_2$, R-$\{(M_1,M_2)\}$, V), por construcción el modelo M' se encuentra formado por cadenas consistentes $M_2 ... M_k$ de profundidad a lo sumo n, lo que significa que M' es un n-modelo, y además en el mundo $M_2$ la fórmula $m_2$, es decir la fórmula A, toma el valor 0, por lo tanto M' es un n-modelo refutador de la fórmula A, es decir "no M'$\vDash_n$A", por lo que 'no$\vDash_n$A'. De lo anterior se concluye que 'no$\vDash_{n+1}$[R]A' $\Rightarrow$ 'no$\vDash_n$A', es decir $\vDash_n$ A $\Rightarrow$ $\vDash_{n+1}$[R]A.

**Proposición 13.** (*validez de los axiomas*).
Para cada n $\geq 0$, y para cada fórmula X,

$$\text{X axioma de SCR-(n+1)} \Rightarrow \ \vDash_n \text{X}.$$

*Prueba:* Supóngase que X axioma de SCR-(n+1), se probará $\vDash_n$ X haciendo inducción sobre n.
Paso base (n = 0). Se debe probar: X axioma de SCR-1 $\Rightarrow$ $\vDash_0$ X, lo cual es cierto ya el sistema SCR-1 es el cálculo proposicional clásico CP, 0-validez es validez en CP y utilizando el teorema de validez de CP, presentado en [1], se obtiene que $\vdash_{CP}$ X $\Rightarrow$ $\vDash_{CP}$ X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene, para cada fórmula Y que, Y axioma de SCR-(n+1) $\Rightarrow$ $\vDash_n$ Y.
Supóngase que X es un axioma de SCR-(n+2), por lo que pueden ocurrir 3 casos: en el primer caso X es un axioma de SCR-(n+1), en el segundo X es de la forma [R]Y, donde Y es un axioma de SCR-(n+1), y en el tercer caso X es de la forma [R](Y→Z)→([R]Y→ [R]Z). En el primer caso, X es un axioma de SCR-(n+1), utilizando la hipótesis inductiva resulta que $\vDash_n$ X, y por la proposición 11 se infiere $\vDash_{n+1}$ X. En el segundo caso, X es de la forma [R]Y, donde Y es un axioma de SCR-(n+1), utilizando la hipótesis inductiva resulta que $\vDash_n$ Y, y por la proposición 12 se infiere $\vDash_{n+1}$ [R]Y, por lo que $\vDash_{n+1}$ X. En el tercer caso, X es de la forma [R](Y→Z)→([R]Y→[R]Z), si esta fórmula no fuese (n+1)-válida (con n+1 $\geq$ 1), entonces existiría un (n+1)-modelo tal que en el mundo actual $M_1$, V($M_1$, [R](Y→Z)→([R]Y→[R]Z)) = 0, lo cual según la regla V→ significa V($M_1$, [R](Y→Z)) = 1 y V($M_1$, [R]Y→[R]Z) = 0, y de nuevo por la misma regla se obtienen V($M_1$, [R]Y) = 1 y V($M_1$, [R]Z) = 0, de esta última por la regla V[R] se infiere la existencia de un mundo $M_2$ accesible desde $M_1$ en el cual V($M_2$, Z) = 0, pero como $M_2$ es accesible desde $M_1$ y V($M_1$, [R](Y→Z)) = 1 y V(M1, [R]Y) = 1 entonces por la regla V[R] se obtienen V($M_2$, Y→Z) = 1 y V($M_2$, Y) = 1, lo cual por V→ genera V($M_2$, Z) = 1, pero esto es imposible. Por lo tanto, [R](Y→Z)→([R]Y→[R]Z) es (n+1)-válida, es decir $\vDash_{n+1}$ X. Resultando finalmente que X es un axioma de SCR-(n+2) $\Rightarrow$ $\vDash_{n+1}$ X.

Por el principio de inducción matemática se ha probado que para cada n $\geq 0$, y para cada fórmula X, si X axioma de SCR-(n+1) entonces $\vDash_n$ X.

**Proposición 14.** (*MP preserva n-validez*).
Para cada n $\geq 1$, y para cada par de fórmulas X y Y, $\vDash_n$ X y $\vDash_n$ X$\rightarrow$Y $\Rightarrow$ $\vDash_n$ Y.

