Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIV No. 1 (2007), pp. 30–37

NUEVAS IDENTIDADES ELEMENTALES CON LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

JESÚS ANTONIO AVILA G. (*)

RESUMEN. En esta nota se usan algunos conceptos del álgebra lineal como producto interno, traza y determinantes de matrices, para obtener algunas propiedades elementales de los números de Fibonacci. Inicialmente se conjeturan dichas propiedades a partir de casos particulares y finalmente se presentan pruebas formales de las mismas.

PALABRAS CLAVES. Números de Fibonacci, producto punto, traza de una matriz, determinante de una matriz.

ABSTRACT. In this paper we present some properties of Fibonacci numbers, using some mathematical notions as dot product, trace of a matrix and determinant of a matrix. Initially we conjecture some properties from elementary linear algebra notions, and then, we present formal proofs of these properties.

KEY WORDS AND PHRASES. Fibonacci numbers, dot product, trace of a matrix, determinant of a matrix.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 11B39.

1. Introducción

La sucesión de Fibonacci fue introducida por Leonardo de Pisa en el año 1202, en su obra titulada "Liber Abacci". Desde el origen de esta sucesión han sido innumerables las propiedades y curiosidades encontradas, además de su relación con otras áreas del conocimiento como biología, economía y computación, entre otras [13,14]. Ahora bien, en la mayoría de trabajos y artículos sobre el tema, las propiedades son presentadas como un resultado final, olvidando el proceso

(*) Jesús Antonio Avila G. Profesor Depto. de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima (Col.) E-mail: javila@ut.edu.co.

mediante el cual se obtuvieron las mismas. Entonces, es natural preguntarse ¿Cómo pueden obtenerse propiedades de la sucesión de Fibonacci?. Una respuesta parcial a este interrogante es lo que se pretende dar en esta nota, cuyo objetivo principal es mostrar de manera didáctica el uso de algunos conceptos del álgebra lineal para obtener algunas propiedades elementales de los números de Fibonacci. Inicialmente estas propiedades son llamadas conjeturas, pues son obtenidas de la observación de casos particulares. Finalmente se presentan las demostraciones formales de las mismas, con lo cual se prueba que son realmente identidades o propiedades Fibonacci.

2. Preliminares

En esta sección se presenta la definición formal de los números de Fibonacci y algunas de sus propiedades. Estas serán utilizadas en algunas demostraciones de la sección 4.

Se conoce como números de Fibonacci a los elementos de la sucesión (sucesión de Fibonacci) dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3\dots$ y donde el término n-ésimo está dado por la suma de los dos anteriores, es decir, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Entre algunas de las muchas propiedades de esta sucesión, se pueden citar:

$$\begin{array}{rl}
\text{Identidad de Catalan:} & F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2 \\
\text{Identidad de d'Ocagne:} & F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{m-n} \\
\text{Identidad de Gelin-Cesàro:} & F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1 \\
\text{Identidad de Cassini:} & F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \\
\text{Identidad de Honsberger:} & F_{k+n} = F_{k-1}F_m + F_kF_{m+1}
\end{array}$$

La última identidad es solo una de las muchas debidas a Honsberger [7], sin embargo en este trabajo será identificada así. Un estudio detallado de los números de Fibonacci, su relación con los números de Lucas, propiedades geométricas, curiosidades y aplicaciones se encuentra en [2], [4], [5], [6] y [12]. Igualmente pueden consultarse algunas nociones matemáticas que provienen de esta sucesión, como funciones hiperbólicas de Fibonacci [11], Polinomios de Fibonacci [10], Q-matrices de Fibonacci [7], Geometría de Fibonacci [1].

3. Las Conjeturas

En este numeral se utilizan nociones matemáticas como producto interno, traza y determinantes de matrices para inferir "posibles" propiedades de los números de Fibonacci. Estas serán llamadas conjeturas.

Caso 3.1. Considérense las siguientes parejas ordenadas $(1,2)$, $(3,5)$, $(8,13)$, $(55,89)$; donde cada pareja consiste de un número de Fibonacci y su consecutivo. Al realizar algunos productos internos entre estas parejas se obtiene

$$\begin{aligned}(1,2)\cdot(3,5) &= 3+10=13\\(3,5)\cdot(8,13) &= 24+65=89\\(8,13)\cdot(55,89) &= 440+1157=1597\end{aligned}$$

Obsérvese que el producto interno de esas parejas da como resultado un número de Fibonacci. Así tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 3.1. Dadas las parejas de números de Fibonacci (F_n, F_{n+1}) y (F_m, F_{m+1}), se tiene que $(F_n, F_{n+1})\cdot(F_m, F_{m+1}) = F_{n+m+1}$, o equivalentemente $F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} = F_{n+m+1}$.

