



# Procedimientos gráficos para obtener expresiones analíticas del estado estacionario y de las condiciones de estabilidad

GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS\*, RENÉ GALINDO OROZCO\*\*, JESÚS DE LEÓN MORALES\*

**P**ara estudiar el comportamiento dinámico de un sistema físico se ha recurrido a principios físicos que describen sus características esenciales. Estas características se han representado mediante un modelo matemático, con el fin de estudiar sus propiedades. La descripción por ecuaciones diferenciales es una herramienta que se ha utilizado por mucho tiempo para representar estos sistemas. De hecho, muchos principios físicos que describen dicho comportamiento están escritos en ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Además, la teoría de ecuaciones diferenciales ha tenido un desarrollo extraordinario, el cual, combinado con el desarrollo tecnológico alcanzado por las computadoras, ha permitido que el estudio sistemático de sistemas dinámicos alcance desarrollos nunca antes vistos. Sin embargo, al desarrollar modelos matemáticos para estos sistemas, numerosos fenómenos y principios están "escondidos" dentro del conjunto de ecuaciones, lo que dificulta su interpretación, y sólo con un conocimiento profundo es posible analizar y entender el comportamiento dinámico del sistema, así como las causas que lo generan a partir de dichas ecuaciones. Esta dificultad se reduce considerablemente mediante técnicas gráficas. Una de estas técnicas para modelar sistemas dinámicos es Bond

Graph,<sup>1</sup> que se basa en la preservación de la energía y permite representar con un mínimo número de símbolos los diferentes elementos del sistema, sus interacciones energéticas y las relaciones de causa-efecto. Otra técnica es la representación por grafos, que resalta en la conexión de los elementos y las ganancias entre puntos de conexión.

Un modelo representado por Bond Graph es de un sistema dinámico donde una colección de componentes intercambian energía unos con otros, a través de puertos de energía. La importancia de los modelos en Bond Graph estriba en que se puede representar una gran variedad de medios de energía (eléctrica, hidráulica, térmica, etc.) con el mismo conjunto de símbolos, y se puede describir cómo la potencia fluye a través del sistema.<sup>1,2</sup> Las técnicas de Bond Graph fueron introducidas por Paynter, y la idea fue desarrollada posteriormente por Karnopp y Rosenberg como una poderosa herramienta de modelado. Nuevas aplicaciones de esta técnica han surgido, por ejemplo, algunas aplicaciones a la teoría de control se presentan en Gawthrop y Karnopp.<sup>2</sup> Por consecuencia, los modelos en Bond Graph fueron una nueva alternativa para el estudio de sistemas dinámicos, en particular para analizar o

\*Facultad de Ingeniería Eléctrica. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

\*\*Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL.

diseñar estrategias de control en el medio físico, esto es, con variables y parámetros que tienen interpretación física.

Se presentan dos procedimientos gráficos que permiten obtener expresiones analíticas del estado estacionario y de las condiciones de estabilidad del sistema en lazo abierto o en lazo cerrado, para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) multientrada multisalida (MIMO). No se requiere invertir algebraicamente la matriz de estado del sistema para encontrar gráficamente expresiones analíticas del estado estacionario. El procedimiento propuesto es útil en general para aquellos problemas que requieran inversión de matrices, como la solución de ecuaciones algebraicas o algunas técnicas de control por modos deslizantes. Por otra parte, un sistema LTI MIMO es representado mediante un grafo lineal. Con técnicas de teoría de grafos se reduce este grafo a otro que representa una matriz de Coates.<sup>4</sup> Esto permite encontrar el polinomio característico gráficamente y dar expresiones analíticas para las condiciones de estabilidad, lo cual es útil para analizar la estabilidad de matrices dispersas. El grafo propuesto se puede interpretar como una estructura de unión,<sup>1</sup> elemento básico en las técnicas de Bond Graph. Así se establece un puente entre la teoría de grafos y las técnicas de Bond Graph.

A continuación se da una breve introducción de los elementos de modelado en Bond Graph, y se plantea un procedimiento para obtener la respuesta en estado estacionario de un sistema, basado en un modelo en Bond Graph en causalidad derivativa.<sup>1</sup> Posteriormente se propone un procedimiento para determinar las condiciones de estabilidad de un sistema basado en un grafo de Coates, esto es, en la representación gráfica de una matriz. Los procedimientos propuestos se ilustran mediante ejemplos.