*Prueba:* Supóngase que $\vDash_n$ X y $\vDash_n$ X$\rightarrow$Y. Supóngase ahora que no$\vDash_n$ Y, por lo que existe un n-modelo M tal que, en el mundo actual $M_1$ de M, V($M_1$, Y) = 0. Como X y X$\rightarrow$Y son n-válidas, entonces V($M_1$, X$\rightarrow$Y) = 1 V($M_1$, X) = 1, por la regla V$\rightarrow$ de V($M_1$, Y) = 0 y V($M_1$, X$\rightarrow$Y) = 1 resulta V($M_1$, X) = 0 lo cual es imposible. Por lo tanto $\vDash_n$ Y, resultando finalmente que, si$\vDash_n$ X y $\vDash_n$ X$\rightarrow$Y entonces $\vDash_n$ Y.

**Proposición 15.** (*n-validez de SCR-(n+1)*).
Para cada n $\geq 0$, y para cada fórmula X, $\Vdash_{n+1}$ X $\Rightarrow$ $\vDash_n$ X.

*Prueba:* Supóngase $\Vdash_{n+1}$ X , se prueba $\vDash_n$ X por inducción sobre la longitud L de la demostración de X es SCR-(n+1).
Paso Base L = 1. Si la longitud de la demostración de X en SCR-(n+1) es 1 entonces, X es un axioma de SCR-(n+1), lo cual por la proposición 13 significa que $\vDash_n$ X.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que para cada fórmula Y, si $\Vdash_{n+1}$ Y y la longitud de la demostración de Y tiene longitud menor que L (donde L > 1) entonces $\vDash_n$ Y.
Si $\Vdash_{n+1}$ X y la longitud de la demostración de X es L entonces, X es un axioma de SCR-(n+1) o X es consecuencia de aplicar modus ponens en pasos anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el caso base. En el segundo caso se tienen en SCR-(n+1), para alguna fórmula Y, demostraciones de Y y de Y$\rightarrow$X, y la longitud de ambas demostraciones menor que L, utilizando la hipótesis inductiva se infieren $\vDash_n$ Y y$\vDash_n$ Y$\rightarrow$X, y por la proposición 14 resulta $\vDash_n$ X.
Por el principio de inducción matemática se ha probado que, para cada n $\geq 1$, y para cada fórmula X, $\Vdash_{n+1}$ X $\Rightarrow$ $\vDash_n$ X.

**Proposición 16.** (*caracterización semántica de SCR-(n+1)*).
Para cada n $\geq 0$, y para cada fórmula X, $\Vdash_{n+1}$ X $\Leftrightarrow\vDash_n$ X.

*Prueba:* Consecuencia inmediata de las proposiciones 10 y 15.

## 7. Sistema SCR-$\omega$

El conjunto de fórmulas de los sistemas K y SCR-$\omega$, definidos a continuación, se genera adicionando a las reglas utilizadas para generar las fórmulas de CP, la regla: si X es una fórmula entonces [R]X también es una fórmula.

**Definición 4.** El sistema de *lógica modal K* es axiomatizado por los axiomas del cálculo proposicional clásico CP y el *axioma K*: [R](X$\rightarrow$Y)$\rightarrow$([R]X$\rightarrow$[R]Y);

los teoremas son generados a partir de los axiomas utilizando 2 reglas de inferencia, la primera es la *regla MP*: (X→Y, X∴Y) y la segunda es la *regla [R]*: (X∴[R]X).

**Definición 5.** El sistema de SCR-$\omega$, *sistema de creencias de un razonador R de tipo-$\omega$,* tiene como única regla de inferencia primitiva el modus ponens y es axiomatizado de la siguiente manera:

X es un axioma de SCR-$\omega$ $\Leftrightarrow$ X axioma de SCR-n para algún n $\geq$ 1.

**Proposición 17.** (*Axiomatización explícita de SCR-n*).
Para cada n $\geq$ 1, el sistema SCR-(n+1) puede ser axiomatizado de la siguiente manera[2]:

X es axioma de CP $\Rightarrow$ $[R]^j$X es axioma de SCR-(n+1), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ n.

$[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) es axioma de SCR-(n+1), para 0 $\leq$ t $<$ n.

Como única regla de inferencia se tiene MP.

*Prueba:* la prueba se realiza por inducción en $n$.
Para el paso base, supóngase que $n = 1$. Si X es un axioma de CP, es decir de SCR-1, y por lo tanto X y [R]X son axiomas de SCR-2. Se ha probado que cuando $n = 1$ entonces,

X es axioma de CP $\Rightarrow$ $[R]^j$X es axioma de SCR-(n+1), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ n.