Caso 3.2. Considérense las matrices

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3\\5&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&5\\8&13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&8\\13&21\end{bmatrix}$$

donde las entradas de cada una de ellas son números de Fibonacci consecutivos, ordenados por filas. Al calcular la traza de cada una de estas matrices, se obtiene respectivamente 4, 6, 10, 16, 26. Y obsérvese que cada uno de estos valores es igual al doble del número de Fibonacci que se encuentra en la esquina inferior izquierda.

Conjetura 3.2. $tr\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1}\\F_{n+2} & F_{n+3}\end{bmatrix} = 2F_{n+2}$, es decir, $F_n + F_{n+3} = 2F_{n+2}$. En otros términos se podría decir que dados cuatro números de Fibonacci consecutivos, el primero más el último es igual a dos veces el tercero.

Cual será el resultado cuando se considera la traza de matrices de orden superior?

Caso 3.3. Considérense las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\3&5&8\\13&21&34\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3&5\\8&13&21\\34&55&89\end{bmatrix},\begin{bmatrix}55&89&144\\233&377&610\\987&1597&2584\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}377&610&987\\1597&2584&4181\\6765&10946&17711\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2584&4181&6765\\10946&17711&28657\\46368&75025&121393\end{bmatrix}$$

Al calcular la traza de cada una de ellas, se obtiene respectivamente 40, 104, 3016, 20672, 141688. Y obsérvese la siguiente relación: $40 = 8\times5$, $104 = 8\times13$, $3016 = 8\times377$, $20672 = 8\times2584$, $141688 = 8\times17711$. Por lo cual, la traza de estas matrices al parecer es igual a 8 veces el número de Fibonacci que está en el centro.

Conjetura 3.3. $tr \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+5} \\ F_{n+6} & F_{n+7} & F_{n+8} \end{bmatrix} = 8F_{n+4}$, o equivalentemente $F_n + F_{n+8} = 7F_{n+4}$.

Caso 3.4. Considere las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 & 2584 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 & 610 \\ 987 & 1597 & 2584 & 4181 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 & 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 & 2584 \\ 4181 & 6765 & 10946 & 17711 \end{bmatrix}$$

La traza de cada una de ellas es respectivamente 1085, 2840, 4595 y 19465. Y obsérvese que todos estos valores son divisibles por 5.

Conjetura 3.4. $tr \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & F_{n+7} \\ F_{n+8} & F_{n+9} & F_{n+10} & F_{n+11} \\ F_{n+12} & F_{n+13} & F_{n+14} & F_{n+15} \end{bmatrix} = 5k$, ó equivalentemente $F_n + F_{n+5} + F_{n+10} + F_{n+15} = 5k$.

Ahora se usarán los determinantes.

Caso 3.5. Considérense las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55 & 89 \\ 144 & 233 \end{bmatrix}$$

Al hallar el determinante de cada una de ellas, se obtiene respectivamente $1, -1, 1, -1, 1$. Entonces, al parecer el determinante de toda matriz 2x2 cuyas entradas son números de Fibonacci consecutivos es 1 ó -1.

Conjetura 3.5. $\det \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1}$, es decir, $F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = (-1)^{n+1}$. En otros términos, dados cuatro números de Fibonacci consecutivos, el primero multiplicado por el último menos el segundo multiplicado por el tercero es igual a ± 1.

Ahora se considerarán determinantes de matrices 2x2, donde las entradas son números de Fibonacci no consecutivos.

Caso 3.6. De las matrices del Caso 3.3, se obtienen las siguientes matrices de orden 2x2 extrayendo las entradas que están en las esquinas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 34 & 89 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55 & 144 \\ 987 & 2584 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 377 & 987 \\ 6765 & 17711 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2584 & 6765 \\ 46368 & 121393 \end{bmatrix}$$

Al calcular el determinante de estas matrices, se obtiene respectivamente $8, -8, 8, -8, 8$.

Conjetura 3.6. $\det \begin{bmatrix} F_n & F_{n+2} \\ F_{n+6} & F_{n+8} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1}8$, ó equivalentemente $F_nF_{n+8} - F_{n+2}F_{n+6} = (-1)^{n+1}8$.