## Modelado en Bond Graph

Se introducen algunos de los conceptos fundamentales para la obtención de un modelo en Bond

Graph.<sup>1,2</sup> Considérese el esquema de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), como se muestra en la figura 1, donde  $(MS_e, MS_f)$ ;  $L$ ,  $C$  y  $R$  denotan los *campos de fuente*, de *almacenamiento* y de *disipación*, respectivamente,  $D$  el detector; y  $(0, 1, TF, GY)$  representan la *estructura de unión* con transformadores,  $TF$ , giradores,  $GY$ , uniones-0 y uniones-1. Los vectores clave están representados en la figura 1, donde  $u(t) \in \mathfrak{R}^p$  es la entrada, los estados  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  que están constituidos de variables de energía, el momento generalizado  $p(t)$  en elementos  $L$ , y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos  $C$ , en causalidad integral;  $z(t) \in \mathfrak{R}^n$  son variables de coenergía en causalidad integral,  $D_{in}(t) \in \mathfrak{R}^r$  y  $D_{out}(t) \in \mathfrak{R}^r$  son una mezcla de esfuerzos y de flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión.

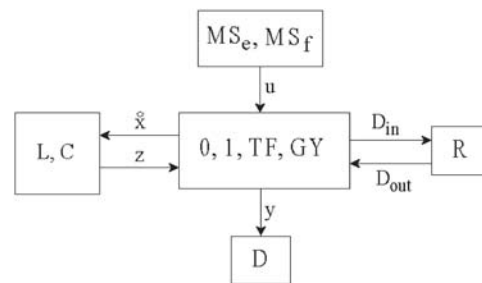


Fig. 1. Representación de un Bond Graph.

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$\begin{aligned} z(t) &= Fx(t) \\ D_{out}(t) &= LD_{in}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Asignando una causalidad integral predefinida, las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Los elementos de la estructura de unión toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$  donde  $n$  y  $r$  son los módulos de transformadores

y de giradores;  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas,  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$ , y viceversa. La dinámica del sistema en variables de estado está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) + D_p u(t)\end{aligned}\quad (3)$$

donde cada matriz se relaciona con los elementos de la estructura de unión por:

$$\begin{aligned}A_p &= (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\ B_p &= S_{13} + S_{12}MS_{23} \\ C_p &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \\ D_p &= S_{33} + S_{32}MS_{23}\end{aligned}\quad (4)$$

siendo  $M = (I - LS_{22})^{-1}L$ .

## Estado estacionario en Bond Graph

La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado de un sistema físico, en una representación en espacio de estado, cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el teorema de Valor final a (3) se puede determinar el valor de estado estacionario de la respuesta de un sistema. Así, el estado estacionario de  $v(t)$  está dado por:

$$v_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sv(s)] \quad (5)$$

Suponiendo que  $A_p$  es invertible, aplicando (5) a (3) tenemos:

$$\begin{aligned}x_{ss} &= -A_p^{-1}B_p u_{ss} \\ y_{ss} &= (D_p - C_p A_p^{-1}B_p)u_{ss}\end{aligned}\quad (6)$$

Así, utilizando (6) podemos calcular el estado estacionario, pero necesitaríamos calcular  $A_p^{-1}$ , lo cual resulta laborioso o complicado para sistemas de alto orden o en lazo cerrado.

Se puede resolver directamente el problema de obtener  $A_p^{-1}$  en (6) utilizando el modelo en Bond Graph en causalidad derivativa del sistema físico. Así, asignando una causalidad derivativa en el modelo de Bond Graph, las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{ind}(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ D_{out}(t) &= L_d D_{ind}(t)\end{aligned}\quad (7)$$

cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{aligned}z(t) &= A_p^* \dot{x}(t) + B_p^* u(t) \\ y_d(t) &= C_p^* \dot{x}(t) + D_p^* u(t)\end{aligned}\quad (8)$$

donde:

$$\begin{aligned}A_p^* &= J_{11} + J_{12}NJ_{21} \\ B_p^* &= J_{13} + J_{12}NJ_{23} \\ C_p^* &= J_{31} + J_{32}NJ_{21} \\ D_p^* &= J_{33} + J_{32}NJ_{23}\end{aligned}\quad (9)$$

siendo  $N = (I - L_d J_{22})^{-1}L_d$ .