También se sabe que [R](X→Y)→([R]X→[R]Y) es axioma de SCR-2. Resulta entonces que cuando n = 1,

$[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) es axioma de SCR-(n+1), para 0 $\leq$ t $<$ n

Para el paso de inducción, supóngase que el resultado vale para n = m, y se probará para n = m+1. Si X es un axioma de CP, por la hipótesis inductiva se tiene que $[R]^j$X es axioma de SCR-(m+1), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ m, por lo que $[R]^j$X y $[R][R]^j$X son axiomas de SCR-(m+2), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ m. Lo anterior significa que $[R]^j$X es axioma de SCR-(m+2), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ m+1. Se ha probado que cuando $n =$ m+1 entonces,

X es axioma de CP $\Rightarrow$ $[R]^j$X es axioma de SCR-(n+1), para cada j, 0 $\leq$ j $\leq$ n.

También por la hipótesis inductiva se tiene que $[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) es axioma de SCR-(m+1), para 0 $\leq$ t $<$ m, y por lo tanto, $[R][R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) y $[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) son axiomas de SCR-(m+2), para 0 $\leq$ t $<$ m. Se tiene de esta forma que $[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) es axioma de SCR-(m+2), para 0 $\leq$ t $<$ m+1. Se ha probado que cuando $n =$ m+1 entonces,

$[R]^t$([R](X→Y)→([R]X→[R]Y)) es axioma de SCR-(n+1), para 0 $\leq$ t $<$ n.

[2] $[R]^0$A = A, $[R]^1$A = [R]A y $[R]^{n+1}$A = $[R][R]^n$A donde n = 1.

Por el principio de inducción matemática, queda probada la proposición.

**Proposición 18.** (*Equivalencia de SCR-$\omega$ y K*).
Los sistemas K y SCR-$\omega$ generan el mismo conjunto de teoremas.

*Prueba:* Sea X un axioma de SCR-$\omega$, por lo que existe un n tal que, X es un axioma de SCR-(n+1). Es decir, según la proposición 17, X tiene la forma $[R]^j$ Z para algún j, $0 \leq j \leq n$, donde Z es un axioma de CP, o X tiene la forma $[R]^t([R](Z{\rightarrow}Y){\rightarrow}([R]Z{\rightarrow}[R]Y))$ para algún t, $0 \leq t < n$. En el primer caso, si Z es un axioma de CP entonces Z es un axioma de K, y aplicando j veces la regla [R] resulta que $[R]^j$ Z es un teorema de K, es decir X es un teorema de K. En el segundo caso, puesto que [R](Z→Y)→([R]Z→[R]Y) es un axioma de K, y aplicando t veces la regla [R] resulta que $[R]^t([R](Z{\rightarrow}Y){\rightarrow}([R]Z{\rightarrow}[R]Y))$ es un teorema de K. Se tiene entonces que los axiomas de SCR-$\omega$ son teoremas de K, por lo tanto, puesto que la única regla de inferencia de SCR-$\omega$ también es regla de inferencia de K entonces, los teoremas de SCR-$\omega$ son teoremas de K.
Sea X un axioma de K, por lo que X es un axioma de CP o X es de la forma [R](Z→Y)→([R]Z→[R]Y), en ambos casos X es un axioma de SCR-$\omega$. Además, si X es un teorema de SCR-$\omega$ entonces X es un teorema de SCR-n para algún n, y por lo tanto, de acuerdo a la proposición 5, [R]X es un teorema de SCR-(n+1), es decir, [R]X es un teorema de SCR-$\omega$. Se tiene entonces que en SCR-$\omega$ vale la regla [R]. Resulta entonces que en SCR-$\omega$ valen los axiomas y las reglas de inferencia del sistema K. Por lo tanto, los teoremas de K son teoremas de SCR-$\omega$.
Se ha probado que los teoremas de SCR-$\omega$ son teoremas de K y que los teoremas de K son teoremas de SCR-$\omega$. Se concluye que K y SCR-$\omega$ tienen el mismo conjunto de teoremas.

**Definición 6.** La *profundidad* $P(A)$ de una fórmula A, es un entero no negativo que se encuentra utilizando las siguientes reglas:
P(A) = 0 si A es una fórmula atómica.
P(A*B) = máximo de {P(A), P(B)}, donde * es uno de los conectivos $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$.
P(∼A) = P(A).
P([R]A) = P(A) + 1.
Un sistema deductivo S tiene *profundidad* p si y solamente si p es el máximo valor del conjunto {k : k es la profundidad de A, donde A es un teorema de S}. Cuando tal máximo no existe, se dice que la profundidad del sistema es *arbitraria*.