Caso 3.7. Multiplicando cada número de Fibonacci por su consecutivo, se tiene la sucesión $1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, ...$ y tomando las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 15 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 40 & 104 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 & 40 \\ 104 & 273 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 & 104 \\ 273 & 714 \end{bmatrix}$$

se obtienen como determinantes 3, -10, 24, -65, 168 respectivamente. Valores que se pueden escribir como $(-1)^2 2^2 - 1, (-1)^3 3^2 - 1, (-1)^4 5^2 - 1, (-1)^5 8^2 - 1, (-1)^6 13^2 - 1$.

Conjetura 3.7. $\det \begin{bmatrix} F_nF_{n+1} & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+2}F_{n+3} & F_{n+3}F_{n+4} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1}F_{n+2}^2 - 1$, o equivalentemente $F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4} - F_{n+1}F_{n+2}^2F_{n+3} = (-1)^{n+1}F_{n+2}^2 - 1$.

Caso 2.8. Elevando al cuadrado cada número de Fibonacci, se obtiene la sucesión $1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, ...$ y tomando las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 25 & 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 64 & 169 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 & 64 \\ 169 & 441 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 64 & 169 \\ 441 & 1156 \end{bmatrix}$$

se obtienen como determinantes $5, -11, 31, -79, 209, -545$ respectivamente. Obsérvese que aparentemente no hay un patrón que permita inferir una posible propiedad (diferente a que son números impares). Ahora, al tomar las matrices cuyas entradas son el mismo número de Fibonacci en la diagonal principal y en los otros lugares sus dos consecutivos, se obtienen como determinantes $-1, -5, -11, -31, -79, -209, -545$ respectivamente. Entonces, bien podría conjeturarse que $(-1)^n \det \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & F_{n+1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 \\ F_{n+2}^2 & F_{n+3}^2 \end{bmatrix}$. Sin embargo al evaluar valores de n mayores o iguales a 20, esta igualdad ya no es cierta!!, pero entonces se tiene una curiosidad más de los números de Fibonacci, pues $\dfrac{F_n^2 F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2 F_{n+2}^2}{F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_{n+3}} = (-1)^n$, para $1 \leq n \leq 19$.

4. Demostraciones de las Conjeturas

En esta sección se demuestran las conjeturas encontradas en la sección anterior, mostrándose así que todas ellas son identidades Fibonacci. Las conjeturas 3.1 y 3.5 son de hecho casos particulares de la identidad de Honsberger y de la identidad de d'Ocagne, para $k - 1 = n$ y $m = n + 1$ respectivamente. Para probar la conjetura 3.2, basta observar que $F_n + F_{n+3} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} = 2F_{n+2}$.

Demostración Conjetura 3.3. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ se tiene que $F_1 + F_9 = 1 + 34 = 7F_5$. Supóngase que la igualdad es válida para algún n. Debemos probar que es válida para $n + 1$. De la hipótesis de inducción se tiene que $F_n + F_{n+8} = 7F_{n+4}$, entonces sumando $7F_{n+3}$ a ambos lados de la igualdad se obtiene $7F_{n+5} = F_n + F_{n+8} + 7F_{n+1} + 7F_{n+2} = F_{n+1} + F_n + F_{n+1} + 7F_{n+2} + 5F_{n+1} + F_{n+8} = F_{n+1} + F_{n+2} + 7F_{n+2} + F_{n+1} + 4F_{n+1} + F_{n+8} = F_{n+1} + F_{n+3} + 7F_{n+2} + 4F_{n+1} + F_{n+8} = F_{n+1} + 5F_{n+3} + 3F_{n+2} + F_{n+8} = F_{n+1} + 2F_{n+3} + 3F_{n+4} + F_{n+8} = F_{n+1} + F_{n+4} + 2F_{n+5} + F_{n+8} = F_{n+1} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+8} = F_{n+1} + F_{n+9}$.▲

Demostración Conjetura 3.4. Utilizando la identidad de Honsberger se obtiene que

$$\begin{aligned} F_{n+5} &= 3F_n + 5F_{n+1} \\ F_{n+10} &= 34F_n + 55F_{n+1} \\ F_{n+15} &= 377F_n + 610F_{n+1} \end{aligned}$$

Así, $F_n + F_{n+5} + F_{n+10} + F_{n+15} = 415F_n + 670F_{n+1}$ y este resultado es de la forma $5k$, con $k = 83F_n + 134F_{n+1}$.▲

Demostración Conjetura 3.6. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ se tiene que $F_1F_9 - F_3F_7 = 8$. Supóngase que la igualdad es válida para algún n.

