Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIV No. 2 (2007), pp. 83—91

ADJUNCIÓN DE UNIDAD VERSUS COMPACTACIÓN POR UN PUNTO: EL CASO BOOLEANO

LORENZO ACOSTA (*)
JEANNETH GALEANO (**)

Resumen. Se muestra que, en el contexto booleano, el proceso algebraico de adjunción de unidad corresponde al proceso topológico de compactación de Alexandroff.

Palabras claves. Adjunción de unidad, compactación de Alexandroff, anillo de Boole, topología de Zariski.

Abstract. It is shown that, in the boolean context, the algebraic process of adjointness of a unit element, corresponds to the Alexandroff compactification process.

Key words and phrases. Adjointness of a unit element, Alexandroff compactification, Boole ring, Zariski topology.

2000 Mathematics Subject Classification: 18A40, 54D30

1. Introducción

Si consideramos un anillo de Boole A que no tiene unidad, existe una manera estándar de incluirlo en un anillo de Boole con unidad. Este anillo, que notaremos A', es el anillo de Boole con unidad más pequeño que contiene a A como subanillo. Más aún A resulta ser un ideal maximal de A'.

(*) Lorenzo Acosta, Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: lmacostag@unal.edu.co

(**) Jeanneth Galeano, Instructora Asociada, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: jgaleanop@unal.edu.co.

Por otro lado, dado un espacio de Hausdorff y localmente compacto X, existe una única manera de compactarlo por un punto, es decir, de incluirlo en un espacio de Hausdorff compacto X^* que tiene exactamente un punto más que X. Esta compactación se conoce con el nombre de compactación de Alexandroff.
Estos dos contextos, algebraico y topológico, están ligados mediante el funtor espectro que a cada anillo de Boole le hace corresponder el conjunto de sus ideales primos dotado con la topología de Zariski.
En estas notas mostraremos que el proceso algebraico de adjunción de unidad corresponde, mediante el funtor espectro, al proceso topológico de compactación de Alexandroff.

2. Preliminares

Recordamos aquí las nociones básicas para comprender sin dificultad el desarrollo de este trabajo. Los resultados que se presentan son bien conocidos y existen numerosas referencias donde el lector puede consultarlos. En [1] y [2] se encuentra un resumen de estas nociones junto con la mayoría de las demostraciones. Una excelente referencia también es [3].
Un anillo A es un anillo de Boole si para todo $x \in A$ se tiene que $x^2 = x$.
Es bien sabido que todo anillo de Boole es conmutativo y de característica 2.
En adelante A designará un anillo de Boole.
Para todo $x, y \in A$, decimos que $x \leq y$ si $xy = x$.
Es fácil ver que la relación así definida es un orden parcial en A. El conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un retículo en el cual para cada $x, y \in A$

$$x \wedge y = xy$$

$$x \vee y = x + y + xy$$

donde $x \wedge y$ designa el ínfimo de $\{x,\ y\}$ y $x \vee y$ el supremo. El mínimo de A siempre existe y es 0. A tiene máximo si y solamente si el anillo tiene unidad.
Sea I un subconjunto no vacío de A. I es un ideal del anillo A si y solamente si

(i) $x, y \in I \Longrightarrow x \vee y \in I$
(ii) $x \in I,\ y \leq x \Longrightarrow y \in I$

Se dice que un subconjunto propio $F \neq \emptyset$ de A es un filtro si

(i) $x, y \in F \Longrightarrow x \wedge y \in F$

(ii) $x \in F,\ y \geq x \Longrightarrow y \in F$

El filtro F es primo si además

$$x \vee y \in F \Longrightarrow x \in F \text{ o } y \in F.$$

En el caso de los anillos de Boole, los ideales primos y los maximales coinciden, y los filtros primos y los maximales también. Además, F es un filtro maximal de A si y sólo si $A - F$ es un ideal maximal de A.
Designaremos por $S(A)$ al conjunto de los ideales maximales de A dotado con la topología de Zariski, cuyos abiertos básicos son los conjuntos de la forma

$$D(a) = \{I \subseteq A | I \text{ es un ideal maximal y } a \notin I\}.$$

Este espacio topológico se llama el espectro de A y es un espacio de Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo. Para probar esto se utilizan entre otras las siguientes propiedades de los abiertos básicos:

1. $D(a \wedge b) = D(a) \cap D(b)$ para todo $a,\ b \in A$.
2. $D(a \vee b) = D(a) \cup D(b)$ para todo $a, b\ \in A$.
3. $D(a)$ es abierto-cerrado de $S(A)$ para todo $a \in A$.
4. $D(a)$ es compacto para todo $a \in A$.
5. $D(0) = \emptyset$.
6. Si A tiene 1 entonces $D(1) = S(A)$.