**Proposición 19.** (*Profundidad de SCR-n*).
Para cada $n \geq 0$, la profundidad de SCR-(n+1) es n.

*Prueba:* Como consecuencia de la proposición 17, donde se presentan axiomatizaciones explícitas de los sistemas SCR-(n+1), se infiere que la profundidad

máxima de los axiomas es n. Además, como la única regla de inferencia, modus ponens, no incrementa la profundidad, se concluye que la profundidad de los sistemas SCR-(n+1) es n.
Observar que la profundidad del sistema SCR-(n+1) coincide con la profundidad de los n-modelos, es decir con la profundidad de los modelos que lo caracterizan. Esta observación y la proposición 20 motivan la definición 7.

**Proposición 20.** (*Profundidad de SCR-$\omega$*).
La profundidad de SCR-$\omega$ es arbitraria.

*Prueba:* Si SCR-$\omega$ tiene profundidad k, entonces existe un teorema A del sistema tal que la profundidad de A es k, y ningún teorema es de profundidad k+1, pero esto es imposible ya que si A es un teorema de SCR-$\omega$, entonces A es teorema de SCR-n para algún n, por lo que [R]A es teorema de SCR-(n+1) y por lo tanto también teorema de SCR-$\omega$, resultando de esta forma que SCR-$\omega$ es de profundidad k pero tiene un teorema de profundidad k+1. Por lo tanto, la profundidad de SCR-$\omega$ es arbitraria.

**Definición 7.** Los *$\omega$-modelos* (o simplemente *modelos*) se definen de la misma forma que se definen los n-modelos en la definición 2, eliminando la restricción sobre la profundidad del marco asociado.
Sea X una fórmula, X es *verdadera en un $\omega$-modelo* M = (S, $M_1$, R, V) (denotado M$\vDash_\omega$ X) $\Leftrightarrow$ V($M_1$, X) = 1.
X es *$\omega$-válida* (denotado $\vDash_\omega$ X) $\Leftrightarrow$ ($\forall$M, M un $\omega$-modelo)(M$\vDash_\omega$ X).

**Proposición 21. ($\omega$-teoremas como n-teoremas)**. Para cada fórmula X, $\Vdash_\omega$ X $\Leftrightarrow$ ($\exists$m $\geq$ 0)($\forall$n $\geq$ m)($\Vdash_{n+1}$ X).

*Prueba:* Si $\Vdash_\omega$ X entonces existe una demostración de X a partir de algunos axiomas $X_1$, ..., $X_k$ de SCR-$\omega$, por lo que existen $n_1$, ..., $n_k$ mayores que 1 tales que $X_1$ es axioma de SCR-$n_1$, ..., $X_k$ es axioma de SCR-$n_k$. Sea m = máximo{$n_1$, ..., $n_k$}, resulta que, $X_1$, ..., $X_k$ son axiomas de SCR-n para cada n $\geq$ m, y como se tiene una demostración de X a partir de estos axiomas entonces, $\Vdash_n$ X, es decir ($\exists$m $\geq$ 1)($\forall$n $\geq$ m)($\Vdash_n$ X), o dicho de otra manera ($\exists$m $\geq$ 0)($\forall$n $\geq$ m)($\Vdash_{n+1}$ X).
Para probar la recíproca, supóngase que para algún n $\geq$ 0 $\Vdash_{n+1}$ X, lo cual significa que existe una demostración de X a partir de los axiomas de SCR-(n+1), y como los axiomas de SCR-(n+1) son axiomas de SCR-$\omega$ entonces, la demostración de X en SCR-(n+1) también es una demostración de X en SCR-$\omega$, por lo tanto $\Vdash_\omega$ X.

**Proposición 22.** ($\omega$-validez de SCR-$\omega$).
Para cada fórmula X, $\Vdash_\omega$ X $\Rightarrow\vDash_\omega$ X.

*Prueba:* Supóngase que $\Vdash_\omega$ X, por la proposición 21 resulta que ($\exists$m $\geq$ 0)($\forall$n $\geq$ m)($\Vdash_{n+1}$ X), lo cual según la proposición 16 significa ($\exists$m $\geq$ 0)($\forall$n $\geq$ m)($\vDash_n$ X).