Debemos probar que es válida para $n+1$. De la hipótesis de inducción se tiene que $F_nF_{n+8} - F_{n+2}F_{n+6} = (-1)^{n+1}8$, entonces multiplicando por -1 a ambos lados de la igualdad se obtiene $F_{n+2}F_{n+6} - F_nF_{n+8} = (-1)^{n+2}8$. Entonces, $(-1)^{n+2}8 = (F_n + F_{n+1})F_{n+6} - F_n(F_{n+6} + F_{n+7}) = F_{n+1}F_{n+6} - F_nF_{n+7}$. Ahora sumando y restando $2F_{n+1}F_{n+7}$ en el lado derecho de la última igualdad, se obtiene que $(-1)^{n+2}8 = F_{n+1}F_{n+6} - F_nF_{n+7} + F_{n+1}F_{n+7} + F_{n+1}F_{n+7} - F_{n+1}F_{n+7} - F_{n+1}F_{n+7}$. Así, se obtiene finalmente que $(-1)^{n+2}8 = F_{n+1}(F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+7}) - F_{n+7}(F_n + F_{n+1} + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+9} - F_{n+7}F_{n+3}$.▲

Demostración Conjetura 3.7. Aplicando la identidad de Gelin-Cesàro y luego la identidad de Cassini en la parte izquierda de la igualdad se tiene, $F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4} - F_{n+1}F_{n+2}^2F_{n+3} = F_{n+2}^4 - 1 - F_{n+1}F_{n+2}^2F_{n+3} = F_{n+2}^2(F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3}) - 1 = (-1)^{n+1}F_{n+2}^2 - 1$.▲

5. Comentarios Finales

Como se ha mostrado en esta nota, es posible encontrar propiedades de los números de Fibonacci usando nociones matemáticas elementales. Sin embargo es importante notar que para inferir una propiedad se deben observar muchos casos particulares, preferiblemente usando algún programa computacional. El paso siguiente es definir la conjetura y finalmente se debe dar una prueba formal de la misma, para ser llamada propiedad o identidad Fibonacci. Por ejemplo al considerar matrices de orden 5x5 y 7x7 como en el Caso 3.3, se tiene que la traza de estas matrices es respectivamente 341 y 105937 veces el número de Fibonacci del centro de la matriz. Pero este resultado es una conjetura, por lo que sería interesante determinar si estas son realmente identidades Fibonacci y encontrar cómo varían estas constantes respecto al orden (impar) de la matriz.

Referencias

[1] V. Atanassova, A. G. Shannon, J. C. Turner, K. T. Atanassov, *New Visual Perspectives on Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2002.

[2] A. Brousseau, *Fibonacci Numbers and Geometry*, Fib. Quart., 10(1972), 303-318.

[3] N. D. Cahill, J. R. D'Errico, D. A. Narayan and J. Y. Narayan, *Fibonacci Determinants*, The College Mathematical Journal, 33 (3)(2002), 221-225.

[4] A. Fuentes, *Desarrollo en Fracción Continua Infinita de las Potencias Enteras del Número de Oro*, Educación Matemática, 3(1991), 19-38.

[5] M. Gardner, *Miscelánea Matemática*, Salvat Editores, Barcelona, 1987.

[6] P. Hilton and J. Pedersen, *A Note on a Geometrical Property of Fibonacci Numbers*, Fib. Quart. 32(1994), 386-388.

[7] R. Honsberger, *Mathematical Gems III*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1985.

[8] R. Jiménez y otros, *Teoría de Números para Principiantes*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1999.

[9] B. Johnson, *Fibonacci Identities by Matrix Methods and Generealisation of Related Sequences*, september (2006). http//maths.dur.ac.uk/ ˜dma0rcj/PED/ fib.pdf.

[10] M. N. S. Swamy, *Further Properties of Morgan-Voyce Polynomials*, Fib. Quart., 6(1968), 167-175.

[11] Z. W. Trzaska, *On Fibonacci Hyperbolic Trigonometry and Modified Numerical Triangles*, Fib. Quart., 34(1996), 129-138.

[12] N. N. Vorobyov, *Los Números de Fibonacci*, Limusa, México, 1988.

[13] Página Web: http : //mathworld.wolfram.com /FibonacciNumber. html, Fecha de Consulta: Septiembre de 2006.

[14] Página Web: http : //www.mcs.surrey.ac.uk /Personal/R.Knott /Fibonacci/ fibpi.html, Fecha de Consulta: Septiembre de 2006.

Recibido: Abril de 2007. Aceptado para publicación: Julio de 2007