Tenemos además que $S(A)$ es compacto si y sólo si A tiene 1.

3. Adjunción de unidad a un anillo de Boole

Dado un anillo conmutativo R sin unidad, existen diversas formas de incluirlo en un anillo con unidad. Si la característica de R es n podemos construir una estructura de anillo sobre $R \times \mathbb{Z}_n$, con la misma característica, de tal manera que R pueda verse como subanillo de este último. En esta sección describimos la construcción correspondiente para anillos de Boole y estudiamos las relaciones que existen entre los ideales y filtros maximales del anillo original y los ideales y filtros maximales del nuevo anillo.

Definición 3.1. Sea $A' = A \times \mathbb{Z}_2$. Para $(a, \alpha), (b, \beta) \in A'$ definimos

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$
$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)$$

La prueba de la siguiente proposición no tiene dificultad.

Proposición 3.2.
1. A' con las operaciones que acabamos de definir es un anillo de Boole con unidad $(0, 1)$.
2. A es un anillo isomorfo al subanillo $A \times \{0\}$ de A'.
3. $A \times \{0\}$ es un ideal maximal de A'.

En adelante, cuando sea necesario, identificaremos a A con $A \times \{0\}$.

Proposición 3.3.
1. Si J es un ideal primo de A' tal que $J \neq A$ entonces $F = \{b \in A | (b, 1) \in J\}$ es un filtro primo de A.
2. Si F es un filtro primo de A entonces $H = (F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\})$ es un ideal primo de A'.
3. Si J es un ideal maximal de A' y $F = \{b \in A | (b, 1) \in J\}$ entonces $J = (F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\})$

Demostración.
1. Si $a, b \in F$ se tiene que $(a, 1), (b, 1) \in J$, luego $(a, 1) \vee (b, 1) = (ab, 1) \in J$, es decir $ab \in F$.
   Si $a \in F, b \in A$ entonces $(a, 1) \in J$, luego $(a, 1) \wedge (b, 1) = (ab + a + b, 1) \in J$, es decir, $a \vee b = ab + a + b \in F$.
   Si $a, b \notin F$ entonces $(a, 1), (b, 1) \notin J$. Como J es primo, $(a, 1) \wedge (b, 1) = (ab + a + b, 1) \notin J$ luego $a \vee b = ab + a + b \notin F$.
2. Sean $(a, \alpha), (b, \beta) \in H$. Para ver que $(a, \alpha) \vee (b, \beta) \in H$ examinamos tres casos:
   $\alpha = \beta = 0$: $(a, 0), (b, 0) \in H$ significa que $a, b \in F^c$, entonces $a \vee b \in F^c$ porque F es filtro primo. Pero $a \vee b = ab + a + b$, luego $(a, 0) \vee (b, 0) = (ab + a + b, 0) \in H$.
   $\alpha = 1, \beta = 0$: $(a, 1), (b, 0) \in H$ implica $a \in F$ y $b \in F^c$. Como $a \vee b \geq a$ se tiene que $a \vee b \in F$, es decir, $ab + a + b \in F$. Entonces

$ab + a + b + b \notin F^c$ porque F^c es un ideal. Así $ab + a \in F$, luego $(a, 1) \vee (b, 0) \in H$.

$\alpha = 1, \beta = 1$: $(a, 1), (b, 1) \in H$, $a, b \in F$ y $ab \in F$. Entonces $(a, 1) \vee (b, 1) = (ab, 1) \in H$.

Veamos ahora que si $(a, \alpha) \in H$ y $(b, \beta) \in A'$ entonces $(a, \alpha) \wedge (b, \beta) \in H$.