Las ecuaciones de estado de este sistema en causalidad integral están dadas por (3). Así, si  $y_d(t) = y(t)$ , entonces, de (1), (3) y (8) se tiene:

$$\begin{aligned}A_p^* &= FA_p^{-1} \\ B_p^* &= -FA_p^{-1}B_p \\ C_p^* &= C_p A_p^{-1} \\ D_p^* &= D_p - C_p A_p^{-1}B_p\end{aligned}\quad (10)$$

Las expresiones previas nos indican la relación existente entre las variables de estado del sistema representado en Bond Graph en causalidad integral y en causalidad derivativa.

De (6) y (10) obtenemos el estado estacionario dado por:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}x_{ss} &= F^{-1}B_p^* u_{ss} \\ y_{ss} &= D_p^* u_{ss}\end{aligned}\quad (11)$$

La ecuación (11) presenta una herramienta poderosa para obtener la respuesta de estado estacionario de un sistema dinámico modelado en Bond Graph de manera gráfica.

Dado un modelo en Bond Graph que representa a un sistema físico, a continuación se presenta un procedimiento para obtener una representación de un grafo lineal.

### Estado estacionario en Bond Graph

Dado un sistema LTI-MIMO, se obtiene utilizando (1) y (2) la siguiente estructura de unión:<sup>3</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde  $S'_{11} \square S_{11}F$ ;  $S'_{21} \square S_{21}F$ ;  $S'_{31} \square S_{31}F$ ;  $S'_{12} \square S_{12}L$ ;  $S'_{22} \square S_{22}L$ ;  $S'_{32} \square S_{32}L$ .

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo suponemos que (12) representa una matriz de Coates, cuyo grafo se muestra en la figura 2.

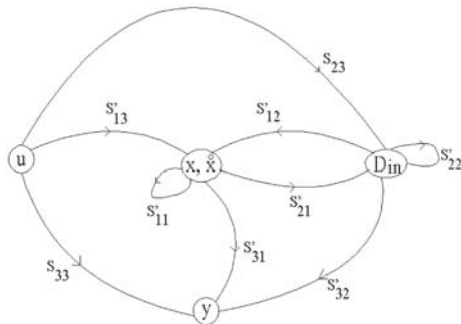


Fig. 2. Grafo de Coates modificado.

Nótese que en el grafo de la figura 2 los elementos denotados con (') incluyen la interconexión y relaciones constitutivas de los elementos  $z(t)$  y  $D_{out}(t)$ .

La representación (12) es una estructura más compacta del sistema físico. Podemos reescribir la ecuación (12) en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde  $\dot{x}(t) \square dx(t)/dt$  no afecta la interconexión de los elementos en sistemas LTI, la matriz  $\tilde{S}$  representa una matriz de Coates modificada.

En el esquema mostrado en la figura 2, los nodos  $\dot{x}(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  y  $D_{in}(t)$  son vectores. La figura 3 representa la interconexión de dos nodos 1 e i con todas las posibles combinaciones. En la figura

3, los coeficientes  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{ii}$ ,  $\alpha_{1i}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{ii}$ ,  $\gamma_{1i}$ ,  $\gamma_{i1}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{ii}$ ,  $\beta_{1i}$ ,  $\beta_{i1}$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{ii}$ ,  $P_{1i}$  y  $P_{i1}$ , denotan las transmitancias de las ramas, esto es:

$$P (I - S'_{22})^{-1} \quad (14)$$

De la submatriz  $P$  resultan dos casos: a) cuando algún elemento del campo de almacenamiento se tiene antes que algún elemento del campo de disipación, visto desde la fuente, así  $S'_{22} \neq 0$ ; b) en caso contrario  $S'_{22} = 0$ .

A continuación se presenta un procedimiento gráfico y sencillo para obtener las condiciones de estabilidad del sistema físico basado en la Teoría de Grafos. Esta metodología no requiere del conocimiento de la función de transferencia del sistema o su realización  $(A_p, B_p, C_p, D_p)$ .

