

ALGUNOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Servio Tulio Eraso C.

En el número uno de esta revista, empezamos por contar en base cinco y llegamos a construir el cuerpo finito $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ de los enteros módulo cinco, que, fácilmente se generalizó al caso de cualquier módulo primo. Es decir, $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ es un cuerpo (finito) siendo p un número primo positivo.

Entre las aplicaciones de esta construcción, analizamos la divisibilidad de cualquier número entero entre siete.

En el presente artículo nos detenemos a considerar varios casos de divisibilidad, los cuales, son de gran utilidad a nivel elemental. Las demostraciones aquí suministradas son de fácil acceso para los profesores de aritmética.

- 1.- Un número entero x es divisible por dos si y sólo si la cifra de las unidades es par. Será divisible por cinco si dicha cifra es cero o cinco.

Sea $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ donde los a_i varían entre cero y nueve. La representación decimal de x , será:

$$x = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$$

de aquí, $x - a_0 = 10(a_1 + a_2 10 + \dots + a_n 10^{n-1})$

ó sea, $x - a_0 = 2 \times 5(a_1 + a_2 10 + \dots + a_n 10^{n-1})$

Entonces, 2 divide a $x - a_0$ ó 5 divide a $x - a_0$. Pero nos interesa el número x .

- a) Para que 2 divida al número x , es necesario y suficiente que a_0 sea múltiplo de 2. Es decir, a_0 pertenece al conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- b) Para que 5 divida al número x , es necesario y suficiente que a_0 pertenezca al conjunto $\{0, 5\}$.

Así, pues, el número 1234 es divisible por 2, pero no por cinco.

El número 2345 es divisible por cinco pero no por dos.

El número 3450 es divisible por dos y a la vez por cinco.

2.- Un entero x es divisible por cuatro si y sólo si el número formado por la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es múltiplo de cuatro. Si dicho número es de la forma 00, 25, 50 ó 75, el entero x es divisible por veinticinco.

Sea $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ donde los a_i varían entre cero y nueve. La representación decimal de x , será:

$$x = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$$

Si al número x le restamos el número formado por las dos últimas cifras, obtenemos un múltiplo de cien. Es de

cir, 100 divide a $x - \overline{a_1 a_0}$.

Pero $100 = 4 \times 25$, entonces, 4 divide a $x - \overline{a_1 a_0}$ ó 25 divide a $x - \overline{a_1 a_0}$. Nos interesa el número x . Entonces:

- Para que 4 divida a x es necesario y suficiente que el número $\overline{a_1 a_0}$ sea múltiplo de cuatro.
- Si el número $\overline{a_1 a_0}$ tiene la forma 00, 25, 50 ó 75, el número x es divisible por veinticinco.

Por ejemplo, sea $x = 12348$. Como $\overline{a_1 a_0} = 48$ y $48 = 4 \times 12$ entonces x es divisible por cuatro. Pues, $12348 = 4 \times 3087$.

Si tomamos $x = 27450$, entonces x es divisible por 25, pero no es divisible por cuatro. En efecto:

$$27450 = 25 \times 1098$$

pero, $27450 = 4 \times 6862 + 2$ (residuo no nulo)

Si $x = 79400$, x es múltiplo de 4 y de 25, pues,

$$79400 = 4 \times 19850 \quad \text{y} \quad 79400 = 25 \times 3176$$

3.- Un entero x es divisible por nueve (ó por tres) si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por nueve (ó por tres).

Debido a que $10 - 1 = 9(1)$; $10^2 - 1 = 9(11)$; $10^3 - 1 = 9(111)$; etc., basta demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 9 divide a $10^n - 1$. Aplicamos el método de inducción matemática:

a) Si $n = 1$, entonces 9 divide a 9.

b) Supongamos que 9 divide a $10^k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Ahora demostremos que 9 divide a $10^{k+1} - 1$.

Como 9 divide a $10^k - 1$ (por b), existe un entero z tal que $10^k - 1 = 9z$, de donde $10^k = 9z + 1$. Multiplicando ambos miembros por 10, tenemos;

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10(9z + 1) = 90z + 10 = 90z + 9 + 1 \\ &= 9(10z + 1) + 1 = 9m + 1, \text{ donde } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

entonces $10^{k+1} - 1 = 9m$ y por tanto, 9 divide a $10^{k+1} - 1$. Por el principio de inducción matemática 9 divide a $10^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, como $9 = 3 \times 3$, entonces 3 divide a $10^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En síntesis, $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ es divisible por nueve (ó por tres) si la suma $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ es múltiplo de nueve (ó de tres).

Por ejemplo, sea $x = 3654$. La suma de sus cifras, es; $3+6+5+4 = 18 = 9 \times 2$. Luego, x es divisible por 9. En efecto, $3654 = 9 \times 406$.

Además, $3+6+5+4 = 18 = 3 \times 6$, de donde x es divisible por 3; $3654 = 3 \times 1218$.

Ahora, tomemos $x = 12345$. La suma de sus cifras es; $1+2+3+4+5 = 15 = 3 \times 5$. Entonces, x es divisible por 3. Sin embargo, x no es divisible por 9. Basta ver que; $12345 = 3 \times 4115 = 9 \times 1371 + 6$ (residuo no nulo).

UTILIDAD.

La teoría de la divisibilidad por nueve, por abarcar todas las cifras del número dado, es de gran ayuda cuando se quiere saber si una operación está bien ejecutada

o no. Es la llamada "prueba del nueve". Aunque las otras pruebas tengan interés matemático, son un tanto restringidas.