$\alpha = \beta = 0$: $(a, 0) \in H$ y $(b, 0) \in A'$ se tiene que $a \in F^c$, y por lo tanto $a \wedge b = ab \in F^c$, pues si $a \wedge b \in F$, como $a \wedge b \leq a$ se tendría que $a \in F$, lo cual no es cierto. Luego, $(a, 0) \wedge (b, 0) = (ab, 0) \in H$.

$\alpha = 1, \beta = 0$: $(a, 1) \in H$ y $(b, 0) \in A'$ como $a \in F$ y $a \wedge (ab + b) = 0$ se sigue que $ab + b \in F^c$, luego $(a, 1) \wedge (b, 0) = (ab + b, 0) \in H$.

$\alpha = 0, \beta = 1$: $(a, 0) \in H$ y $(b, 1) \in A'$, como $a \in F^c$ se sigue que $ab + a \in F^c$, pues de no ser así, como $a \vee (ab + a) = a$ se tendría que $a \in F$, por ser $a \geq ab + a$. Luego $(a, 0) \wedge (b, 1) = (ab + a, 0) \in H$.

$\alpha = 1, \beta = 1$: $(a, 1) \in H$ y $(b, 1) \in A'$, como $a \in F$ se tiene que $ab + a + b \in F$. Entonces $(a, 1) \wedge (b, 1) = (ab + a + b, 1) \in H$.

Con esto concluimos que H es ideal. Veamos que es primo.
Sean $(a, \alpha), (b, \beta) \in A'$ tales que $(a, \alpha) \wedge (b, \beta) \in H$

$\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{aligned}
(a, 1) \wedge (b, 1) \in H &\Longleftrightarrow (ab + a + b, 1) \in H \\
&\Longleftrightarrow a \vee b \in F \\
&\Longleftrightarrow a \in F, \text{ ó}, b \in F \\
&\Longleftrightarrow (a, 1) \in H, \text{ ó}, (b, 1) \in H.
\end{aligned}$$

$\alpha = 0, \beta = 1$:

$$\begin{aligned}
(a, 0) \wedge (b, 1) \in H &\Longleftrightarrow (ab + a, 0) \in H \\
&\Longleftrightarrow ab + a \in F^c.
\end{aligned}$$

Supongamos que $a \in F$ y $b \in F^c$. Como $b \vee (a+b) = a+b+ab = a \vee b \in F$, se tiene que $a+b \in F$, por lo tanto $a \wedge (a+b) = ab + a \in F$, lo cual es contradictorio.
Por lo tanto, $a \in F^c$ o $b \in F$, y así $(a,0) \in H$, ó, $(b,1) \in H$.

$\alpha = \beta = 0$:

$$\begin{aligned}
(a,0) \wedge (b,0) \in H &\iff (ab,0) \in H \\
&\iff ab \in F^c \\
&\iff a \wedge b \in F^c \\
&\implies a \in F^c \text{ o } b \in F^c \\
&\implies (a,0) \in H \text{ o } (b,0) \in H.
\end{aligned}$$

Concluimos que H es un ideal maximal (primo) de A'.

3. Por definición de F, se tiene que $F \times \{1\} \subseteq J$. Por otra parte, si $(a,0) \in F^c \times \{0\}$ entonces $(a,1) \notin J$ y como $(a,1) \wedge (a,0) = (0,0) \in J$ tenemos que $(a,0) \in J$. Así que $(F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\}) \subseteq J$, y como además $(F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\})$ es ideal maximal de A' se tiene la igualdad. □

4. Relación entre $S(A)$ y $S(A')$

Hemos visto que si A no tiene unidad entonces $S(A)$ es un espacio de Hausdorff, localmente compacto. La compactación de Alexandroff es entonces la única compactación de Hausdorff por un punto de $S(A)$, ver [5]. En esta sección probaremos que $S(A')$ es la compactación de Alexandroff de $S(A)$. En otras palabras, en el caso booleano, es lo mismo adjuntar unidad y construir el espectro que construir el espectro y luego compactar por un punto.

Proposición 4.1. La función

$$\begin{aligned}
f : S(A) &\longrightarrow S(A') - \{A\} \\
I &\mapsto (F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\})
\end{aligned}$$

donde $F = A - I$, es una biyección.