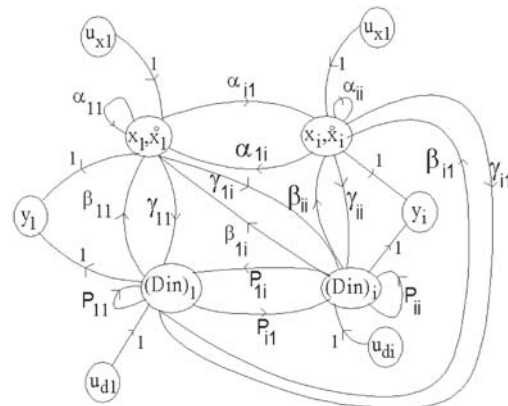


Fig. 3. Grafo de dos nodos del sistema.

### Obtención del polinomio característico

De la Teoría de control para sistemas lineales se sabe que la estabilidad de un sistema lineal se determina del conocimiento del polinomio característico. Este polinomio puede ser encontrado con una gráfica de Coates. Sin pérdida de generalidad, y despreciando las entradas y las salidas del grafo de la figura 3, se obtiene la matriz del grafo de Coates  $A_{pc}$  y su polinomio característico<sup>4</sup> está dado por:

$$\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \left[ \sum_{A_{pc}[V_k]} \sum_u (-1)^{L_h} f(h_{uk}) \right] \quad (15)$$

donde  $L_h$  es el número de circuitos dirigidos<sup>4</sup> en

$h_{uk}$  y  $h_{uk}$  son los  $u^{th}$  factores-1 en  $A_{pc}[V_k]$ , siendo  $A_{pc}[V_k]$  un grafo seccional<sup>4</sup> de  $k$ -nodos de  $A_{pc}$ .

En la siguiente sección se presentan procedimientos para la obtención de las condiciones de estabilidad empleando grafos lineales en el sentido de Hurwitz.<sup>5</sup>

### Obtención de las condiciones de estabilidad

A continuación se presenta un procedimiento para la construcción de un grafo lineal, denominado *Grafo de Estabilidad de Coates*,  $G_c(D)$ , que representa a la matriz de Hurwitz y al polinomio característico.

#### Procedimiento 1

1) Sea el polinomio característico:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n\lambda^0 = 0$$

con  $a_0 = 1$ .

2) El número de nodos del sistema correspondiente es igual al orden del polinomio.

Cada nodo tiene un lazo propio como se muestra en la figura 4.

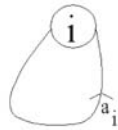


Fig. 4. Lazo propio de un nodo.

3) Considérense ramas entre nodos diferentes utilizando las figuras 5 y 6.

Ramas a la derecha. Inicialmente  $j = 1$  y  $h = 0$ .

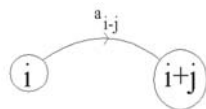


Fig. 5. Ramas a la derecha.

Para  $i = j, 1/4, k$ ; donde  $k = n - 2j + h, \forall i \pm k$ .

Si  $i = k$ , entonces  $j \leftarrow j + 1$  y  $h \leftarrow h + 1$  y se incrementa  $j$  mientras  $j < k$ , donde  $x \leftarrow y$  denota que el valor de  $y$  es asignado a  $x$ .

Ramas a la izquierda. Inicialmente  $j = 1$  y  $h = 0$ .

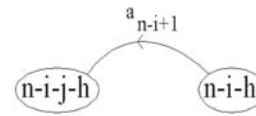


Fig. 6. Ramas a la izquierda.

Para  $i = j, \dots, k$ ; donde  $k = n - j - 1 - h, \forall i \pm k$ .

Si  $i = k$ , entonces  $j \leftarrow j + 1$  y  $h \leftarrow h + 1$  y se incrementa  $j$  mientras  $j < k$ .

4) El grafo  $G_c(D)$  representa un grafo de Coates de la matriz de Hurwitz. Así, se pueden encontrar las condiciones de estabilidad con el criterio de Hurwitz.

A partir de la Teoría de Grafos, el determinante de Hurwitz<sup>4</sup>  $D_n$  está dado por:

$$\det D = D_n = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \quad (16)$$

donde  $h$  es un factor-1 en  $G_c(D)$ ,  $L_h$  denota el número de circuitos dirigidos en  $h$ , y  $f(h)$  representa el producto de los pesos asociados con las ramas de  $h$ .