A manera de ilustración, consideremos dos casos:

I. Multiplicación.

Sean a y b enteros dados y su producto $p = axb$. Estos números en módulo nueve, son:

$$a = 9a_1 + x \quad \text{donde } a_1, x \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq x < 9$$

$$b = 9b_1 + y \quad \text{donde } b_1, y \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq y < 9$$

$$p = 9p_1 + z \quad \text{donde } p_1, z \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq z < 9$$

Puesto que $p = axb$, entonces:

$$9p_1 + z = (9a_1 + x)(9b_1 + y)$$

$$= 81a_1b_1 + 9a_1y + 9b_1x + xy$$

de donde, $9(p_1 - 9a_1b_1 - a_1y - b_1x) = xy - z$

ó sea, $9m = xy - z$ donde $m \in \mathbb{Z}$. De aquí, 9 divide a $xy - z$.

EJEMPLO: Al multiplicar 237 por 59 resulta 13973. Es esto correcto?

$$\left. \begin{array}{l} 237 = 9 \times 26 + 3 \\ 59 = 9 \times 6 + 5 \\ 13973 = 9 \times 1441 + 4 \end{array} \right\} \quad 3 \times 5 - 4 = 11$$

como 11 no es múltiplo de 9, el resultado es incorrecto.

En efecto, $237 \times 59 = 13983$.

II. DIVISION.

Sean a y b enteros dados, siendo $b \neq 0$. Al dividir a entre b se obtiene un cociente q y un residuo r tales que $a = bq + r$ donde $0 \leq r < b$.

Estos números en módulo 9, son:

$$a = 9a_1 + x; \quad a_1, x \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq x < 9$$

$$b = 9b_1 + y; \quad b_1, y \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq y < 9$$

$$q = 9q_1 + z; \quad q_1, z \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq z < 9$$

$$r = 9r_1 + w; \quad r_1, w \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leq w < 9$$

Puesto que $a = bq + r$, entonces:

$$\begin{aligned} 9a_1 + x &= (9b_1 + y)(9q_1 + z) + (9r_1 + w) \\ &= 81b_1q_1 + 9b_1z + 9q_1y + yz + 9r_1 + w \end{aligned}$$

de donde, $9(a_1 - 9b_1q_1 - b_1z - q_1y - r_1) = (yz + w) - x$
ó sea, $9m = (yz + w) - x$, donde $m \in \mathbb{Z}$. De aquí, 9 divide a $(yz + w) - x$.

EJEMPLO; Al dividir 123456 entre 276 se obtiene 447 de cociente y residuo 83. Serán los resultados correctos?

$$\left. \begin{array}{l} 123456 = 9 \times 13717 + 3 \\ 276 = 9 \times 30 + 6 \\ 447 = 9 \times 49 + 6 \\ 83 = 9 \times 9 + 2 \end{array} \right\} (3 \times 6 + 6) - 2 = 22$$

como 22 no es múltiplo de 9, la operación debe revisarse. En efecto: $123456 = 276 \times 447 + 84$ ($84 \neq 83$)

4.- Un entero x es divisible por once si y sólo si la

suma alternada de sus cifras (a partir de las unidades) es múltiplo de once.

Sea el entero $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ donde los a_i varían entre cero y nueve. Su representación decimal es:

$$x = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$$

Como $10 = 11 - 1$; $10^2 = 11(9) + 1$; $10^3 = 11(91) - 1$; $10^4 = 11(909) + 1$; etc., basta demostrar que 11 divide a $10^n \pm 1$. Es decir, 11 divide a $10^n - (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Lo hacemos por inducción matemática;

a) Si $n = 1$, entonces 11 divide a 11.

b) Supongamos que 11 divide a $10^k - (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

c) Mostramos que 11 divide a $10^{k+1} - (-1)^{k+1}$.

Como 11 divide a $10^k - (-1)^k$, por b) existe un entero z tal que;

$$10^k - (-1)^k = 11z \Rightarrow 10^k = 11z + (-1)^k$$

Multiplicamos ambos miembros por 10;

$$10^{k+1} = 10(11z + (-1)^k). \text{ Pero } 10 = 11 - 1, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= (11 - 1)(11z + (-1)^k) \\ &= 11(11z) + 11(-1)^k - 11z + (-1)(-1)^k \\ &= 11(10z + (-1)^k) + (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

de donde, $10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 11(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, lo cual dice que 11 divide a $10^{k+1} - (-1)^{k+1}$. Por el principio de inducción matemática, 11 divide a $10^n - (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego, para que 11 divida a x es necesario y suficiente que 11 divida a $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n)$ que es la suma alternada de las cifras de x .

A manera de ayuda nemotécnica, tenemos; se suman las cifras de puesto impar; S_1 ; se suman las cifras de puesto par; S_2 . De la primera restamos la segunda, $S_1 - S_2$ y el resultado debe ser múltiplo de once.

EJEMPLO: Veamos si el número $x = 1326391$ es divisible por 11:

$$S_1 = 1 + 3 + 2 + 1 = 7$$

$$S_2 = 9 + 6 + 3 = 18$$

$$S_1 - S_2 = 7 - 18 = -11$$

Luego x sí es divisible por 11. En efecto:

$$1326391 = 11 \times 120581$$

Esperamos una futura oportunidad para tratar aspectos sobre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo siguiendo esta línea de razonamiento.

Pasto, abril 15/82