Demostración. f es inyectiva: Si $f(I_1) = f(I_2)$, entonces $F_1 = F_2$ y así $I_1 = I_2$. f es sobre: Dado $J \in Y$ sabemos que $F = \{b \in A | (b, 1) \in J\}$ es un filtro maximal. Si $I = A - F$ tenemos que $f(I) = J$. $\square$

Proposición 4.2. La función f es un homeomorfismo de $S(A)$ sobre $S(A') - \{A\}$.

Demostración. f es continua. Consideremos un abierto básico de $S(A')$, éste es de la forma $D(a, \alpha)$ con $\alpha = 1$, ó, $\alpha = 0$. Veamos que $f^{-1}(D(a, 0)) = D(a)$ y $f^{-1}(D(a, 1)) = D(a)^c$: (En lo que sigue $F = A - I$).

$$
\begin{aligned}
I \in f^{-1}(D(a,0)) &\Longleftrightarrow f(I) \in D(a,0) \\
&\Longleftrightarrow (a,0) \notin f(I) \\
&\Longleftrightarrow a \notin F^c \\
&\Longleftrightarrow a \in F \\
&\Longleftrightarrow a \notin I \\
&\Longleftrightarrow I \in D(a).
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
I \in f^{-1}(D(a,1)) &\Longleftrightarrow f(I) \in D(a,1) \\
&\Longleftrightarrow (a,1) \notin f(I) \\
&\Longleftrightarrow a \notin F \\
&\Longleftrightarrow a \in I \\
&\Longleftrightarrow I \in D(a)^c.
\end{aligned}
$$

Veamos que f es abierta.

$$\begin{aligned} J \in f(D(a)) &\Longleftrightarrow f^{-1}(J) \in D(a) \\ &\Longleftrightarrow a \notin f^{-1}(J) = I \\ &\Longleftrightarrow a \in F \text{ con } F = A - I \\ &\Longleftrightarrow (a,1) \in (F \times \{1\}) \cup (F^c \times \{0\}) = J \\ &\Longleftrightarrow J \in D(a,1)^c \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 4.3. $S(A)$ es denso en $S(A')$.

Demostración. Identificaremos aquí a $S(A)$ con su imagen mediante f. Como $S(A) \subseteq S(A') = S(A) \cup \{A\}$, al calcular la adherencia de $S(A)$ tenemos dos opciones, que sea $S(A)$ o que sea $S(A')$. Si suponemos que $\overline{S(A)} = S(A)$ entonces $\{A\}$ es un abierto, luego contiene a un abierto básico. Como es un conjunto unitario, debe tenerse que $\{A\} = D(a, \alpha)$. Veamos que esto no puede ser cierto. Si $A \in D(a, \alpha)$, $(a, \alpha) \notin A$, luego $\alpha = 1$.
Estamos considerando $D(a,1) = \{J \in S(A') | (a,1) \notin J\}$. El propósito es mostrar que $D(a,1) \neq \{A\}$ para todo $a \in A$. Dado $a \in A$, existe I_0 un ideal maximal de A que contiene a a. Así $a \notin F_0 = A - I_0$ y $(a,1) \notin (F_0 \times \{1\}) \cup (F_0^c \times \{0\}) = J_0$, es decir $J_0 \in D(a,1)$ y $J_0 \neq A$.
Concluimos que $\overline{S(A)} = S(A')$. $\square$

Como $S(A)$ es homeomorfo a $S(A') - \{A\}$, $S(A)$ es denso en $S(A')$ y este último es compacto, pues A' es un anillo de Boole con unidad, podemos deducir inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema 4.4. Si A es un anillo de Boole sin unidad entonces $S(A')$ es la compactación de Alexandroff de $S(A)$.

Agradecimientos

Los autores agradecen los valiosos comentarios del referee que permitieron simplificar algunos de los argumentos utilizados en este trabajo.

Referencias

[1] ACOSTA L. y otros, *Una aproximación booleana a la topología general,* IV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1987.

[2] ACOSTA L., *El funtor espectro: Un puente entre álgebra y topología*, XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2003.

[3] BALBES R., DWINGER P., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[4] HOCHSTER M., *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **142**, 1969, 43-60.

[5] MURDESHWAR M. G., *General Topology*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1983.

RECIBIDO: Agosto de 2007. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Noviembre de 2007