Para encontrar los  $n$  determinantes requeridos, a partir del Criterio de Hurwitz, se propone el siguiente procedimiento.<sup>5</sup>

#### Procedimiento 2

1) Calcular  $D_n$  de (16).

2) El determinante  $D_{n-1}$  se obtiene removiendo el nodo  $n$  del grafo  $G_c(D)$ , y aplicando (16) para este subgrafo de  $G_c(D)$ , que tiene  $n - 1$  nodos.

3) Remover el nodo  $n - 1$  del subgrafo de  $G_c(D)$  del paso 2, y usando (16) calculamos  $D_{n-2}$ ; y así sucesivamente hasta obtener  $D_1$ .

#### Ejemplo

Considérese el esquema de un motor de CD y su Bond Graph, los cuales se muestran en la figura 7.

Los vectores clave son:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} \\ D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

La entrada  $u(t) = e_1(t)$  y la salida  $y(t) = f_6(t)$ ; donde  $e_2(t)$  y  $e_3(t)$  denotan voltajes;  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  corrientes en  $L_a$  y  $R_a$ , respectivamente;  $e_6(t)$  y  $e_7(t)$  pares;  $f_6(t)$  y  $f_7(t)$  velocidades en  $J$  y  $f$ , respectivamente;  $p_3(t)$  enlaces de flujo en  $L_a$ ; y  $p_7(t)$  momento rotacional en  $J$ . Las relaciones constitutivas son:  $F \text{ diag } \uparrow/L_a, 1/J \downarrow$ .

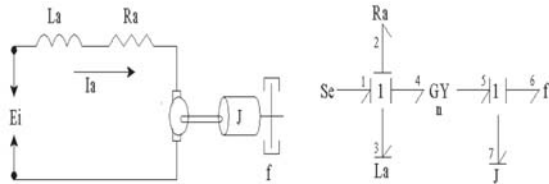


Fig. 7. Esquema de un motor de CD y su Bond Graph.

El estado estacionario de las variables de estado se determina a través del modelo en Bond Graph en causalidad derivativa del sistema que se muestra en la figura 8.

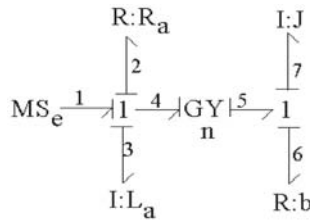


Fig. 8. Bond Graph en causalidad derivativa.

A partir de la figura 8 se determina la estructura de unión del Bond Graph, esto es:

$$J_{11} = J_{12} = J_{21} = J_{22} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; J_{13} = J_{23}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

$$J_{31} = J_{32}^T = \begin{bmatrix} -1/n & 0 \end{bmatrix}; J_{33} = \frac{1}{n} \tag{18}$$

donde  $L_d = L$ ,  $D_{ind} = D_{in}$  y  $D_{outd} = D_{out}$ .

$$\text{Dado que } N = \frac{n^2}{n^2 + fR_a} \begin{bmatrix} R_a & fR_a/n \\ -fR_a/n & f \end{bmatrix}, \text{ de}$$

(11), el estado estacionario de las variables de estado

está dado por:

$$x_{ss} = \frac{1}{n^2 + fR_a} \begin{bmatrix} fL_a \\ Jn \end{bmatrix} (e_1)_{ss} \tag{19}$$

La ecuación (19) indica que por medio del modelo en Bond Graph en causalidad derivativa se puede obtener el estado estacionario de las variables de estado en forma simbólica, y su realización en espacio de estados no es requerida.

Por otro lado, asignando una causalidad integral predefinida, la estructura de unión es:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$S_{21} = -S_{12} = I; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \tag{20}$$

El grafo correspondiente a la estructura de unión del sistema se muestra en la figura 9.

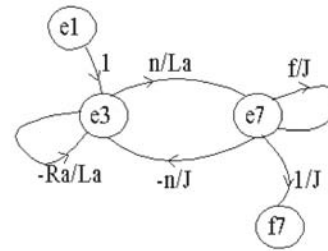


Fig. 9. Grafo de Coates del sistema.