Si no fuese el caso que $\vDash_\omega$ X, entonces existe un $\omega$-modelo M = (S, $M_1$, R, V) tal que no es el caso que M$\vDash_\omega$ X, por lo que todas las cadenas C = $M_1M_2...M_t$ del modelo son consistentes, y puesto que para n $\geq$ m se tiene que $\vDash_n$ X entonces las cadenas tienen profundidad menor que m. A partir del modelo M se construye el m-modelo M' de la siguiente manera: se cambia una cadena C por la cadena C' = $M_1M_2...M_tM_{t+1}...M_mM_{m+1}$ (agregando a S los nuevos mundos posibles y agregando a R las relaciones indicadas en la cadena y haciendo que la valuación V asigne a las fórmulas atómicas de los nuevos mundos los mismos valores que en $M_t$), resultando que la cadena C' es consistente por lo que M' es un m-modelo que refuta la fórmula X, lo cual es imposible ya que $\vDash_m$ X. Por lo tanto, $\vDash_\omega$ X.

**Proposición 23.** ($\omega$-completitud de SCR-$\omega$).
Para cada fórmula X, $\vDash_\omega$ X $\Rightarrow \Vdash_\omega$ X.

*Prueba:* Supóngase que $\vDash_\omega$ X, por lo que en la construcción de un modelo refutador de la fórmula X, resulta una cadena inconsistente de mundos posibles C = $M_1M_2...M_{n+1}$ para algún n $\geq$ 0, lo cual significa que X no puede ser refutada por un n-modelo, es decir $\vDash_n$ X. Por la proposición 10 se infiere $\Vdash_{n+1}$ X, y aplicando la proposición 21 se concluye que $\Vdash_\omega$ X.

**Proposición 24.** (Caracterización semántica de SCR-$\omega$).
Para cada fórmula X, $\vDash_\omega$ X $\Leftrightarrow \Vdash_\omega$ X.

*Prueba:* Consecuencia inmediata de las proposiciones 22 y 23.

## 8. Conclusiones

Cuando se tiene un razonador de tipo-(n+1), la noción de profundidad del sistema SCR-(n+1) o la noción de profundidad de los modelos que caracterizan este sistema, en cierto sentido, mide la capacidad del razonador para hacer inferencias en lo que respecta al operador de creencia; es decir, razonadores de distinto tipo tienen diferente poder de razonamiento. Gracias a la caracterización semántica estas diferencias pueden ser detectadas, y por lo tanto, este poder de razonamiento puede ser medido. Lo anterior puede ser útil en el modelamiento de agentes, puesto que a partir de las limitaciones reales del agente, podría determinarse su poder de razonamiento, es decir su tipo, y por lo tanto decidir con cual sistema de la jerarquía SCR-n con n $\geq$ 1 se debe iniciar su modelamiento. Por otro lado, las metodologías utilizadas en la teoría de la correspondencia (para detalles ver [2]), para construir sistemas modales basados en la lógica modal K los cuales deban satisfacer ciertas características semánticas, pueden ser también utilizadas para construir sistemas similares basados en las lógicas de la jerarquía SCR-n con n $\geq$ 1. Como resultado de lo anterior, se podrían construir sistemas de lógicas doxásticas y epistémicas en los cuales el problema de la omnisciencia lógica pueda ser parcialmente controlado.

## Referencias

[1] Caicedo, X. *Elementos de lógica y calculabilidad*. Editorial Universidad de los Andes. Bogotá. 1990.
[2] Chellas, B. *Modal logic: an introduction*. Cambridge University Press. Cambridge. 1980.
[3] Freund, M. *Lógica epistémica*. Enciclopedia iberoamericana de filosofía. Volumen 7. Editorial Trotta S. A. Madrid. 1995.
[4] Goldblatt, R. *Logics of time and computation*. Editorial CSLI. USA. 1992.
[5] Hamilton, A. *Lógica para matemáticos*. Editorial Paraninfo S.A. Madrid. 1981.
[6] Hughes, G. y Cresswell, M. *Introducción a la lógica modal*. Editorial Tecnos S.A. Madrid. 1973.
[7] Lenzen, W. *Recent work of epistemic logic*. Acta Philosophica Fennica. Vol 30. 1978.
[8] Smullyan, R. *Juegos por siempre misteriosos*. Editorial Gedisa S.A. Barcelona. 1995.
[9] Sierra, M. *Tipos de razonadores*. Revista Universidad EAFIT, Vol. 43, No. 146, Medellín 2007.

Recibido: Mayo de 2007. Aceptado para publicación: Noviembre de 2007