El polinomio característico del sistema es  $\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ , donde los coeficientes pueden ser determinados a partir del subgrafo seccional de la matriz  $A_{pc}$ .

Los factores-1 de  $a_1$  y  $a_2$  se muestran en la figura 9 y están determinados por  $a_1 = R_a / L_a + f / J$ ;  $a_2 = n^2 / (JL_a) + fR_a / (JL_a)$ .

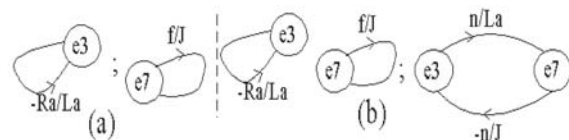


Fig. 10. Factores-1 para: (a)  $a_1$ ; (b)  $a_2$

Aplicando el procedimiento 2, se construye el grafo de estabilidad de Coates que se muestra en la figura 10.

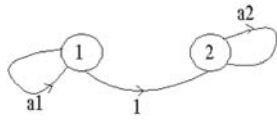


Fig. 10. Grafo de estabilidad de Coates.

Las condiciones de estabilidad se determinan aplicando el procedimiento 2, y están dadas por:

$$R_a / L_a + f / J > 0 \quad \text{y} \quad n^2 / (JL_a) + fR_a / (JL_a) > 0$$

## Conclusiones

Las técnicas de Bond Graph y la teoría de grafos fueron útiles para proponer procedimientos gráficos.

Dado un modelo en Bond Graph de un sistema LTI MIMO, que acepta una causalidad derivativa, los resultados muestran que se puede determinar gráficamente la respuesta en estado estacionario del sistema, sin obtener la inversa de la matriz de estado del sistema.

Además, el grafo de Coates propuesto es una representación gráfica del polinomio característico del sistema, y permite obtener expresiones analíticas de las condiciones de estabilidad en el sentido Hurwitz.

Las expresiones obtenidas dependen de variables y parámetros con interpretación física.

## Resumen

Se presentan procedimientos gráficos para obtener expresiones analíticas de la respuesta en estado estacionario, y de las condiciones de estabilidad de un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph. Con técnicas de teoría de grafos se representa la estructura de unión del sistema por un grafo de Coates modificado, que permite determinar el polinomio característico del sistema. Se propone un grafo de estabilidad de Coates del que se obtienen las condiciones de estabilidad. Además, los valores de estado estacionario del sistema en lazo abierto o en lazo cerrado se encuentran directamente en la estructura de unión de su modelo en Bond Graph en causalidad derivativa.

**Palabras clave:** Bond Graph, Grafos de Coates, Estado estacionario, Causalidad derivativa.

## Abstract

Graphical procedures are presented to get analytical expressions of the stationary state response, and of the stability conditions of a LTI MIMO system modeled in Bond Graph. By using graph theory techniques, the junction structure of the system is represented by a modified Coates graph, which allows determining the characteristic polynomial of the system. A Coates stability graph is proposed, from which the stability conditions are obtained. Also, the stationary state values of the system in open or closed loop are obtained directly from the junction structure of its Bond Graph model in derivative causality.

**Keywords:** Bond Graph, Graphs of Coates, Stationary state, Derivative causality.

## Referencias

1. Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg. *System Dynamics: A Unified Approach*, Wiley, John & Sons, April, 1975.
2. C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy. "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems". *J. Franklin Inst.*, vol. 328, No.1 pp. 55-70, 1991.
3. González-A. Gilberto, R. Galindo, J. de León. "A Direct Graph Procedure from Bond Graph for MIMO LTI Systems", 7th Inter. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision, pp. 880-885, Dic., 2002, Singapore.
4. Wai-Kai Chen, *Applied Graph Theory*, North-Holland Publishing, 1976.
5. González-A. Gilberto, R. Galindo, J. de León. "Hurwitz Stability Conditions for a LTI System: A Bond Graph Approach", 9th IEEE Inter. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), pp. 443-448, agosto, 2003, Miedzydroje, Polonia.

6. González-A. Gilberto, R. Galindo. "Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach", MMAR, pp. 1317-1322, agosto, 2003, Miedzdroje, Polonia.

*Recibido: 1 de febrero de 2008*  
*Aceptado: 22 de mayo de 2008*